文章编号:1000-0887(2013)09-0941-07

三阶非线性时滞微分方程振动性的新准则*

罗李平[1], 俞元洪[2], 曾云辉[1]

(1. 衡阳师范学院 数学与计算科学系, 湖南 衡阳 421002;
2. 中国科学院 数学与系统科学研究院, 北京 100190)

摘要: 研究了一类三阶非线性时滞微分方程的振动性问题, 利用算子和积分技巧给出了该类方程不存在 A 型解(或 B 型解)的判定条件. 进而借助适当的比较定理, 得到了该类方程振动的几个新的充分条件, 所得结果推广和改进了最近文献中的结果, 并充分反映了时滞在方程振动中的影响作用. 主要结果由实例加以阐述.

关 键 词: 三阶; 时滞微分方程; A 型解; B 型解; 比较定理; 振动准则; 非线性

中图分类号: O175.12　　**文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.09.007

引　　言

振动作为自然界和工程技术领域中常见的一种运动,广泛存在于机械运动、电磁运动、热运动、原子运动等运动形式之中. 急动度是描述机械运动的一个重要的基本概念. 1928 年工程师 P. Melchior 从某些工程设计的需要出发,把"加速度对时间的导数"定义为"急动度",也叫"加加速度". 1978 年数学家 Schot[1] 在物理学期刊上正式介绍了急动度概念,并考虑了其在凸轮和星形轮等间歇运动机械设计等方面的应用. 在机械设计,高层建筑的抗风、抗震设计,交通工具设计以及材料等问题中经常需要用到急动度. 在物理学的混沌理论和非线性动力学中,急动度也有一定的应用. 急动度作为加速度随时间的变化率,是变加速动力学的基本概念,它与三阶微分方程密切相关. 由于三阶微分方程的实际应用背景,近年来,三阶泛函微分方程的振动性和渐近性受到同行关注,例如,可参看文献[2-14]及其引文,其中文献[5]考虑了方程

$$(a(t)(x''(t))^{\alpha})' + q(t)f(x(g(t))) = 0, \tag{E1}$$

建立了方程(E1)的振动准则;文献[8]考虑了方程

$$(c(t)(a(t)x'(t))')' + q(t)f(x(t-\sigma)) = 0, \tag{E2}$$

给出了方程(E2)的解振动或收敛到 0 的充分条件. 本文的目的是推广和改进两者的结果,对如下的更一般情形的三阶非线性时滞微分方程:

$$(c(t)((a(t)(x'(t))^{\alpha})')^{\beta})' + q(t)f(x(\tau(t))) = 0, \qquad t \geqslant t_0, \tag{E}$$

* **收稿日期:** 2013-05-27; **修订日期:** 2013-06-11

基金项目: 湖南省自然科学-衡阳联合基金资助项目(11JJ9002); 湖南省"十二五"重点建设学科资助项目(湘教发[2011]76 号)

作者简介: 罗李平(1964—), 男, 湖南耒阳人, 教授(通讯作者. E-mail: luolp3456034@163.com);
俞元洪(1939—), 男, 上海人, 研究员, 硕士(E-mail: yu84845366@126.com);
曾云辉(1978—), 男, 湖南衡阳人, 讲师, 硕士(E-mail: chj8121912@sina.com).

给出新的振动准则.

本文总假设下列条件成立:

(i) α,β 是两个正奇整数之比;

(ii) $a(t),c(t),q(t)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R}^+),\mathbf{R}^+=(0,\infty)$, $t_0\geqslant 0$ 且

$$\int^\infty \frac{\mathrm{d}t}{a^{1/\alpha}(t)}=\int^\infty \frac{\mathrm{d}t}{c^{1/\beta}(t)}=\infty;$$

(iii) $\tau(t)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R}^+),\tau(t)\leqslant t,\tau'(t)\geqslant 0$, $\lim_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$;

(iv) $f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),xf(x)>0,f'(x)\geqslant 0,x\neq 0$ 且

$$-f(-xy)\geqslant f(xy)\geqslant f(x)f(y),\qquad xy>0. \tag{1}$$

定义算子

$$\begin{cases} L_0x(t)=x(t),\ L_1x(t)=a(t)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_0x(t)\right)^\alpha,\\ L_2x(t)=c(t)\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_1x(t)\right)^\beta,\ L_3x(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_2x(t), \end{cases} \tag{2}$$

则方程(E)可写为

$$L_3x(t)+q(t)f(x(\tau(t)))=0.$$

算子 L_3 的定义域 $D(L_3)$ 定义为所有使得 $L_jx(t)(0\leqslant j\leqslant 3)$ 在 $[t_x,\infty)(t_x\geqslant t_0)$ 上存在且连续的函数 x 的集合. 本文只限于考虑方程(E)的解 $x\in D(L_3)$ 且满足 $\sup\{|x(t)|:t\geqslant T\}>0$, $T\geqslant t_x$. 方程(E)的解称为振动,如果它有任意大的零点,否则称为非振动. 方程(E)称为振动,如果它的全部解都是振动的.

本文中出现的不等式, 如果不作特别说明, 都是最终成立, 即存在充分大的 T, 对 $t\geqslant T$ 成立.

称 $x(t)$ 具有 A 型,如果

$$x(t)L_ix(t)>0,\qquad i=0,1,2 \text{ 且 } x(t)L_3x(t)\leqslant 0; \tag{3}$$

称 $x(t)$ 具有 B 型,如果

$$x(t)\operatorname{sgn}x(t)>0,\ x(t)L_1x(t)<0,\ x(t)L_2x(t)>0,\ x(t)L_3x(t)\leqslant 0. \tag{4}$$

1 方程(E)不存在 A 型解的条件

定理 1 设

$$\int^\infty q(s)f\left(\int_{t_0}^{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right)\mathrm{d}s=\infty, \tag{5}$$

则方程(E)无 A 型解.

证明 设 $x(t)$ 是方程(E)的 A 型正解,则存在 $t_1\geqslant t_0$,使当 $t\geqslant t_1$ 时式(3)成立. 因此,存在正常数 K 和 $t_2\geqslant t_1$, 使得

$$a(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_0x(t)\right)^\alpha=L_1x(t)\geqslant K,$$

即有

$$x'(t)\geqslant\left(\frac{K}{a(t)}\right)^{1/\alpha},\qquad t\geqslant t_2.$$

从 t_2 到 $\tau(t)\geqslant t_2$ 对上式积分,有

$$x(\tau(t))\geqslant K^{1/\alpha}\int_{t_2}^{\tau(t)}\frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}. \tag{6}$$

在方程(E)中利用式(1)和式(6),得到

$$-L_3x(t)=q(t)f(x(\tau(t)))\geqslant q(t)f(K^{1/\alpha})\left(\int_{t_2}^{\tau(t)}\frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right),\qquad t\geqslant t_2.$$

从 t_2 到 $t\geqslant t_2$ 对上式积分产生

$$L_2x(t_2)\geqslant -L_2x(t)+L_2x(t_2)\geqslant f(K^{1/\alpha})\int_{t_2}^{t}q(s)f\left(\int_{t_2}^{\tau(s)}\frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right)\mathrm{d}s,$$

上式与条件(5)矛盾. 定理1证毕.

令

$$Q_1(t)=q(s)f\left(\int_{t_0}^{\tau(t)}\left(\frac{1}{a(s)}\int_{t_0}^{s}\frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\mathrm{d}s\right).\tag{7}$$

定理2 设方程

$$y'(t)+Q_1(t)f(y^{1/(\alpha\beta)}(\tau(t)))=0\tag{8}$$

振动,则方程(E)无A型解.

证明 设 $x(t)$ 是方程(E)的A型正解,则存在 $t_1\geqslant t_0$,使当 $t\geqslant t_1$ 时式(3)成立. 现有

$$L_1x(t)=L_1x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}L_1x(s)\mathrm{d}s=L_1x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{L_2^{1/\beta}x(s)}{c^{1/\beta}(s)}\mathrm{d}s.$$

因 $L_2x(t)$ 在 $[t_0,\infty)$ 上非增,有

$$L_1x(t)\geqslant L_2^{1/\beta}x(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{c^{1/\beta}(s)},\qquad t\geqslant t_0,$$

即

$$a(t)(x'(t))^{\alpha}\geqslant L_2^{1/\beta}x(t)\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{c^{1/\beta}(s)},\qquad t\geqslant t_0.$$

故有

$$x'(t)\geqslant\left(\frac{1}{a(t)}\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{c^{1/\beta}(s)}\right)^{1/\alpha}L_2^{1/(\alpha\beta)}x(t),\qquad t\geqslant t_0.\tag{9}$$

从 t_0 到 $\tau(t)\geqslant t_0$ 对上式积分,注意到 $L_2x(t)$ 非增,得到

$$x(\tau(t))\geqslant\int_{t_0}^{\tau(t)}\left(\frac{1}{a(s)}\int_{t_0}^{s}\frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\mathrm{d}sL_2^{1/(\alpha\beta)}x(\tau(t)).\tag{10}$$

在方程(E)中利用式(1)和式(10)产生

$$\begin{aligned}-L_3x(t)&=q(t)f(x(\tau(t)))\geqslant\\&q(t)f\left(\int_{t_0}^{\tau(t)}\left(\frac{1}{a(s)}\int_{t_0}^{s}\frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\mathrm{d}s\right)f(L_2^{1/(\alpha\beta)}x(\tau(t)))\equiv\\&Q_1(t)f(L_2^{1/(\alpha\beta)}x(\tau(t))),\qquad t\geqslant t_1.\end{aligned}$$

令 $y(t)=L_2x(t)$, 上式成为

$$-y'(t)\geqslant Q_1(t)f(y^{1/(\alpha\beta)}(\tau(t))),\qquad t\geqslant t_1.\tag{11}$$

对式(11)积分,注意到 $y(t)>0,t\geqslant t_1$, 有

$$y(t)\geqslant\int_{t}^{\infty}Q_1(s)f(y^{1/(\alpha\beta)}(\tau(s)))\mathrm{d}s,\qquad t\geqslant t_1.$$

显然, $y(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上单调减少. 因此,由文献[15]的定理1知,方程(8)存在收敛到0的正解. 此与假设矛盾. 定理2证毕.

定理2有下面的推论.

推论1 设

$$\frac{f(y^{1/(\alpha\beta)})}{y} \geqslant 1, \qquad y \neq 0, \tag{12}$$

且

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\tau(t)}^{t} Q_1(s)\,\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}}, \tag{13}$$

则方程(E)无A型解.

2 方程(E)不存在B型解的条件

定理3 设存在函数 $\xi(t) \in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$,使得 $\xi'(t) \geqslant 0, \tau(t) < \xi(t) < t, t \geqslant t_0$,若式(12)成立,且

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{\xi(t)}^{t} q(s) f\left(\int_{\tau(s)}^{\xi(s)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right) f\left(\left(\int_{\xi(s)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}s > 1, \tag{14}$$

则方程(E)无B型解.

证明 设 $x(t)$ 是方程(E)的B型正解,则存在 $t_1 \geqslant t_0$,使当 $t \geqslant t_1$ 时式(4)成立.对 $t \geqslant s \geqslant t_1$,有

$$x(t) - x(s) = \int_s^t \frac{a^{1/\alpha}(u)x'(u)}{a^{1/\alpha}(u)}\mathrm{d}u.$$

注意到 $L_1x(t)$ 是增函数,得到

$$x(s) \geqslant (-L_1^{1/\alpha}x(t))\int_s^t \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}.$$

用 $\tau(t)$ 和 $\xi(t)$ 分别代替 s 和 t,产生

$$x(\tau(t)) \geqslant (-L_1^{1/\alpha}x(\xi(t)))\int_{\tau(t)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}, \qquad t \geqslant t_2 \geqslant t_1. \tag{15}$$

利用式(15),令 $y(t) = -L_1x(t)$,则由方程(E),得到

$$(c(t)(y'(t))^{\beta})' - q(t) f\left(\int_{\tau(t)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right) f(y^{1/\alpha}(\xi(t))) \geqslant 0, \qquad t \geqslant t_2. \tag{16}$$

显然,$y(t) > 0, y'(t) < 0, t \geqslant t_2$.令 $T \geqslant t_2$ 使得 $\inf_{t\geqslant T}\xi(t) \geqslant t_2$,有

$$y(\sigma) = y(\tau) - \int_\sigma^\tau \frac{(c(u)(y'(u))^{\beta})^{1/\beta}}{c^{1/\beta}(u)}\mathrm{d}u \geqslant$$

$$\int_\sigma^\tau \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}(c(\tau)(-y'(\tau))^{\beta})^{1/\beta}, \qquad \tau \geqslant \sigma \geqslant T. \tag{17}$$

在式(17)中用 $\xi(s)$ 和 $\xi(t)$ 分别代替 σ 和 τ,得到

$$y(\xi(s)) \geqslant \int_{\xi(s)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}(c(\xi(t))(-y'(\xi(t)))^{\beta})^{1/\beta}, \qquad t \geqslant s \geqslant T. \tag{18}$$

令 $z(t) = c(t)(-y'(t))^{\beta}$,则式(16)和式(18)分别成为

$$-z'(t) \geqslant q(t) f\left(\int_{\tau(t)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right) f(y^{1/\alpha}(\xi(t))), \tag{16a}$$

$$y(\xi(s)) \geqslant \int_{\xi(s)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}(z(\xi(t)))^{1/\beta}. \tag{18a}$$

从 $\xi(t)$ 到 t 对式(16a)积分并利用式(18a),有

$$z(\xi(t)) - z(t) \geqslant \int_{\xi(t)}^{t} q(s) f\left(\int_{\tau(s)}^{\xi(s)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right) f\left(\left(\int_{\xi(s)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\right) f(z^{1/(\alpha\beta)}(\xi(t)))\,\mathrm{d}s,$$

因此

$$z(\xi(t)) \geqslant f(z^{1/(\alpha\beta)}(\xi(t)))\int_{\xi(t)}^{t} q(s)f\left(\int_{\tau(s)}^{\xi(s)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right)f\left(\left(\int_{\xi(s)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}s.$$

上式中利用式(12),得到

$$1 \geqslant \int_{\xi(t)}^{t} q(s)f\left(\int_{\tau(s)}^{\xi(s)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right)f\left(\left(\int_{\xi(s)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}s.$$

在上式中,令 $t \to \infty$ 取上极限得到的结果与式(14)矛盾. 定理 3 证毕.

令

$$Q_2(t) = q(t)f\left(\int_{\tau(t)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right)f\left(\left(\int_{\xi(t)}^{\eta(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\right), \tag{19}$$

其中函数 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的定义见定理 4.

定理 4 设存在两个非减函数 $\xi(t), \eta(t) \in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$,使得 $\tau(t) < \xi(t) < \eta(t) < t, t \geqslant t_0$, 若方程

$$z'(t) + Q_2(t)f(z^{1/(\alpha\beta)}(\eta(t))) = 0 \tag{20}$$

振动,则方程(E)无 B 型解.

证明 设 $x(t)$ 是方程(E)的 B 型正解. 同定理 3 的证明一样,我们得到式(15). 类似地,有

$$-L_1x(\xi(t)) \geqslant L_2^{1/\beta}x(\eta(t))\int_{\xi(t)}^{\eta(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}, \qquad t \geqslant t_2, \tag{21}$$

联合式(15)和式(21)产生

$$x(\tau(t)) \geqslant L_2^{1/\beta}x(\eta(t))\left(\int_{\tau(t)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right)\left(\int_{\xi(t)}^{\eta(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}, \qquad t \geqslant t_2. \tag{22}$$

在方程(E)中代入式(22),令 $y(t) = L_2x(t)$, 得到

$$y'(t) + q(t)f\left(\int_{\tau(t)}^{\xi(t)} \frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right)f\left(\left(\int_{\xi(t)}^{\eta(t)} \frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\right)f(y^{1/(\alpha\beta)}(\eta(t))) \leqslant 0, \qquad t \geqslant t_2.$$

利用式(19),上式成为

$$-y'(t) \geqslant Q_2(t)f(y^{1/(\alpha\beta)}(\eta(t))), \qquad t \geqslant t_2. \tag{23}$$

显然,式(23)同式(11),证明剩下部分是类似的,在此略去. 定理 4 证毕.

推论 2 设式(12)成立,且

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{\eta(t)}^{t} Q_2(s)\,\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}},$$

则方程(E)无 B 型解.

3 方程(E)振动的条件

定理 5 设存在非减函数 $\xi(t) \in C([t_0,\infty),\mathbf{R})$,使得 $\tau(t) < \xi(t) < t, t \geqslant t_0$, 若条件(5)、(12)和(14)成立,则方程(E)振动.

证明 设 $x(t)$ 是方程(E)的非振动解,不妨设 $x(t) > 0, t \geqslant t_0 > 0$,则 $x(t)$ 或者是 A 型,或者是 B 型. 因条件(5)成立,故 $x(t)$ 不可能是方程(E)的 A 型解. 又因条件(12)和(14)成立,故 $x(t)$ 也不是(E)的 B 型解. 矛盾. 因此, $x(t)$ 振动. 定理 5 证毕.

定理 6 设存在两个非减函数 $\xi(t), \eta(t) \in C([t_0,\infty),\boldsymbol{R})$,使得 $\tau(t) < \xi(t) < \eta(t) < t, t \geqslant t_0$, 若一阶时滞微分方程(8)和(20)均为振动,则方程(E)振动.

证明 由定理 2 和定理 4 即得定理 6 的结论.

当 $f(u)=u^{\delta}$ 时,方程(E)成为

$$(c(t)[a(t)((x'(t))^{\alpha})']^{\beta})'+q(t)x^{\delta}(\tau(t))=0,\qquad t\geqslant t_0,\tag{E3}$$

其中,δ 是两个正奇整数之比,则定理 6 有如下推论:

推论 3 设一阶时滞微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+q(t)\left(\int_{t_0}^{\tau(t)}\left(\frac{1}{a(s)}\int_{t_0}^{s}\frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{1/\alpha}\mathrm{d}s\right)^{\delta}y^{\delta/(\alpha\beta)}(\tau(t))=0$$

和

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+q(t)\left(\int_{\tau(t)}^{\xi(t)}\frac{\mathrm{d}u}{a^{1/\alpha}(u)}\right)^{\delta}\left(\int_{\xi(t)}^{\eta(t)}\frac{\mathrm{d}u}{c^{1/\beta}(u)}\right)^{\delta/\alpha}z^{\delta/(\alpha\beta)}(\eta(t))=0$$

均为振动,其中 $\xi(t)$,$\eta(t)$ 由定理 6 定义,则方程(E3)振动.

例 考虑三阶时滞微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^{\alpha}\right)^{\beta}+q(t)x^{\delta}(t-3\sqrt{t})=0,\qquad t>9,\tag{E4}$$

其中,$q(t)\in C([t_0,\infty),\mathbf{R}^{+})$,$\alpha$,$\beta$ 和 δ 均为两个正奇整数之比. 此时,$\tau(t)=t-3\sqrt{t}$, 故本文取 $\xi(t)=t-2\sqrt{t}$,$\eta(t)=t-\sqrt{t}$. 由推论 3 知,若一阶时滞微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\delta}q(t)\ (\tau(t))^{(1+\alpha)\delta/\alpha}\ y^{\delta/(\alpha\beta)}(\tau(t))=0$$

和

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+q(t)(\xi(t)-\tau(t))^{\delta}(\eta(t)-\xi(t))^{\delta/\alpha}z^{\delta/(\alpha\beta)}(\eta(t))=0$$

均为振动,则方程(E4)振动.

4 结 语

讨论了一类三阶非线性时滞微分方程的振动性问题, 利用适当的比较定理, 建立了判别该类方程振动的若干新的充分条件. 所得结果充分反映了时滞在方程振动中的影响作用, 这是一个重要的结论. 所得定理为解决交通工具设计、机械设计和高层建筑的抗风、抗震设计、混沌理论及非线性动力学等实际问题提供了数学理论基础.

参考文献(References):

[1] Schot S H. Jerk: the time rate of change of acceleration[J]. *Am J Phys*, 1978, **46**(11): 1090-1094.

[2] 罗李平, 俞元洪. 三阶半线性中立型微分方程的振动结果[J]. 系统科学与数学, 2012, **32**(5): 571-579. (LUO Li-ping, YU Yuan-hong. Oscillation results of third order half linear neutral differential equations[J]. *J Sys Sci & Math Scis*, 2012, **32**(5): 571-579. (in Chinese))

[3] Aktas M F, Tiryaki A, Zafer A. Oscillation criteria for third order nonlinear functional differential equations[J]. *Appl Math Letters*, 2010, **23**(7): 756-762.

[4] Aktas M F, Tiryaki A, Zafer A. Integral criteria for oscillation of third order nonlinear differential equations[J]. *Nonl Anal*, 2009, **71**(12): 1496-1502.

[5] Grace S R, Agarwal R P, Pavani R, Thandapani E. On the oscillation of certain third order nonlinear functional differential equations[J]. *Appl Math Comput*, 2008, **202**(1): 102-112.

[6] Grace S R, Agarwal R P , Aktas M F. On the oscillation of third order functional differential equations[J]. *Indian J Pure Appl Math*, 2008, **39**(4): 491-507.

[7] Tiryaki A, Aktas M F. Oscillation criteria of a certain class of third order nonlinear delay differential equations with damping[J]. *J Math Anal Appl*, 2007, **325**(1): 54-68.

[8] Saker S H. Oscillation criteria of third order nonlinear delay differential equations[J]. *Math Slovaca*, 2006, **56**(4): 433-450.

[9] Li T, Thandapani E. Oscillation of solutions to odd-order nonlinear neutral functional differential equations[J]. *Electron J Diff Equs*, 2011, **2011**(23): 1-12.

[10] Liu Z, Chen L, Kang S M, Cho S Y. Existence of nonoscillatory solutions for a third-order nonlinear neutral delay differential equation[J]. *Abstract and Applied Analysis*, Vol **2011**, Article ID 693890, 23 pages, 2011. doi:10.1155/2011/693890.

[11] Thandapani E, Li T. On the oscillation of third order quasilinear neutral functional differential equations[J]. *Archivum Mathematicum*, 2011, **47**(2): 181-199.

[12] Baculíková B, Džurina J. Oscillation of third-order functional differential equations[J]. *EJQTDE*, 2010(43): 1-10.

[13] Baculíková B, Džurina J. Oscillation of third-order nonlinear differential equations[J]. *Appl Math Letters*, 2011, **24**(4): 466-470.

[14] 高正晖, 罗李平. 含分布时滞与阻尼项的三阶非线性微分方程的 Philos 型振动[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, **48**(4): 85-90. (GAO Zheng-hui, LUO Li-ping. Philos-type oscillation criteria for third-order nonlinear functional differential equations with distributed delays and damped terms[J]. *Journal of Shandong University*(*Natural Science*), 2013, **48**(4): 85-90. (in Chinese))

[15] Philos Ch G. On the existence of nonoscillatory solutions tending to zero at ∞ for differential equations with positive delays[J]. *Archivum Mathematicum*, 1981, **36**(1): 168-178.

New Criteria for Oscillation of Third Order Nonlinear Delay Differential Equations

LUO Li-ping[1], YU Yuan-hong[2], ZENG Yun-hui[1]

(1. *Department of Mathematics and Computational Science*, *Hengyang Normal University*, *Hengyang*, *Hunan* 421002, *P. R. China*;

2. *Academy of Mathematics and Systems Science*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100190, *P. R. China*)

Abstract: Oscillatory problems of a class of third order nonlinear delay differential equations were studied. With the techniques of operator and integral, the determinant conditions in which such equations had not A-type solution (or B-type solution) were given. Further, several new sufficient conditions for oscillation of such equations were obtained via suitable comparison theorems. Obtained results generalize and improve some known results of the latest literature and fully reflect the influence action of delay in equation oscillation. The main results are illustrated by some examples.

Key words: third order; delay differential equation; A-type solution; B-type solution; comparison theorem; oscillation criterion; nonlinear