

车路耦合非线性振动高阶 Galerkin 截断研究^{*}

杨燕¹, 丁虎¹, 陈立群^{1,2}

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 上海大学 力学系, 上海 200444)

(我刊编委陈立群来稿)

摘要: 将移动车辆模型化为运动的两自由度质量-弹簧-阻尼系统, 道路模型化为立方非线性黏弹性地基上的弹性梁, 并将路面不平度设定为简谐函数. 通过受力分析, 建立车路非线性耦合振动高阶偏微分方程. 采用高阶 Galerkin 截断结合数值方法求解耦合系统的动态响应. 首次研究不同截断阶数对车路耦合非线性振动动态响应的影响, 确定 Galerkin 截断研究车路耦合振动的收敛性. 研究表明, 对于软土地基的沥青路面, 耦合振动的动态响应, 需要 150 阶以上的截断才能达到收敛效果. 并通过高阶收敛的 Galerkin 截断研究了系统参数对车路耦合非线性振动动态响应的影响.

关键词: 非线性; 地基梁; 耦合振动; Galerkin 方法; 路面不平度

中图分类号: O32 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.09.001

引言

近年来, 高速公路飞速发展, 在社会发展建设中发挥着重要作用. 而高速公路的建设成本较高, 如何在运营过程中减少车辆和道路的维护和维修就涉及到许多关键技术问题. 由于路面不平度, 重载汽车在公路上行驶, 当路面简谐激励的频率与车身的固有频率一致时, 会引起车的共振, 车的振动幅度增大, 进而会对路面产生更大的作用力. 此外, 车辆振动过大, 影响车的运行品质. 研究发现, 引起道路早期破坏的一个重要原因就是移动车辆荷载. 故研究汽车与路面的耦合作用, 具有重要的理论意义和工程应用价值.

多年来, 众多学者对于车路耦合领域十分关注, 已经取得长足的进展^[1-3]. 李韶华等^[4]通过 20 阶 Galerkin 截断和快速积分方法得到了重型汽车与路面耦合模型的动态响应, 并与传统的汽车路面模型的计算结果相比较, 发现车路耦合作用不可忽视. 肖勇刚等^[5]建立了移动振动车辆模型下桥梁的耦合非线性振动方程, 采用 1 阶 Galerkin 截断和 Runge-Kutta 法对方程进行求解, 探讨了系统参数对车桥耦合系统非线性振动性能的影响. 张庆等^[6]采用 10 阶 Galerkin 截

* 收稿日期: 2013-06-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10932006; 11232009); 上海市教育委员会科研创新项目(12YZ028); 上海市重点学科建设项目(S30106); 上海市青年科技启明星计划资助项目(11QA1402300)

作者简介: 杨燕(1988—), 女, 浙江台州人, 硕士生(E-mail: yangyan19880827@126.com); 丁虎(1978—), 男, 副研究员, 博士(通讯作者.E-mail: dinghu3@shu.edu.cn).

断求解了车桥耦合系统,探讨了系统参数在车桥耦合振动中的作用.在车桥耦合动力学问题上,Yang 和 Lin^[7]将 1 阶和 2 阶 Galerkin 截断数值结果与有限元分析结果作了比较,并提出了一些潜在的应用价值.Esmailzadeh 和 Jalili^[8]采用 4 阶 Galerkin 截断对移动车辆作用下的车-人-路的相互作用机理进行了研究.梁波等^[9]通过取代表性的几组低阶振型叠加分析了系统参数与车辆荷载及车身加速度的关系.

虽然 Galerkin 截断已广泛应用于车路耦合振动的研究工作,但是 Galerkin 截断阶数的选取,即收敛性问题的研究还未见报道.Ding 等^[10]采用立方非线性黏弹性 Winkler 地基在移动载荷作用下的 Euler-Bernoulli 梁模型,研究了 Galerkin 截断的收敛性,发现道路响应问题需要超高阶截断.本文视车辆和道路为整体,建立耦合系统的非线性连续离散控制方程.采用 Galerkin 截断方法将非线性偏微分控制方程转化为常微分方程组,再通过数值方法求解耦合系统的动态响应.研究截断阶数对动态响应的影响,确定 Galerkin 截断的收敛性.并通过收敛的高阶截断研究系统参数对耦合响应的影响.

1 振动控制方程

移动弹簧振子作用下有限长非线性黏弹性 Winkler 基础上 Euler-Bernoulli 梁的示意图如图 1 所示.

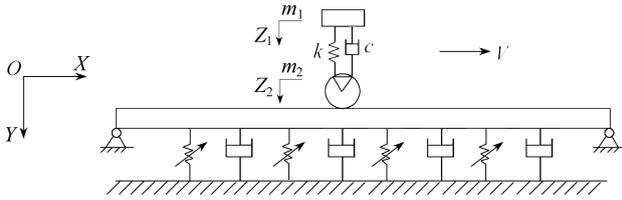


图 1 非线性黏弹性 Winkler 基础上 Euler-Bernoulli 梁示意图

Fig.1 Model of Euler-Bernoulli beam on a nonlinear viscoelastic foundation

考虑厚度、高度分别为 b 和 h , 惯性矩为 I , 长度为 L , 密度为 ρ , 弹性模量为 E 的均匀梁的立方非线性 Winkler 地基模型^[11-12]:

$$P = k_1 Y + k_3 Y^3 + \mu Y_{,T}, \quad (1)$$

其中, k_1 , k_3 分别为线性和非线性地基参数, μ 为地基的黏性系数.考虑车身和轮胎的质量分别为 m_1 和 m_2 , 悬架刚度为 k , 悬架阻尼为 c .通过受力分析,得到关于车和路耦合振动的控制方程^[13]:

$$\begin{cases} \rho A Y_{,TT} + E I Y_{,xxxx} + k_1 Y + k_3 Y^3 + \mu Y_{,T} = \\ \quad [(m_2 + m_1)g - m_2 Z_{2,TT} - m_1 Z_{1,TT}] \delta(X - VT), \\ m_1 Z_{1,TT} = -k[Z_1 - Z_2] - c[Z_{1,T} - Z_{2,T}], \end{cases} \quad (2)$$

其中, $Y(X, T)$, $Z_1(T)$ 和 $Z_2(T)$ 分别为梁、车身和轮胎的竖向位移, $\delta(X - VT)$ 为 Dirac-delta 函数, X 是沿着梁轴向的空间坐标, V 为车身移动速度.

假定车辆在路面上行驶时轮胎与地面始终接触,则轮胎位移可以表达如下:

$$Z_2(T) = Y(X, T) |_{X=VT} + Z_p(X) |_{X=VT} = Y(X, T) |_{X=VT} + a \sin\left(\frac{2\pi X}{L_0}\right) \Big|_{X=VT}, \quad (3)$$

其中,上式第 2 项为路面不平整值.因此,有下式成立:

$$\begin{cases} Z_{2,T} = [Y_{,T} + VY_{,X} + VZ_{P,X}(X)]_{X=VT}, \\ Z_{2,TT} = [Y_{,TT} + 2VY_{,XT} + V^2Y_{,XX} + V^2Z_{P,XX}(X)]_{X=VT}. \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)代入到式(2)中,得到

$$\begin{cases} \rho AY_{,TT} + EIY_{,XXXX} + k_1Y + k_3Y^3 + \mu Y_{,T} = \\ \quad \{ -m_2 [Y_{,TT} + 2VY_{,XT} + V^2Y_{,XX} + V^2Z_{P,XX}(X)]_{X=VT} + \\ \quad (m_2 + m_1)g - m_1Z_{1,TT} \} \delta(X - VT), \\ m_1Z_{1,TT} = -k \{ Z_1 - [Y + Z_P(X)]_{X=VT} \} - \\ \quad c \{ Z_{1,T} - [Y_{,T} + VY_{,X} + VZ_{P,X}(X)]_{X=VT} \}. \end{cases} \quad (5)$$

不失一般性,对式(5)进行无量纲化,取如下变量及参数:

$$\begin{cases} y = \frac{Y}{L}, t = \frac{T}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, v = V \sqrt{\frac{\rho}{E}}, x = \frac{X}{L}, k_f = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{I}{A}}, z_1 = \frac{Z_1}{L}, z_2 = \frac{Z_2}{L}, \\ \mu \leftrightarrow \frac{\mu}{A} \sqrt{\frac{L^2}{\rho E}}, k_1 \leftrightarrow \frac{k_1 L^2}{EA}, k_3 \leftrightarrow \frac{k_3 L^4}{EA}, \kappa = \frac{(m_2 + m_1)g}{EA}, m_2 \leftrightarrow \frac{m_2}{\rho AL}, m_1 \leftrightarrow \frac{m_1}{\rho AL}, \\ k \leftrightarrow \frac{\rho L^2}{m_1 E} k, c \leftrightarrow \frac{cL}{m_1} \sqrt{\frac{\rho}{E}}, z_p = \frac{Z_p}{L} = \frac{a}{L} \sin\left(\frac{2\pi xL}{L_0}\right). \end{cases} \quad (6)$$

方程(5)化为无量纲控制方程

$$\begin{cases} y_{,tt} + k_f^2 y_{,xxxx} + k_1 y + k_3 y^3 + \mu y_{,t} = \\ \quad [\kappa - m_1 z_{1,tt} - m_2 (y_{,tt} + 2vy_{,xt} + v^2 y_{,xx} + v^2 z_{p,xx})_{x=vt}] \delta(x - vt), \\ z_{1,tt} = -k [z_1 - (y + z_p)_{x=vt}] - c [z_{1,t} - (y_{,t} + vy_{,x} + vz_{p,x})_{x=vt}]. \end{cases} \quad (7)$$

简支端边界条件

$$y(0,t) = y(1,t) = 0, y_{,xx}(0,t) = y_{,xx}(1,t) = 0. \quad (8)$$

2 Galerkin 截断

Galerkin 截断是利用已知的近似函数来确定系统的运动规律.将梁的变形表达为模态函数的线性组合

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \phi_k(x), \quad (9)$$

其中, $q_k(t)$ 为广义位移, $\phi_k(x)$ 为试函数.对于两端简支梁,可采用相应线性模型的模态函数

$$\phi_k(x) = \sin(\beta_k x), \quad \beta_k = k\pi \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

若取前 n 项作为近似解,代入控制方程(7)中,得到

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \{ [\ddot{q}_k(t) + k_1 q_k(t) + \mu \dot{q}_k(t)] \phi_k(x) \} + \\ & k_f^2 \sum_{k=1}^n [q_k(t) \phi_k'''(x)] + k_3 \left\{ \sum_{k=1}^n [q_k(t) \phi_k(x)] \right\}^3 + \\ & \left\{ m_1 \ddot{z}_1(t) - \kappa + m_2 \left[\sum_{k=1}^n [\ddot{q}_k(t) \phi_k(x)] + 2v \sum_{k=1}^n [\dot{q}_k(t) \phi_k'(x)] + \right. \right. \end{aligned}$$

$$v^2 \sum_{k=1}^n [q_k(t) \phi_k''(x)] + v^2 z_p''(x) \Big|_{x=vt} \Big\} \delta(x-vt) = 0, \quad (11)$$

将上式左右两端同乘以 $w_i(x)$, 并沿梁的无量纲长度从 0 到 1 上积分, 根据正交性条件, 满足如下两式:

$$\int_0^1 \phi_k(x) w_i(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ \frac{1}{2}, & k = i, \end{cases} \quad (12)$$

$$\int_0^1 \phi_k'''(x) w_i(x) dx = \beta_k^4 \int_0^1 \phi_k(x) w_i(x) dx. \quad (13)$$

最后, 得到 $n+1$ 个关于路和车的常微分方程:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) + \mu \dot{q}_i(t) + 2m_2 \left[\sum_{k=1}^n \ddot{q}_k(t) \sin(\beta_k vt) \right] \sin(\beta_i vt) + \\ 4m_2 v \left[\sum_{k=1}^n \beta_k \dot{q}_k(t) \cos(\beta_k vt) \right] \sin(\beta_i vt) - \\ 2m_2 v^2 \left[\sum_{k=1}^n \beta_k^2 q_k(t) \sin(\beta_k vt) \right] \sin(\beta_i vt) + \\ 2k_3 \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n q_k(t) \phi_k(x) \right]^3 w_i(x) dx + k_i^2 \beta_i^4 q_i(t) + k_1 q_i(t) + \\ 2m_1 \ddot{z}_1(t) \sin(\beta_i vt) - 2\kappa \sin(\beta_i vt) - \\ 8m_2 v^2 \frac{\pi^2 a L}{L_0^2} \sin\left(\frac{2\pi vt L}{L_0}\right) \sin(\beta_i vt) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1(t) = -kz_1(t) + k \sum_{k=1}^n q_k(t) \sin(\beta_k vt) + k \frac{a}{L} \sin\left(\frac{2\pi vt L}{L_0}\right) + \\ c \sum_{k=1}^n \dot{q}_k(t) \sin(\beta_k vt) - c \dot{z}_1(t) + \\ cv \sum_{k=1}^n \beta_k q_k(t) \cos(\beta_k vt) + \frac{2\pi c v a}{L_0} \cos\left(\frac{2\pi vt L}{L_0}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

联立路面响应的微分方程组 (14) 和车辆振动的微分方程 (15), 组成耦合运动微分方程组. 并取初始条件

$$y(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad y_{,i}(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad z_1(t) \Big|_{t=0} = 0, \quad z_{1,i}(t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (16)$$

3 具体算例

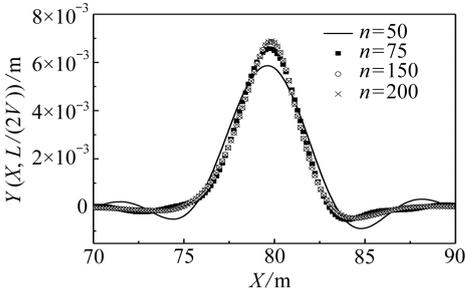
本文以软土地基上沥青公路为实例, 进行算例分析. 车路耦合系统的物理参数^[3, 14-15]如表 1 所示.

图 2(a) 和 (b) 分别给出了取不同阶数的 Galerkin 截断方法, 计算车辆行至有限长道路中点时沥青路面垂向变形和随时间变化的道路中点垂向变形的结果比较, 包括 50 阶、75 阶、150 阶和 200 阶. 两图所呈现的数值结果都显示, 50 阶截断与 150 和 200 阶截断有着很大的不同. 因此, 比较结果表明, 50 阶 Galerkin 截断对于车路耦合的动力学响应分析, 是不够精确的. 另外, 75 阶截断与 150 阶截断结果间也存在着可以辨析的差别, 而 150 阶截断和 200 阶截断结果间的差别很小.

表 1 路面、地基及车辆参数

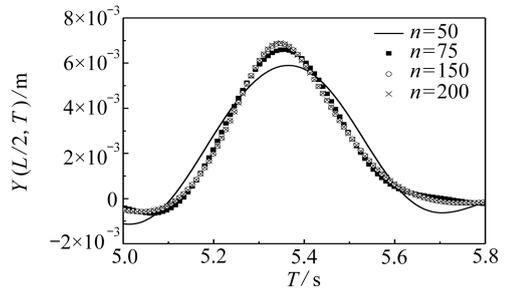
Table 1 Properties of the pavement, foundation and vehicle

	item	notation	value	dimensionless value
asphalt mixture D-12	Young's modulus	E	6.998 GPa	-
	mass density	ρ	2 373 kg/m ³	-
	height	h	0.3 m	-
	width	b	1.0 m	-
	length	L	160 m	-
	-	k_f	-	5.41×10^{-4}
	wavelength of road roughness	L_0	10 m	-
	amplitude of road roughness	a	0.002 m	-
foundation	linear stiffness	k_1	8×10^6 N/m ²	97.552
	nonlinear stiffness	k_3	8×10^6 N/m ⁴	2.497×10^6
	viscous damping	μ	0.3×10^6 N · s/m ²	39.263
vehicle	vehicle body mass	m_1	21 260 kg	0.186 65
	tire mass	m_2	190 kg	0.001 67
	-	κ	-	$1.021\ 72 \times 10^{-4}$
	suspension stiffness	k	2.06×10^6 N/m	0.841 14
	suspension damping	c	3.0×10^4 N · s/m	0.131 51
	speed	V	15 m/s	0.008 74



(a) 对梁形变的影响

(a) Effects on vertical deflections of the pavement



(b) 对梁中点形变的影响

(b) Effects on vertical deflections at the pavement's midpoint

图 2 Galerkin 截断阶数的影响

Fig.2 Effects of different Galerkin truncation orders

因此,数值结果表明,150阶 Galerkin 截断的结果相对精确.道路中点处最大垂向变形,50阶截断与200阶截断的相对误差为 14.8×10^{-2} ;75阶截断与200阶截断的相对误差为 4.64×10^{-2} ;150阶截断和200阶截断的相对误差为 0.29×10^{-2} .还可以看出,汽车正在经过的路面振动,随着时间的延伸迅速衰减.

图3代表当车辆行至有限长道路中点时,行驶速度 V 对车身加速度的影响,从图中可以看出,当 $V = 15.7$ m/s 时,车身加速度值最大.这不难理解,当路面激励频率接近 9.8 rad/s,车体和车轮均发生共振,这正是车体的固有频率.取路面不平度波长为 10 m,则 9.8 rad/s 对应的汽车的行驶速度为 15.7 m/s,即共振临界车速.因此,设计车辆行驶速度应避免共振临界车速^[16].

图4(a)和(b)分别为车身位移和车身加速度的时间历程图,可以看出,车辆在前进过程

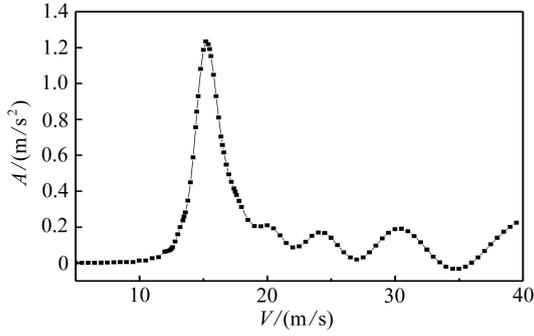
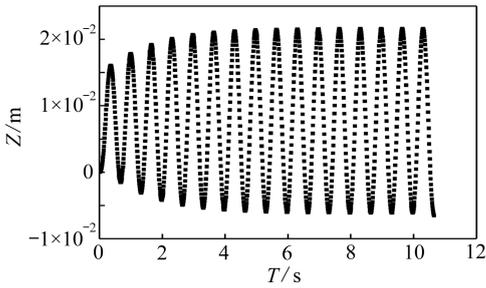
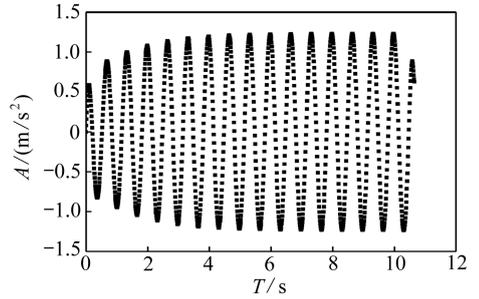


图3 行驶速度与车身加速度关系图

Fig.3 Relation between vehicle acceleration and vehicle speed



(a) 车身位移的时间历程图
(a) Time history of vehicle body displacement

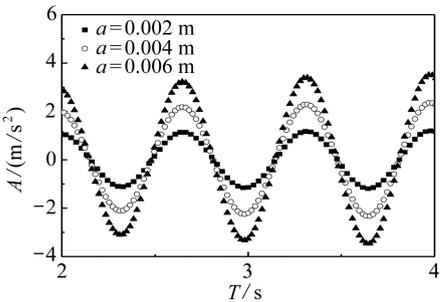


(b) 车身加速度的时间历程图
(b) Time history of vehicle body acceleration

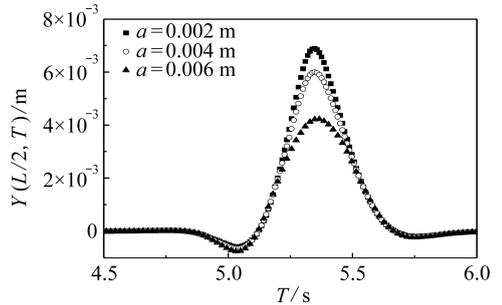
图4 时间历程图

Fig.4 Time histories

中,车身位移和车身加速度是以一定的频率和振幅在路面上变动着.图5(a)和(b)分别表示路面不平度矢高 a 对车身加速度和路面变形的影响.观察图5(a)发现,当 a 增大,车身振动频率不受影响,但振动的加速度幅值增加,同时图5(b)表明,路面的变形却减少.



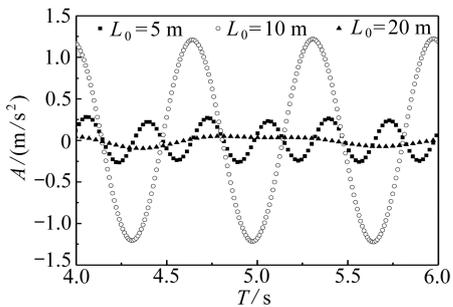
(a) 对车身加速度的影响
(a) Effects on vehicle body acceleration



(b) 对路面变形的影响
(b) Effects on vertical deflection at the pavement's midpoint

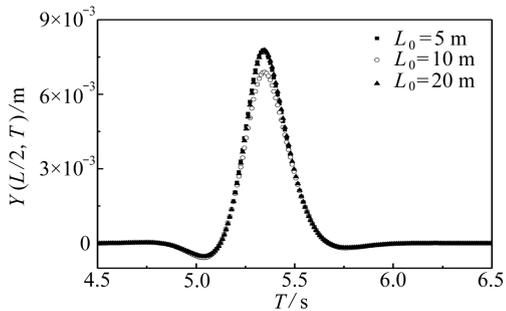
图5 路面不平度矢高的影响

Fig.5 Effects of different amplitudes of road surface roughness



(a) 对车身加速度的影响

(a) Effects on vehicle body acceleration

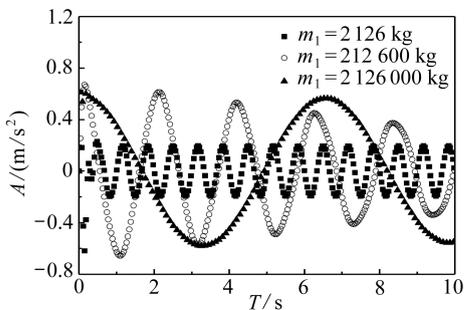


(b) 对路面变形的影响

(b) Effects on vertical deflection at the pavement's midpoint

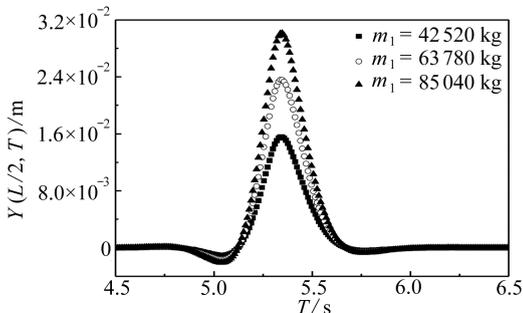
图 6 路面不平度波长的影响

Fig.6 Effects of different wavelengths of road surface roughness



(a) 对车身加速度的影响

(a) Effects on vehicle body acceleration

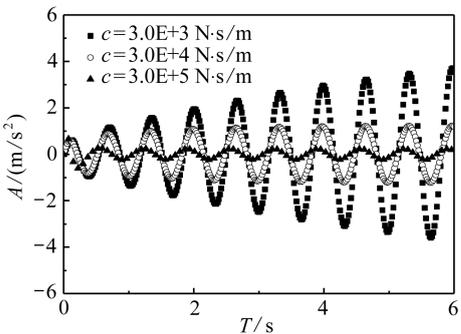


(b) 对路面变形的影响

(b) Effects on vertical deflection at the pavement's midpoint

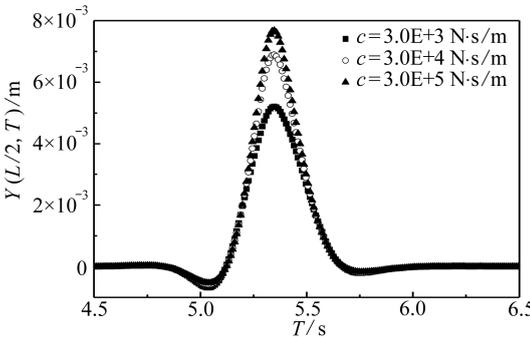
图 7 车身质量的影响

Fig.7 Effects of different vehicle body masses



(a) 对车身加速度的影响

(a) Effects on vehicle body acceleration



(b) 对路面变形的影响

(b) Effects on vertical deflection at the pavement's midpoint

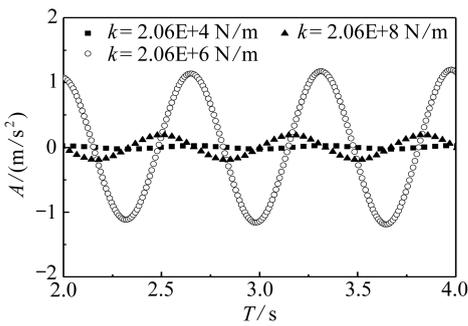
图 8 悬架阻尼的影响

Fig.8 Effects of different suspension dampings

图 6(a) 和 (b) 分别表示路面不平度波长 L_0 对车身加速度和路面变形的影响, 比较 $L_0 = 5$ m 和

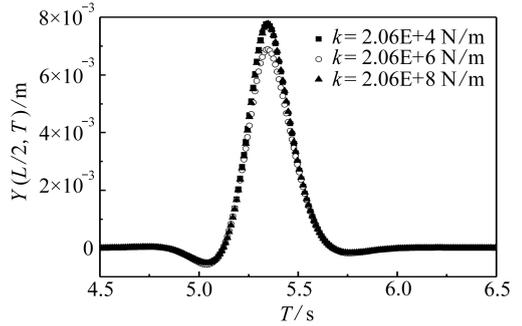
$L_0 = 20$ m 的数值结果,发现 L_0 增大,车身振动频率和振动幅值减少,而 $L_0 = 10$ m, $V = 15$ m/s 时却是一个特例,因为正是路面激励频率与车体固有频率接近时,所以车身振动幅值较大,但路面变形值却相对减少.图 7(a)和(b)分别表示车身质量 m_1 对车身加速度和路面变形的影响,可以发现 m_1 增大时,车身振动频率减少,但路面变形增大.

图 8(a)和(b)表示悬架阻尼 c 对车身加速度和路面变形的影响,发现悬架阻尼增大时,车身振动频率不变,但振动的加速度幅值减少,同时路面的变形却在增大.图 9(a)和(b)分别表示悬架刚度对车身加速度和路面变形的影响,可以发现悬架刚度增大时,车身振动频率增大,振动的加速度幅值增加,此时, $k = 2.06 \times 10^6$ 正是车体发生共振时的悬架刚度.因此, $k = 2.06 \times 10^6$ 时,振动的加速度幅值异常大,影响车的行驶舒适度.



(a) 对车身加速度的影响

(a) Effects on vehicle body acceleration



(b) 对路面变形的影响

(b) Effects on vertical deflection at the pavement's midpoint

图 9 悬架刚度的影响

Fig.9 Effects of different suspension stiffnesses

4 结 论

通过 Galerkin 截断方法结合数值方法研究了车路耦合非线性振动的动力学响应.将移动车辆模型化为两自由度的质量-弹簧-阻尼系统,路基和路面分别模型化为立方非线性黏弹性地基和弹性梁,运动车辆受到来自路面不平产生的简谐激励.通过受力分析,建立了车路非线性耦合振动的偏微分控制方程.采用沥青路面的软土地基进行实例分析,得到以下结论:

- 1) 对于车路耦合非线性振动, Galerkin 截断需要 150 阶以上才能达到收敛效果;
- 2) 随着路面平整度矢高的增大,车身振动的加速度幅值增加,但是路面的变形却随之减少;
- 3) 随着路面不平度波长的增大,车身振动频率减小,但是对路面的变形无明显影响;
- 4) 随着车身质量的增大,车身振动的频率减小,但是路面的变形随之增大;
- 5) 随着悬架阻尼的增大,车身的振动频率无明显变化,但是车身振动的加速度幅值随之减小,另外,路面的变形随之增大;
- 6) 随着悬架刚度的增大,车身的振动频率随之增大,而且车身振动的加速度幅值也随之增大.

参考文献(References):

- [1] 李奇, 吴定俊, 邵长宇. 考虑车体柔性的车桥耦合系统建模与分析方法[J]. 振动工程学报, 2011, **24**(1): 41-47. (LI Qi, WU Ding-jun, SHAO Chang-yu. Modeling and dynamic analysis method of vehicle-bridge coupling system considering car-body flexibility[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2011, **24**(1): 41-47. (in Chinese))
- [2] 殷新锋, 蔡春声, 刘扬. 基于面接触的车桥耦合振动研究[J]. 振动工程学报, 2012, **25**(3): 244-252. (YIN Xin-feng, CAI Chun-sheng, LIU Yang. Vehicle-bridge coupled vibration based on the patch contact[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2012, **25**(3): 244-252. (in Chinese))
- [3] YANG Shao-pu, LI Shao-hua, Lu Yong-jie. Dynamics of vehicle-pavement coupled system based on a revised flexible roller contact tire model[J]. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 2009, **52**(3): 721-730.
- [4] 李韶华, 杨绍普. 重型汽车与路面的耦合作用研究[J]. 振动与冲击, 2009, **28**(6): 155-158. (LI Shao-hua, YANG Shao-pu. Dynamical interaction between heavy vehicle and road pavement [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, **28**(6): 155-158. (in Chinese))
- [5] 肖勇刚, 朱素红. 车桥耦合系统的非线性动力分析[J]. 振动与冲击, 2007, **26**(8): 104-108. (XIAO Yong-gang, ZHU Su-hong. Nonlinear dynamic analysis of vehicle-bridge coupled interaction system[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, **26**(8): 104-108. (in Chinese))
- [6] 张庆, 史家钧, 胡振东. 车辆-桥梁耦合作用分析[J]. 力学季刊, 2003, **24**(4): 577-584. (ZHANG Qing, SHI Jia-jun, HU Zhen-dong. Coupled interaction analysis on vehicle-bridge system[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2003, **24**(4): 577-584. (in Chinese))
- [7] Yang Y B, Lin C W. Vehicle-bridge interaction dynamics and potential application[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **284**(1/2): 205-226.
- [8] Esmailzadeh E, Jalili N. Vehicle-passenger-structure interaction of uniform bridges traversed by moving vehicles[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **260**(4): 611-635.
- [9] 梁波, 苏世毅, 罗红. 不平整条件下车路耦合作用动力分析[J]. 工程力学, 2009, **26**(3): 189-194. (LIANG Bo, SU Shi-yi, LUO Hong. Coupled dynamic analysis of vehicle-road system under roughness conditions[J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(3): 189-194. (in Chinese))
- [10] DING Hu, CHEN Li-qun, YANG Shao-pu. Convergence of Galerkin truncation for dynamic response of finite beams on nonlinear foundations under a moving load[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, **331**(10): 2426-2442.
- [11] Ansari M, Esmailzadeh E, Younesian D. Internal-external resonance of beams on non-linear viscoelastic foundation traversed by moving load[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, **61**(1/2): 163-182.
- [12] Ansari M, Esmailzadeh E, Younesian D. Frequency analysis of finite beams on nonlinear Kelvin-Voight foundation under moving loads[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(7): 1455-1471.
- [13] Zheng D Y, Au F T K, Cheung Y K. Vibration of vehicle on compressed rail on viscoelastic foundation[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2000, **126**(11): 1141-1147.
- [14] Norambuena-Contreras J, Castro-Fresno D, Vega-Zamanillo A, Celaya M, Lombillo-Vozmedi-

- ano I. Dynamic modulus of asphalt mixture by ultrasonic direct test[J]. *Ndt & E International*, 2010, **43**(7): 629-634.
- [15] YANG Shao-pu, LI Shao-hua, LU Yong-jie. Investigation on dynamical interaction between a heavy vehicle and road pavement[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2010, **48**(8): 923-944.
- [16] 陈炎, 黄小清, 马友发. 车桥系统的耦合振动[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(4): 354-358. (CHEN Yan, HUANG Xiao-qing, MA You-fa. Coupling vibration of vehicle-bridge system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(4): 354-358. (in Chinese))

Nonlinear Vibration of Vehicle-Pavement Coupled System Based on High-Order Galerkin Truncation

YANG Yan¹, DING Hu¹, CHEN Li-qun^{1,2}

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China;*

2. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R.China)

(Contributed by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The moving vehicle was modeled as a two DOF spring-mass-damper system. The pavement structure was modeled as an elastic beam on a nonlinear viscoelastic foundation. The nonlinear foundation and the road surface roughness were respectively assumed to be cubic and a harmonic function. The nonlinear partial differential governing equations of the vehicle-pavement coupled vibration were developed. The dynamic response of the coupled system was solved with the high-order Galerkin truncation method in conjunction with numerical method. The effects of different truncation orders on the dynamical responses of the vehicle-pavement nonlinear vibration were discussed, and the convergence of the Galerkin truncation to investigate the vehicle-pavement coupled vibration were determined for the first time. The study shows that the numerical investigation into dynamical response of the asphalt pavement on soft soil foundation needs over 150 terms. The influences of system parameters on the dynamical response were numerically studied via the high-order convergent Galerkin truncation method.

Key words: nonlinearity; foundation beam; coupled vibration; Galerkin method; road surface roughness

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(10932006;11232009)