文章编号:1000-0887(2013)09-0995-08

构造 Birkhoff 函数(组)的参数调节法*

宋 端[1], 刘 畅[2], 郭永新[2,3]

(1. 辽东学院 影像物理教研室,辽宁 丹东 118001;
2. 辽宁大学 物理学院,沈阳 110036;
3. 辽东学院 机电工程系,辽宁 丹东 118001)

(我刊编委陈立群推荐)

摘要: 根据偏微分方程的 Cauchy-Kovalevski 可积性定理,将欠定的 Birkhoff 方程组转化为以 Birkhoff 函数组为未知变量的完备的偏微分方程组,提出了构造 Birkhoff 动力学函数的参数调节法。通过调节补偿方程中的两类可调的函数参数就能得到不同的 Birkhoff 函数组。并把构造 Birkhoff 函数组的参数调节法与 Santilli 构造方法进行了比较,例如研究了利用动力学系统独立的第一积分构造 Birkhoff 函数组的 Hojman 方法与参数调节法之间的关系。最后,给出应用实例验证了参数调节法的实用性及其与 Santilli 3 种构造方法的关系。

关 键 词: Birkhoff 方程; Cauchy-Kovalevski 定理; 自伴随微分方程; 参数调节法

中图分类号: O316 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j. issn. 1000-0887. 2013. 09. 013

引 言

众所周知,任何局域、解析、正规、完整的有限维动力学系统都可以实现自伴随的 Birkhoff 表示。Birkhoff 动力学系统的重要理论意义在于它的几何结构是一般辛结构[1-7],尽管不是像 Hamilton 系统那样具有简单辛结构。任意满足局域、解析、正规和完整的非齐次 Hamliton 系统都具有一般辛结构(即具有闭的、非退化的斜变 2-形式)[8-14],并且非齐次 Hamliton 动力学系统的非保守性隐含在其自伴随表示的一般辛结构中[7,13]。由于自洽的 Birkhoff 系统还具有 Lie 代数结构,所以只有 Birkhoff 系统才具有自伴随性、辛几何结构和 Lie 代数特性共生的性质[7,14],并且尽可能保持了与 Hamilton 系统的相似性。从而也使得 Birkhoff 系统与 Hamilton 系统具有相似的全局表示。但是,由于 Birkhoff 方程的一般辛结构对 Birkhoff 函数组的依赖性,就导致 Birkhoff 向量场在 $2n$ 维余切丛上的局域表示——Birkhoff 方程要比相空间中的 Hamilton 方程复杂,因为 Hamilton 系统的简单辛结构与 Hamilton 函数之间是相互独立的。所以,如何根据动力学系统的物理意义或者其运动微分方程的数学特征尽可能简单地构造出动力学系统的 Birkhoff 函数组就成为 Birkhoff 力学研究最艰巨的任务之一。

目前已经存在的 3 种构造动力学系统 Birkhoff 函数组的方法分别是:利用 Cauchy-Kova-

* **收稿日期:** 2013-07-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11172120;11202090;10932002)
作者简介: 宋端(1962—),女,辽宁丹东人,副教授;
郭永新(1963—),男,辽宁东港人,教授(通讯作者. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn).

levski 可积性定理的构造方法(Santilli 第一方法)、利用积分因子的自伴随化构造方法(Santilli 第二方法)以及借助于第一积分的 Hojman 构造方法(Santilli 第三方法)[2-3]. 由于 Birkhoff 方程是欠定的(因为 $2n$ 个方程中含有 $2n+1$ 个未知函数),因此利用上述 3 种方法构造动力学系统的 Birkhoff 函数组时会得到无数多组解[2,7]. 为了能够从 $2n$ 个 Birkhoff 方程中得到确定的解,必须补充一个新方程到 $2n$ 个 Birkhoff 方程中,添加这个补偿方程的基本原则就是使之与 $2n$ 个 Birkhoff 方程一起成为一个包含 $2n+1$ 个完备的偏微分方程的方程组,并且确保这 $2n+1$ 个方程在 Cauchy-Kovalevski 定理下是可积的. 本文的第 1 节,从一组完备的 Cauchy-Kovalevski 型偏微分方程组出发,得到了由 $2n$ 个 Birkhoff 方程和一个包含两类解析可调参数的补偿方程. 本文第 2 节,讨论了参数调节法与构造 Birkhoff 函数组的 Santilli 方法之间的关系. 第 3 节给出应用实例验证了参数调节法的实用性以及两点说明.

1　构造 Birkhoff 函数组的参数调节法

在接触流形 $R\times TQ$ 或 $R\times T^*Q$ 上的某一完整动力学系统,其局域坐标为 $\{q^i,\dot q^i\}$(或 $\{q^i,p_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$),其中 Q 是 n 维位形流形. 若此系统的动力学函数是正规的 Lagrange 函数 $L(t,q,\dot q)$ 或 Hamilton 函数 $H(t,q,p)$, 并且系统受到的具有解析性的非保守力为 $f_i(t,q,\dot q)$ 或 $F(t,q,p)$, 则一般的完整系统都可以用非齐次的 Euler-Lagrange 方程表示为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}-\frac{\partial L}{\partial q^i}=f^i(t,q,\dot q),\tag{1}$$

或者非齐次的 Hamilton 方程表示为

$$\dot q^i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot p_i=-\frac{\partial H}{\partial q^i}+F_i(t,q,p).\tag{2}$$

若将 $\{q^i,\dot q^i\}$ 或 $\{q^i,p_i\}$ 用统一的变量 $\{a^I\}$ $(I=1,2,\cdots,2n)$ 表示,则在局部坐标为 $\{t,a^\mu\}$ $(\mu=1,2,\cdots,2n)$ 的接触流形 $R\times TQ$ 或 $R\times T^*Q$ 上,式(1)和(2)总可以降阶为 $2n$ 个 1 阶微分方程组

$$\dot a^I=\Xi^I(t,a^J),\qquad I,J=1,2,\cdots,2n,\tag{3}$$

其中函数 $\Xi^I(t,a^J)$ 在正规点的邻域内是解析的. 一般来说,方程(3)是非自伴随的,但根据 Cauchy-Kowalevski 定理易证方程(3)总能变换为等价的自伴随形式

$$\left[\frac{\partial R_J(t,a)}{\partial a^I}-\frac{\partial R_I(t,a)}{\partial a^J}\right]\dot a^J-\left(\frac{\partial R_I(t,a)}{\partial t}+\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^I}\right)=0,\tag{4}$$

其中辛矩阵为

$$\Omega_{IJ}=\frac{\partial R_J}{\partial a^I}-\frac{\partial R_I}{\partial a^J}.\tag{5}$$

方程(4)就是 Birkhoff 方程. 如果不预先设定 Birkhoff 函数 B 为系统的总能量,则方程(4)是欠定的. 因此,方程(3)有无数多组等价的自伴随 Birkhoff 表示[2]. 一般来说,构造动力学方程(3)自伴随 Birkhoff 表示的 Birkhoff 函数组 $\{R_I,-B\}$ 是非常困难的. 因此,寻找 Birkhoff 函数组 $\{R_I,-B\}$ 最好的方法并不是直接令 Birkhoff 函数 B 为系统的总能量,而是保留 Birkhoff 函数 B 的任意性,当得到一组 Birkhoff 函数组 $\{R_I,-B\}$ 后,总可以利用规范变换

$$R_I(t,a)\to R_I'(t,a)=R_I(t,a)+\frac{\partial G(t,a)}{\partial a^I},\tag{6a}$$

$$B(t,a)\to B'(t,a)=B(t,a)-\frac{\partial G(t,a)}{\partial t}.\tag{6b}$$

将该组 Birkhoff 函数组 $\{R_I, -B\}$ 转化为另外一组新的 Birkhoff 函数组 $\{R_I', -B'\}$，并使得新的 Birkhoff 函数 B' 为系统的总能量.

Birkhoff 力学的一个基本问题就是对于给定的动力学系统(3)，如何构造出其自伴随表示的 Birkhoff 函数组 $\{R_I, -B\}$. 但是，到目前为止还没有一种直接从动力学系统的 1 阶微分方程组(3)就可以构造出其自伴随的 Birkhoff 表示的方法. 为此，如果在方程(4)中用动力学函数 $\Xi^I(t,a^J)$ 代替 $\dot{a}^I$ 可以得到

$$\left[\frac{\partial R_J(t,a)}{\partial a^I} - \frac{\partial R_I(t,a)}{\partial a^J}\right]\Xi^J(t,a) - \left(\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^I} + \frac{\partial R_I(t,a)}{\partial t}\right) = 0. \tag{7}$$

利用偏微分方程的 Cauchy-Kovalevski 可积性定理就可以得到一个补偿方程，使之与式(7)一起组成关于未知量 $\{R_I, -B\}$ 的完备的偏微分方程组.

Cauchy-Kovalevski 定理 考虑由 $n+1$ 个标准的 Cauchy-Kovalevski 形式的 1 阶偏微分方程组所构成的初值问题：

$$\frac{\partial R_\alpha(t,a)}{\partial t} = f^\alpha\left(t, a^l, \frac{\partial R_\alpha(t,a)}{\partial a^l}\right) \qquad (l = 1,2,\cdots,m), \tag{8}$$

其中，$R_\alpha(t,a)\,(\alpha = 0,1,2,\cdots,M)$ 是 $M+1$ 个未知函数，$(t,a^l)\,(l=0,1,2,\cdots,m)$ 是 $m+1$ 个独立变量，并且给定 $M+1$ 个初始条件：

$$R_\alpha(0,a^1,a^2,\cdots,a^m) = R_\alpha(a^1,a^2,\cdots,a^m). \tag{9}$$

如果微分方程(8)和初始值 $R_\alpha(a)$ 在正规点 $A(a)$ 的邻域内都是实解析的，那么初值问题(8)和(9)在正规点 $A(a)$ 的邻域上就存在唯一一组解析解 $R_0, R_1, \cdots, R_M$.

可以证明，由微分方程及适当的初值条件所构成的初值问题都可以化为等价的 1 阶拟线性微分方程初值问题. 因此，上面提到的初值问题结合给定的初值条件(9)可以化成 1 阶微分方程的初值问题[15]：

$$\frac{\partial R_\alpha(t,a^l)}{\partial t} = \sum_{\beta=0}^{M}\sum_{J=1}^{m}\Xi_\alpha^{J\beta}(t,a^l)\,\frac{\partial R_\beta(t,a^l)}{\partial a^J}. \tag{10}$$

为了得到动力学系统的一般辛几何结构，不妨令 $M = m = 2n$，独立变量由 (t,a^l) 变为 (t,a^I)，并假设 $R_0 = -B$，$\Xi_J^{I\beta} = 2\delta_J^{[I}\Xi^{\beta]} = \delta_J^I\Xi^\beta - \delta_J^\beta\Xi^I$（其中 $\Xi^0 = 1$，$\Xi_J^{I0} = \delta_J^I\,(I,J = 1,2,\cdots,2n)$），则方程(10)可以退化为

$$\frac{\partial R_I(t,a)}{\partial t} = \left[\frac{\partial R_J(t,a)}{\partial a^I} - \frac{\partial R_I(t,a)}{\partial a^J}\right]\Xi^J(t,a) - \frac{\partial B(t,a)}{\partial a^I}, \tag{11a}$$

$$\frac{\partial B(t,a)}{\partial t} = \Xi_0^{I0}\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^I} - \Xi_0^{IJ}\frac{\partial R_J(t,a)}{\partial a^I}. \tag{11b}$$

由已知函数 $\Xi^J(t,a)$ 以及待定函数参数 $\Xi_0^{I0}(t,a)$ 和 $\Xi_0^{IJ}(t,a)$ 的值，根据 Cauchy-Kovalevski 定理就可以唯一确定方程组(11)的解 $\{R_I, -B\}$. 然而，对于确定的解析函数 $\Xi^J(t,a)$，通过选取不同的函数参数 $\Xi_0^{I0}(t,a)$ 和 $\Xi_0^{IJ}(t,a)$ 的值，就会得到方程组(11)的不同解 $\{R_I, -B\}$. 一般情况下，这样得到的解并不具有物理意义. 显然，如果遗漏了方程(11b)，则关于未知量 $\{R_I, -B\}$ 的偏微分方程组(11a)是欠定的，所以会得到无数多组解 $\{R_I, -B\}$. 如果把 Birkhoff 函数确定为系统的总能量，则方程组(11a)就成为关于未知量 R_I 的完备方程组，此时能够得到唯一确定的解 R_I.

如果将函数参数 $\Xi^J(t,a)$ 取为动力学系统的向量场，即令 $\dot{a}^I = \Xi^I(t,a)$ 时，方程(11)就成为 Birkhoff 方程(4). 在方程组(11)中，若不取 Birkhoff 函数为系统的总能量，则 1 阶动力学微

分方程(3)的 Birkhoff 形式(4)或欠定的方程组(7)可以通过与方程(11b)联立而组成完备的偏微分方程组.

2 参数调节法与 Santilli 方法的关系

根据 Cauchy-Kovalevski 可积性定理,从上节中的方程组(11)知,对于给定的动力学函数 $\Xi^I(t,a)$,通过调节方程(11b)中的函数参数 Ξ_0^{I0} 和 Ξ_0^{IJ},就可以得到不同的 Birkhoff 函数组,这将有助于加深对 Santilli 构造方法[2,7]的理解.下面将具体讨论参数调节法与已有构造方法之间的关系.

参数调节法与 Santilli 第一方法的关系 若取 Birkhoff 函数 $B(t,a)$ 为动力学系统的总能量,则方程组(11a)是关于未知函数 $R_I(t,a)$ 的完备组

$$\frac{\partial R_I(t,a)}{\partial t}=\left[\frac{\partial R_J(t,a)}{\partial a^I}-\frac{\partial R_I(t,a)}{\partial a^J}\right]\Xi^J(t,a)-\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^I}. \tag{12}$$

由偏微分方程的 Cauchy-Kovalevski 可积性定理可知其解是唯一的.此时,方程(11b)是多余的.

参数调节法与 Santilli 第二方法的关系 当通过自伴随积分因子将系统的1阶微分方程组(3)转化为自伴随形式时,其 Birkhoff 函数组就可由 Santilli 第二方法构造.若方程(3)有协变自伴随形式

$$\Omega_{IJ}\dot a^j+\Gamma_I(t,a)=0, \tag{13}$$

由此可得 Birkhoff 函数组为

$$R_I(t,a)=\left[\int_0^1\tau\Omega_{IJ}(t,\tau a)\mathrm{d}\tau\right]a^J, \tag{14a}$$

$$B(t,a)=-\left[\int_0^1\left(\Gamma_I+\frac{\partial R_I}{\partial t}\right)(t,\tau a)\mathrm{d}\tau\right]a^I. \tag{14b}$$

利用参数调节法,理论上通过选择不同的解析函数参数 Ξ_0^{I0} 和 Ξ_0^{IJ} 就可以得到与动力学系统的1阶运动微分方程(3)的不同的 Birkhoff 函数组 $\{R_I,-B\}$.将方程组(11a)中的 $\Xi^J(t,a)$ 用 $\dot a^J$ 代替,则方程组(11a)成为自伴随的 Birkhoff 方程(4),并且辛矩阵 $\Omega_{IJ}(t,a)$ 和向量函数 $\Gamma_I(t,a)$ 可以定义为

$$\frac{\partial R_J}{\partial a^I}-\frac{\partial R_I}{\partial a^J}\triangleq\Omega_{IJ}(t,a),\quad\frac{\partial R_I(t,a)}{\partial t}-\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^I}\triangleq-\Gamma_I(t,a). \tag{15}$$

由此可知 Santilli 第二方法式(14)自然成立.因此,Santilli 第二方法可以看作是参数调节法的一个平凡结果,但这并不是说 Santilli 第二方法不重要,该方法在实际应用中也很有用.事实上,只有在很特殊的情况下才能找到合适的参数使得构造的 Birkhoff 函数组与利用 Santilli 第二方法构造的 Birkhoff 函数组是一致的.

参数调节法与 Santilli 第三方法的关系 若给定的动力学系统(3)是完全可积的,并且可求得系统的 $2n$ 个独立的第一积分 $\mathcal{I}^K(K=1,2,\cdots,2n)$,如果能够构造解析函数 $G_K(\mathcal{I})(K=1,2,\cdots,2n)$,那么就可以在流形 M 上构造闭的斜变2-形式 Ω,为

$$\Omega=\mathrm{d}G_K\wedge\mathrm{d}\mathcal{I}^K. \tag{16}$$

则可得给定动力学系统的全局表示为

$$i_\xi\Omega=0, \tag{17}$$

其中 $\xi=\partial/\partial t+\dot a^I(\partial/\partial a^I)$,并且动力学系统的局域自伴随形式为

$$\left(\frac{\partial G_K}{\partial a^I}\frac{\partial\mathcal{I}^K}{\partial a^J}-\frac{\partial G_K}{\partial a^J}\frac{\partial\mathcal{I}^K}{\partial a^I}\right)\dot a^J-\left(\frac{\partial G_K}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{I}^K}{\partial a^I}-\frac{\partial G_K}{\partial a^I}\frac{\partial\mathcal{I}^K}{\partial t}\right)=0, \tag{18}$$

由此可得

$$R_I = G_K \frac{\partial \mathcal{I}^K}{\partial a^I},\ B = -G_K \frac{\partial \mathcal{I}^K}{\partial t},\tag{19}$$

式(18)就称为 Santilli 第三方法. 理论上,利用参数调节法可以构造出完全可积动力学系统(3)的无数多组解,而 Santilli 第三方法式(19)仅是其中一种. 在式(19)中,尽管 Birkhoff 函数不明显地依赖于式(11b)中的函数参数 Ξ_0^{I0} 和 Ξ_0^{IJ},但是从第 1 节中可知,不论动力学系统是否具有对称性,方程组(11)的解 $\{R_\alpha, -B\}$ 总需要由 3 个参数函数 Ξ^I,Ξ_0^{I0} 和 Ξ_0^{IJ} 唯一确定. 因此,即使是具有对称性的动力学系统如果仅用动力学函数作为参数也不能唯一确定系统的 Birkhoff 函数组. 根据式(19)可知,完全可积动力学系统的 Birkhoff 函数组是由独立的第一积分和任意的函数 $G_K(\mathcal{I}^J)$ 决定的,但是函数 $G_K(\mathcal{I}^J)$ 必须满足正规性条件

$$\det\left(\frac{\partial G_\mu}{\partial \mathcal{I}^\nu} - \frac{\partial G_\nu}{\partial \mathcal{I}^\mu}\right) \neq 0.\tag{20}$$

如果要唯一的确定完全可积动力学系统自伴随 Birkhoff 表示的一组解 $\{R_I, -B\}$, 只要将如下方程作为方程(11b)的补充即可:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Xi_0^{I0}\frac{\partial}{\partial a^I}\right)\left(G_K\frac{\partial \mathcal{I}^K}{\partial t}\right) = \Xi_0^{IJ}\frac{\partial}{\partial a^I}\left(G_K\frac{\partial \mathcal{I}^K}{\partial a^J}\right).\tag{21}$$

3 应用举例与讨论

下面给出一些应用实例来说明构造 Birkhoff 函数组的参数调节法与 Santilli 的 3 种构造方法之间的关系.

例 3.1 考虑 Hénon-Heils 系统,其运动微分方程为

$$\ddot{x} = -x - 2xy,\ \ddot{y} = -y + y^2 - x^2.\tag{22}$$

令 $a^1 = x, a^2 = y, a^3 = \dot{x}, a^4 = \dot{y}$, 则 2 阶微分方程组(22)可降阶为 1 阶微分方程组

$$\dot{a}^1 = a^3,\ \dot{a}^2 = a^4,\ \dot{a}^3 = -a^1 - 2a^1a^2,\ \dot{a}^4 = -a^2 + (a^2)^2 - (a^1)^2.$$

取 Birkhoff 函数 $B(t,a)$ 为系统的总能量,即

$$B = \frac{1}{2}\left[(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2 + 2a^2(a^1)^2 - \frac{2}{3}(a^2)^3\right],$$

利用方程(12)可得 Birkhoff 函数组 $R_I(t,a)$ 为

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ R_3 = -a^1,\ R_4 = -a^2.$$

因此,系统的 Birkhoff 表示为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \\ \dot{a}^3 \\ \dot{a}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 + 2a^2a^1 \\ a^2 + (a^1)^2 - (a^2)^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{pmatrix}.\tag{23}$$

例 3.2 线性阻尼振子系统的运动微分方程为

$$\ddot{x} + x + \gamma\dot{x} = 0,\qquad \gamma = \mathrm{const}.\tag{24}$$

令 $a^1 = x, a^2 = \dot{x}$,则方程(24)可改写为

$$\dot{a}^1 = a^2,\ \dot{a}^2 = -a^1 - \gamma a^2.$$

显然,已知动力学函数 $\Xi^1 = a^2, \Xi^2 = -a^1 - \gamma a^2$, 如果选择适当的参数

$$\Xi_0^{10} = \frac{1}{2}\gamma a^1,\ \Xi_0^{20} = \frac{1}{2}\gamma a^2,\ \Xi_0^{11} = \Xi_0^{12} = \Xi_0^{21} = \Xi_0^{22} = 0,$$

则由方程组(11)可得

$$B = \frac{1}{2} e^{\gamma t} [(a^1)^2 + (a^2)^2 + \gamma a^1 a^2],$$

$$R_1 = \frac{1}{2} e^{\gamma t} a^2,\ R_2 = - \frac{1}{2} e^{\gamma t} a^1.$$

由此计算可得 $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 0, \Omega_{21} = -\Omega_{12} = e^{\gamma t}$, 容易验证此 Birkhoff 函数组 $\{R_I, -B\}$ 满足关系式(14). 而这恰好与先用自伴随因子 $h_{11} = h_{22} = 0, h_{21} = -h_{12} = e^{\gamma t}$ 将系统自伴随化为

$$-e^{\gamma t}\dot{a}^2 - e^{\gamma t}(a^2\gamma + a^1) = 0,$$

$$e^{\gamma t}\dot{a}^1 - e^{\gamma t}a^2 = 0,$$

然后,再利用 Santilli 第二方法计算 $\{R_I, -B\}$ 所得到的结果一致. 事实上,上式恰好就是对应于线性阻尼振子的 Birkhoff 方程.

例 3.3 Hojman-Urrutia 系统是本质非自伴随系统,其 2 阶运动微分方程为

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0,\ \ddot{y} + y = 0. \tag{25}$$

令 $a^1 = x, a^2 = y, a^3 = \dot{x}, a^4 = \dot{y}$, 则方程(25)可降阶为 1 阶微分方程

$$\dot{a}^1 = a^3,\ \dot{a}^2 = a^4,\ \dot{a}^3 = -a^4,\ \dot{a}^4 = -a^2.$$

容易求得 Hojman-Urrutia 系统的 4 个独立的第一积分分别为

$$\mathscr{I}^1 = a^2 \cos t - a^4 \sin t,\ \mathscr{I}^2 = a^2 \sin t + a^4 \cos t,$$

$$\mathscr{I}^3 = a^2 + a^3,\ \mathscr{I}^4 = a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t.$$

若取规范函数 $G_K(\mathscr{I}^J)$ 为

$$G_1 = \mathscr{I}^2,\ G_2 = 0,\ G_3 = \mathscr{I}^4,\ G_4 = 0,$$

由式(19)可以唯一确定 Hojman-Urrutia 系统的 Birkhoff 函数组 $\{R_I, -B\}$ 为

$$R_1 = 0,$$

$$R_2 = a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t + (a^2 \sin t + a^4 \cos t)\cos t,$$

$$R_3 = a^1 - a^4 - (a^2 + a^3)t,$$

$$R_4 = -(a^2 \sin t + a^4 \cos t)\sin t,$$

$$B = (a^2 \sin t + a^4 \cos t)^2.$$

这一结果也可以通过适当调节方程组(11)中的参数函数 Ξ_0^{I0} 和 Ξ_0^{IJ} 得到,即取

$$\Xi_0^{10} = -a^3,\ \Xi_0^{20} = -a^4,\ \Xi_0^{30} = a^1,\ \Xi_0^{40} = a^2,$$

$$\Xi_0^{14} = \Xi_0^{41} = \Xi_0^{31} = \Xi_0^{34} = 0,\ \Xi_0^{12} = -\Xi_0^{21} = 2t,$$

$$\Xi_0^{11} = \Xi_0^{22} = \Xi_0^{33} = \Xi_0^{44} = \Xi_0^{13} = \Xi_0^{43} = \Xi_0^{23} = -\Xi_0^{32} = \Xi_0^{24} = -\Xi_0^{42} = 1.$$

参数调节法与 Santilli 第三方法之间的一致性是由关系式(21)保证的. 实际上,在关系式(21)中只要通过调节参数 Ξ_0^{I0} 和 Ξ_0^{IJ},就可以得到预先给定的函数 $G_1 \sim G_4$ 以及 Birkhoff 函数组 R_1, R_2, R_3, R_4, B.

最后,对构造 Birkhoff 函数组的参数调节法做如下两点说明:首先,通过引入含有可调函数参数 Ξ_0^{I0} 和 Ξ_0^{IJ} 的补偿方程(11b),得到求解 Birkhoff 函数组 $\{R_I, -B\}$ 的完备方程组(11). 此外,还可以通过建立函数参数 Ξ_0^{I0} 和 Ξ_0^{IJ} 之间的关系来进一步简化参数调节法,使得函数参数与 Birkhoff 函数组之间的关系更加明显,这将在我们下一篇研究论文中会有体现. 其次,上面所举的例子并不是系统 Birkhoff 化所需的最终结果,而只是用来说明参数调节法的应用,要得到方程组(11)的最终结果还需要做规范变换(6)使得 Birkhoff 函数 B 是系统的总能量.

本文主要从讨论完备的方程组(11)在 Cauchy-Kovalevski 定理下是可积的角度,来讨论参

数调节法与动力学系统的 Birkhoff 函数组之间的关系。期望在以后的工作中能够找到更直接有效的方法来求解方程组(11)。

参考文献(References):

[1] Birkhoff G D. *Dynamical Systems*[M]. New York: AMS College Publishers Providence, RI, Vol **9**, 1927.

[2] Santilli R M. *Foundations of Theoretical Mechanics II*[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[3] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬. Birkhoff 系统动力学[M]. 北京:北京理工大学出版社, 1996.(MEI Feng-xiang, SHI Rong-chang, ZHANG Yong-fa, WU Hui-bin. *Dynamics of Birkhoffian Systems*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996. (in Chinese))

[4] Hojman S. Construction of genotypic transformations for first order systems of differential equations[J]. *Hadronic J*, 1981, **5**: 174-184.

[5] Ionescu D. A geometric Birkhoffian formalism for nonlinear RLC networks[J]. *J Geom Phys*, 2006, **56**(12): 2545-2572.

[6] Ionescu D, Scheurle J. Birkhoffian formulation of the dynamics of LC circuits[J]. *Z angew Math Phys*, 2007, **58**(2): 175-208.

[7] GUO Yong-xin, LIU Chang, LIU Shi-xing. Generalized Birkhoffian realization of nonholonomic systems[J]. *Communications in Mathematics*, 2010, **18**(1): 21-35.

[8] LIU Shi-xing, LIU Chang, GUO Yong-xin. Geometric formulations and variational integrators of discrete autonomous Birkhoff systems[J]. *Chin Phys B*, 2011, **20**(3): 034501.

[9] Sun Y J, Shang Z J. Structure-preserving algorithms for Birkhoffian systems[J]. *Phys Lett A*, 2005, **336**(4/5): 358-369.

[10] Van der Schaft A J, Maschke B M. On the Hamiltonian formulation of nonholonomic mechanical systems[J]. *Rep Math Phys*, 1994, **34**(2): 225-233.

[11] Bloch A M, Fernandez O E, Mestdag T. Hamiltonization of nonholonomic systems and the inverse problem of the calculus of variations[J]. *Rep Math Phys*, 2009, **63**(2): 225-249.

[12] LIU Chang, LIU Shi-xing, GUO Yong-xin. Inverse problem for Chaplygin's nonholonomic systems[J]. *Sci China Tech Sci*, 2011, **54**(8): 2100-2106.

[13] 刘畅, 宋端, 刘世兴, 郭永新. 非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 表示[J]. 中国科学:物理学 力学 天文学, 2013, **43**(4): 541-548. (LIU Chang, SONG Duan, LIU Shi-xing, GUO Yong-xin. Birkhoffian representation of non-homogenous Hamiltonian systems[J]. *Sci Sin Phys Mech Astron*, 2013, **43**(4): 541-548. (in Chinese))

[14] Guo Y X, Luo S K, Shang M, Mei F X. Birkhoffian formulation of nonholonomic constrained systems[J]. *Rep Math Phys*, 2001, **47**(3): 313-322.

[15] Courant R, Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics II*[M]. New York: Interscience Publishers, 1966.

Parameter-Adjusting Method of Constructing Birkhoffian Functions

SONG Duan[1], LIU Chang[2], GUO Yong-xin[2,3]

(1. *Department of Imaging Physics*, *Eastern Liaoning University*, *Dandong*, *Liaoning* 118001, *P. R. China*;

2. *College of Physics*, *Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *P. R. China*;

3. *School of Mechanical and Electrical Engineering*, *Eastern Liaoning University*, *Dandong*, *Liaoning* 118001, *P. R. China*)

(Recommended by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The parameter-adjusting method to construct dynamical functions of Birkhoff's equations is put forward based on realizing the completeness of Birkhoff's equations, which are under-determinate, by means of Cauchy-Kovalevski integrability theorem for partial differential equations. The two kinds of parameters in the compensatory equation were capable of adjusting to get different sets of Birkhoffian functions. The existing methods, such as Hojman's method using $2n$ first integrals for dynamical systems with symmetry, were compared with the parameter-adjusting method. Finally, The compensatory equation for the Birkhoff's equations can be simplified by means of some limitations on the two kinds of parameters, where the relation between the Birkhoffian functions and parameters become more evident.

Key words: Birkhoff's equations; Cauchy-Kovalevski theorem; self-adjoint differential equations; parameter-adjusting method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11172120; 11202090; 10932002)