

物体垂直出入水的非定常空泡数学模型*

陈玮琪¹, 王宝寿¹, 颜开¹, 鲁海燕²

(1. 中国船舶科学研究中心, 江苏 无锡 214082;

2. 江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 研究了物体从水下向水面高速运动产生的非定常垂直空泡,建立了出水垂直空泡的数学模型,得到了匀速、空泡压力不变条件下的空泡外形、长度、体积随水深变化的解析解,给出了出气空泡发展为超空泡的条件.利用类似的方法建立了水平空泡和入水空泡的数学模型,并对3种空泡进行了比较研究.比较研究的结论是,随物体距水面的水深减小,出水空泡体积自身有增大趋势,空泡不容易发生泄气现象.且要保持出水空泡压力不变,空泡内的气体含量就应该增加(可通过人工通气方式).入水空泡正好相反,随物体入水深度增加,空泡体积自身有收缩的趋势,并挤压空泡内的气体从环境压力较低的空泡尾部喷射而出,导致空泡内的气体含量减少,空泡压力降低.但是当空泡压力低于环境压力后,空泡尾部又将被环境高压所封闭,气体喷射不出来.随着入水深度继续增加,空泡尾部将重复上述过程,形成周期性的喷射-封闭-喷射-封闭的脉动过程,这个脉动喷射过程将在空泡尾部的流体中形成一连串小气泡,并由于空泡内的压力波动而导致空泡形状发生波动现象.

关键词: 空泡; 出水; 入水

中图分类号: O35; TV131.3⁺2 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.11.002

引言

通气超空泡是水下航行体的重要减阻技术之一,因此目前得到了广泛的研究^[1].出于应用需求,目前研究最多的是航行体在水下以水平方向航行产生的超空泡,超空泡的轴线基本上呈水平方向,因此这里称为水平空泡.重力对水平空泡的形态有特殊影响,它不仅会导致超空泡水平轴线沿尾部逐渐向上偏移,而且还导致超空泡末端产生双涡管泄气模式^[2].Savchenko等利用扰动方法研究了水平超空泡在重力流体中的变形^[3-4].在实际工程计算中,利用动量原理也能给出水平超空泡轴线变形的一阶估计^[5,2].与水平空泡相对应,物体在水下垂直运动产生的空泡轴线是垂直的,因此称为垂直空泡(见图1).垂直空泡分两种:一种是物体从大气垂直入水产生的空泡,称为入水垂直空泡;一种是物体从水下朝水面垂直运动产生的空泡,称为出水垂直空泡.垂直空泡在鱼雷入水、导弹出水等方面经常出现,因此研究垂直空泡有重要意义.

* 收稿日期: 2013-05-20; 修订日期: 2013-06-25

基金项目: 水动力学重点实验室基金资助项目(9140C220204110C2203);中国国家留学基金资助项目(2009832228)

作者简介: 陈玮琪(1971—),男,湖南人,高级工程师,博士(通讯作者. E-mail: tiger_cwq@aliyun.com).

重力对于入水空泡形态的影响,主要体现在随着物体入水深度的加大,空泡在重力流体的压力下会发生深闭合,并且在空泡表面形成波动.入水空泡深闭合的研究可参考文献[6],入水空泡表面波动的内容可参考文献[7-8].Bergmann等^[9]专门研究了圆平板入水空泡试验现象,通过忽略轴向流动,将入水空泡问题简化为空泡横截平面上的准二维流动,建立了描述入水空泡半径变化的简化动力学模型,并详细讨论了模型中的参数取值问题,但他的模型只研究了空泡闭合之前的物理过程,对空泡闭合之后的变化没有讨论,也没有给出不同水深条件下空泡外形变化公式.与入水空泡相反,研究重力流体中物体出水空泡的公开文献并不多见,近期重要的研究工作见鲁传敬、李杰利用二维流动假设建立的空泡出水溃灭力学模型^[10],研究了空泡出水溃灭过程的形态变化;王一伟、黄晨光等基于数值模拟方法研究了出水空泡,给出了空泡形态在出水过程中的变化规律^[11].

有界水面对出、入水空泡也有影响,这是因为当物体运动时,其空化面到水面的距离是不断变化的,由此导致空化面所在位置的流体静压也不固定,从而导致空泡是非定常的,即使物体速度是匀速的情形下也是如此.Vasin^[6]利用空泡截面独立膨胀原理^[5],建立了无界重力流体中向下向流(或向上向流)绕过静止空化器产生的垂直空泡的计算模型.在这个计算模型中,空化器所在位置的静压是固定的,因此空泡是定常的,显然这不符合有限水深中运动空化器表面静压在时刻变化的情形.

计及重力流体中有限水深的影响,作者在文献[12]中以影响水动力性能的空泡长度的变化作为研究对象,在空泡截面独立膨胀原理^[5]基础上,建立了有限水深重力流体中出水空泡长度变化的数学模型并给出了解析解.本文采用类似方法,改以水下空泡截面面积变化作为研究对象,建立了有限水深重力流体中的垂直空泡形态变化的数学模型,并基于数学模型比较了入水空泡、出水空泡及水平空泡的特征.

1 出水垂直空泡的数学模型

依据前述,有限水深重力流体中的空泡可分为最简单的3种:水平空泡、入水垂直空泡和出水垂直空泡(斜入水或斜出水空泡暂不讨论).图1中圆柱体的3种运动方向产生了上述3个不同方向空泡.

图1中圆柱体(a)的速度朝下,产生的是入水空泡,圆柱体(b)的速度朝上,产生的是出水空泡,圆柱体(c)的速度是水平方向,产生的是水平空泡,图中3个圆柱体的空化器都处在同一水深 x 位置上.现在以沿空泡轴线的空泡横截面面积作为关键特征,建立垂直空泡的动力学模型.

为简化问题,设空泡尾部闭合在与空化器同直径的圆柱体上.圆柱体的前端面是空化器,设其面积为 $S_0 = \pi R^2$, R 为空化器半径.设空泡压力为 p_c (空泡不一定是自然空泡,可以由通气产生的),水面大气压为 p_0 ,重力加速度为 g ,水密度为 ρ ,空化器阻力系数为 C_x ,运动速度为 $V(t)$,空泡长度为 L ,当强调 L 是空化器在水深 x 位置时的空泡长度时, L 也记为 $L(x)$.在本文中,为方便理论求解,只讨论空泡压力 $p_c = \text{const}$ 且 $V = \text{const}$ 的情形,并忽略自由面的变形效应.

现在考虑在 t 时刻(此时物体距离水面的深度为 x)的空泡形态(见图2).取沿空泡轴线到空化器的距离为 h 的空泡截面作为研究对象,显然, h 截面的水深为 $(x+h)$.根据空泡截面独立膨胀原理,这个 h 截面在后续时刻将一直在这个深度的无限水平面上膨胀而不受其他上下截面的影响.设 t 时刻 h 截面的面积为 $S(h,t)$,根据空泡截面独立膨胀原理,水下固定水深位置 $(x+h)$ 的空泡截面面积的微分方程为^[6]

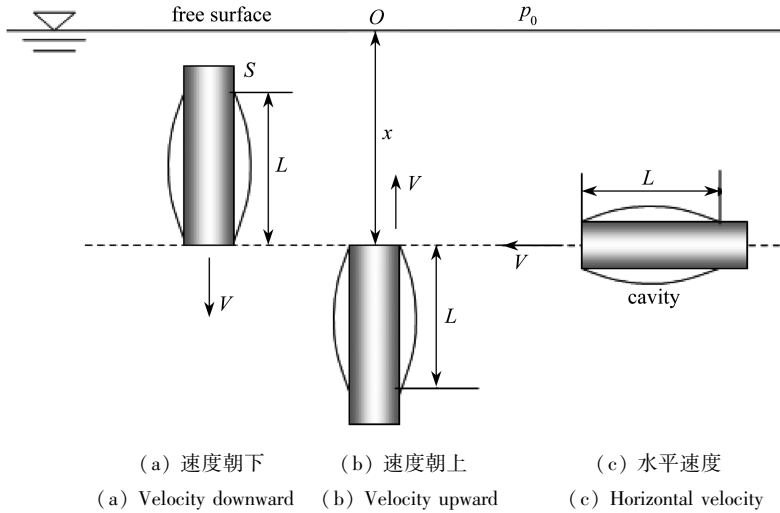


图1 重力流体中的水平空泡、垂直空泡示意图

Fig.1 Schematic of vertical cavity and horizontal cavity in gravity fluid

$$\ddot{S}(x+h, t) = -k \frac{p_0 + \rho g(x+h) - p_c}{\rho}, \quad \dot{S}_0 = \frac{2\pi C_x R' V(0)}{a}, \quad k = \frac{4\pi C_x}{a^2}, \quad (1)$$

其中, a 为某一经验常数. 对方程(1)积分两次就可得到出水垂直空泡截面面积计算公式:

$$S(h, t) = S_0 + \dot{S}_0(t - t_1) - k \int_{t_1}^t \int_{t_1}^t \frac{p_0 + \rho g(x+h) - p_c}{\rho} dt dt, \quad (2)$$

其中, t_1 表示空泡截面 h 开始形成的初始时刻, x 是 t 时刻空化面的水深, 显然在 t 时刻有关系式 $x(t_1) = x + h, h = V(t - t_1)$.

因此当物体速度 $V = \text{const}$ 时, 有 $t_1 = t - h/V$, 于是上式可改为

$$\frac{2\pi}{k} \frac{S(h, t) - S_0}{S_0} = a \frac{h}{R'} - \left(\frac{p_0 - p_c}{\rho V^2} \right) \frac{h^2}{R'^2} - \frac{gR'}{V^2} \frac{(x+h)}{R'} \frac{h^2}{R'^2}. \quad (3)$$

令 $\Delta \bar{S}_1(\bar{h}, \bar{x}) = (S(h, t) - S_0)/S_0$ 表示不同空泡截面面积的相对大小, 整理成无量纲形式:

$$\frac{2\pi}{k} \Delta \bar{S}_1(\bar{h}, \bar{x}) = \bar{h} \left[a - \left(\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\bar{x}}{Fr^2} \right) \bar{h} \right] - \frac{\bar{h}^3}{Fr^2}, \quad (4)$$

其中, Fr 为 Froude 数,

$$\sigma_0 = \frac{p_0 - p_c}{\rho V^2/2}, \quad Fr = \frac{V}{\sqrt{R'g}}, \quad \bar{x} = \frac{x}{R'}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R'}, \quad \bar{L} = \frac{L}{R'}.$$

式(4)描述了空化器在水深 \bar{x} 位置时, 空泡截面 \bar{h} 的截面面积. 显然 $0 \leq \bar{h} \leq \bar{L}(\bar{x})$.

由式(4)可以求出空泡长度 $\bar{L}(\bar{x})$ 的表达式. 因为在空泡末端 $\bar{L}(\bar{x})$ 空泡闭合在圆柱体上, 因此有 $S(L, t) = S_0$, 即有 $\Delta \bar{S}_1(\bar{L}, \bar{x}) = 0$ (见图2), 代入式(4)得到

$$\left[a - \left(\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\bar{x}}{Fr^2} \right) \bar{L} \right] - \frac{\bar{L}^2}{Fr^2} = 0. \quad (5)$$

式(5)是一个关于空泡长度 \bar{L} 的二次方程, 它有两个解, 其中一个有意义的解为

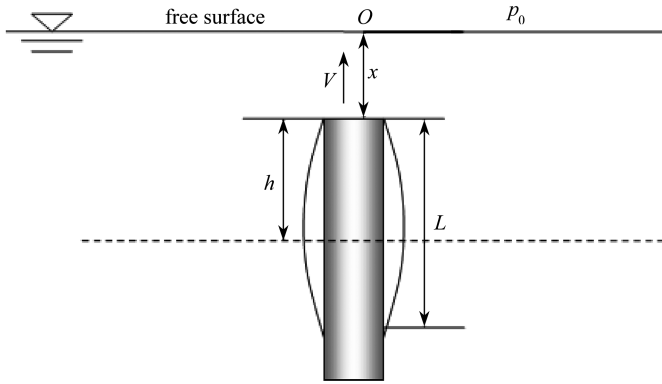


图2 固定水深位置的空泡截面面积变化

Fig.2 Change of cavity cross section area at fixed water depth

$$\bar{L}(\bar{x}) = \frac{4aFr^2}{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x}) + \sqrt{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x})^2 + 16aFr^2}}. \quad (6)$$

式(6)就是描述物体空化面不出水面时的垂直空泡长度 $\bar{L}(\bar{x})$ 随水深 \bar{x} 变化的计算公式,文献[11]中对式(6)进行了试验验证,因此不再重复(当物体空化面出水面之后的空泡长度变化,也请参考文献[11]).显然利用式(4)不难计算出空泡的外形,对空泡外形计算的试验验证将在下一节的入水空泡外形计算中进行.

由式(4)和(6)可得到水深 \bar{x} 处的空泡体积 W_1 :

$$W_1(\bar{x}) = \int_0^{\bar{L}} \Delta \bar{S}_1(\bar{h}, \bar{x}) d\bar{h} = \frac{k}{12\pi} \bar{L}^2 \left(a + \frac{1}{2} \frac{\bar{L}^2}{Fr^2} \right). \quad (7)$$

注意,从式(3)或(4)的表达式可看出,空泡体积 W_1 中不包括包含在空泡内的圆柱体体积,以下类同.

从式(6)、(7)可看出,随着物体朝水面运动时的水深 \bar{x} 减小,出水垂直空泡的空泡长度和体积都在增大.这从式(4)也能直接看出来,随着水深 \bar{x} 减小,空泡每一个截面的面积都在扩大,且空泡长度在增加,因此体积必然也是增大.

需要注意的是, $\Delta \bar{S}_1(\bar{L}, \bar{x}) = 0$ 仅表示空泡闭合在圆柱体上,如果空泡长度超过圆柱体,闭合在流体中,可认为闭合位置的空泡截面面积为0,因此 $\Delta \bar{S}_1(\bar{L}, \bar{x}) = -1$, 这样空泡长度满足的方程为

$$\bar{L} \left[a - \left(\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\bar{x}}{Fr^2} \right) \bar{L} \right] - \frac{\bar{L}^3}{Fr^2} + \frac{2\pi}{k} = 0. \quad (8)$$

这是个三次多项式,求解出来即得到长度公式,三次多项式的解析公式比较复杂,因此本文略.

2 入水垂直空泡的数学模型

Bergmann 等在数值模拟的基础上建立了入水空泡模型^[9], Vasin 则利用空泡截面独立膨胀原理^[5]建立了物体斜入水的空泡模型^[6], 仔细对比可以看出,两种方法在力学上的假设本质上是一致的.下面的方法也是基于空泡截面独立膨胀原理,但建模过程与 Vasin 的方法有所

不同。

参见图1圆柱体(a)的空泡,利用与第1节完全相同的方法可得到入水垂直空泡截面面积公式:

$$\frac{2\pi}{k}\Delta\bar{S}_2(\bar{h},\bar{x}) = \bar{h}\left[a - \left(\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\bar{x}}{Fr^2}\right)\bar{h}\right] + \frac{\bar{h}^3}{Fr^2}. \quad (9)$$

由条件 $\Delta\bar{S}_2(\bar{h},\bar{x}) = 0$ 可得到垂直入水空泡长度 \bar{L} 的二次多项式方程:

$$2\bar{L}^2 - \bar{L}(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x}) + 2aFr^2 = 0. \quad (10)$$

方程(10)的解有两个:

$$\bar{L}(\bar{x}) = \frac{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x}) \pm \sqrt{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x})^2 - 16aFr^2}}{4}. \quad (11)$$

这两个解都大于0,其含义将在后面讨论,这里先讨论根号内的项的含义.显然,要使式(11)具有实际物理意义,其根号内的项必须是非负的,即

$$(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x})^2 - 16aFr^2 \geq 0. \quad (12)$$

整理得到水深 \bar{x} 的条件式:

$$\bar{x} \geq 2\sqrt{a}Fr - \frac{1}{2}\sigma_0 Fr^2 = \bar{x}_{\min}. \quad (13)$$

式(13)有明确的物理意义,因为空泡长度 \bar{L} 及方程(9)只有在空泡末端已经闭合在圆柱体上时才有意义,所以式(13)的意义是,当入水空泡已经闭合在圆柱体上时,物体的入水深度 \bar{x} 至少要大于 \bar{x}_{\min} ,这说明 \bar{x}_{\min} 就是空泡深闭合的入水深度,见图3.

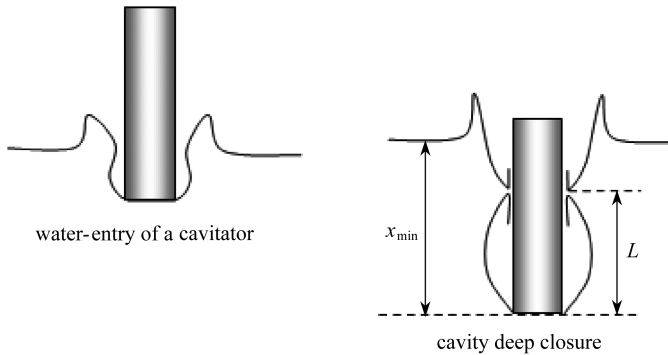


图3 空化器入水空泡深闭合

Fig.3 Deep closure of cavity after water-entry

在实际入水问题中,空泡在闭合前与水面大气相通,空泡内压力等于外界大气压 $p_c = p_0$, 即有 $\sigma_0 = 0$, 代入式(13)得到入水垂直空泡深闭合的入水深度为

$$\bar{x}_{\min} = 2\sqrt{a}Fr. \quad (14)$$

式(14)与文献[6]给出的结果相同(注意,文献[6]定义的 $Fr = V^2/R'g$).

又因为从物体入水到空泡闭合的时间间隔为 $t_{\min} = x_{\min}/V$,将之代入式(14),立刻就有 $t_{\min} = 2\sqrt{aR'/g}$,它表明闭合时间与入水速度无关!这与 Bergmann 等给出的结论是相同的^[9].

当入水深度 $\bar{x} \geq \bar{x}_{\min}$ 时,式(10)有两个根,但是从试验中可发现,随着入水深度越深,水压力越大,空泡长度应该缩短,因此只有其中一个根有物理意义,即

$$\bar{L}(\bar{x}) = \frac{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x}) - \sqrt{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x})^2 - 16aFr^2}}{4}. \quad (15)$$

当 $\sigma_0 = 0$ 时, 将式(14) 中的 \bar{x}_{\min} 代入式(15) 可计算出空泡深闭合时的空泡长度与入水深度的关系:

$$\bar{x}_{\min} = 2\bar{L}(\bar{x}_{\min}) = 2\sqrt{a}Fr. \quad (16)$$

即入水深度正好是闭合空泡长度的 2 倍(如果空泡闭合在流体中, 其值显然略比 2 大, 试验值是 2.1), 这与 Bergmann 等根据试验和数值模拟给出的结论是相同的^[9].

类似地, 当 $\bar{x} \geq \bar{x}_{\min}$ 时, 可得到不同水深 \bar{x} 位置入水垂直空泡体积 W_2 :

$$W_2(\bar{x}) = \frac{k}{12\pi} \bar{L}^2 \left(a + \frac{7}{2} \frac{\bar{L}^2}{Fr^2} \right). \quad (17)$$

从式(15)、(17) 可看出, 随着入水深度增加, 空泡长度在缩短, 体积也在缩小, 特别是当 $\bar{x} = \bar{x}_{\min}$ 时, 将式(16) 代入式(17) 得到空泡初始闭合的体积为

$$W_2(\bar{x}_{\min}) = \frac{k}{12\pi} \frac{9}{2} a^2 Fr^2 = \frac{3}{2} C_x Fr^2. \quad (18)$$

如果将圆柱体体积包含在空泡体积内, 则上式再加上 $\bar{L} \cdot \bar{S}_0 = \pi\sqrt{a}Fr$, 即

$$W_2(\bar{x}_{\min}) = \left(\pi\sqrt{a} + \frac{3}{2} C_x Fr \right) Fr. \quad (19)$$

上式表明, 入水空泡体积与阻力系数 C_x 和 Fr^2 成正比, 这符合物理直观.

如引言所述, Bergmann 等进行了控制圆盘入水的试验^[9], 建立了入水空泡的简化模型, 获得了空泡闭合深度 \bar{x}_{\min} 与 Froude 数 Fr 之间的定性关系 $\bar{x}_{\min} \propto Fr$, 以及闭合时刻的空泡体积与 Fr 的关系 $W_2(\bar{x}_{\min}) \propto (1 + 0.26Fr) Fr$. 与空泡闭合深度公式(14) 及闭合空泡体积公式(19) 的对比可看出, 本文给出关系与 Bergmann 等给出的关系是一致的, 而且本文给出的是解析表达式. 当然, Bergmann 等研究的空泡是闭合在流体中, 这与本文研究的空泡闭合在圆柱体上略有区别.

利用 Bergmann 等的试验, 可以对本文建立的空泡截面面积公式(9) 进行检验. 首先根据试验条件由式(9) 计算出入水空泡外形, 然后将计算的结果与 Bergmann 等的试验照片进行比较. Bergmann 等的试验参数是: 圆盘半径 $R' = 30$ mm, 控制圆盘以匀速入水, 入水速度分别为 $V = 0.5$ m/s, 1 m/s, 2 m/s, 对应的 Froude 数 $Fr^2 = 0.85, 3.4, 13.6$. 空泡内压力等于外界大气压 $p_c = p_0$. 将这些试验参数分别代入式(9), 分别取 $a = 0.85, 1, 1$ (a 根据经验或具体试验确定), 计算出入水空泡外形, 计算结果与试验照片的对比见图 4(试验照片取自文献[9]). 图中的(a)、(b)、(c) 分别对应速度 $V = 0.5$ m/s, 1 m/s, 2 m/s, 计算的外形用黑点虚线表示.

从计算结果与试验照片的对比来看, 对入水速度较小的空泡外形计算得较好, 入水速度较大的情况下, 计算的空泡外形在靠近水面及颈部收缩的地方误差比较大, 这是因为模型中没有考虑自由面变形和垂直方向的流动, 再者, 空泡截面独立膨胀原理比较适合细长体外形的空泡, 所以在以上地方误差较大. 但总体来看, 式(9) 基本上抓住了入水空泡的主要物理特征. 图中空泡边缘的白线是 Bergmann 等利用边界元数值模拟的入水空泡的外形, 边界元的计算结果与试验图像吻合得非常好. 但是相对于边界元法, 利用式(9) ~ (19) 进行工程计算或机理分析要简单得多, 而且给出的主要物理特征也与 Bergmann 等的研究结果相同^[9], 因此基于本文建立的数学模型来分析出入水空泡的关键特征是合理的.

需要说明的是,在出入水垂直空泡问题中,系数 a 只是近似常数,严格来说,它与水深 \bar{x} , Fr 及自由面效应有关.分析表明: $a \propto Fr^2/\bar{x}$,且当 Fr 越大, a 就越接近于常数.在 Bergmann 等的模型中也有类似于 a 的参数,Bergman 等利用边界元数值模拟结果拟合出参数的取值,然后再代入模型中进行计算,这种拟合得到的参数使得模型计算结果很精确.参照 Bergman 的研究方法可对 a 进行类似研究.有关系数 a 的详细分析及空泡外形的精确计算方法不是本文研究的重点,这里不再讨论.相比 Bergmann 等的模型,本文模型主要适用于 Fr 较大且空泡闭合在圆柱体上之后的空泡.空泡闭合在流体中的精确过程可参考 Bergmann 等的研究^[9].

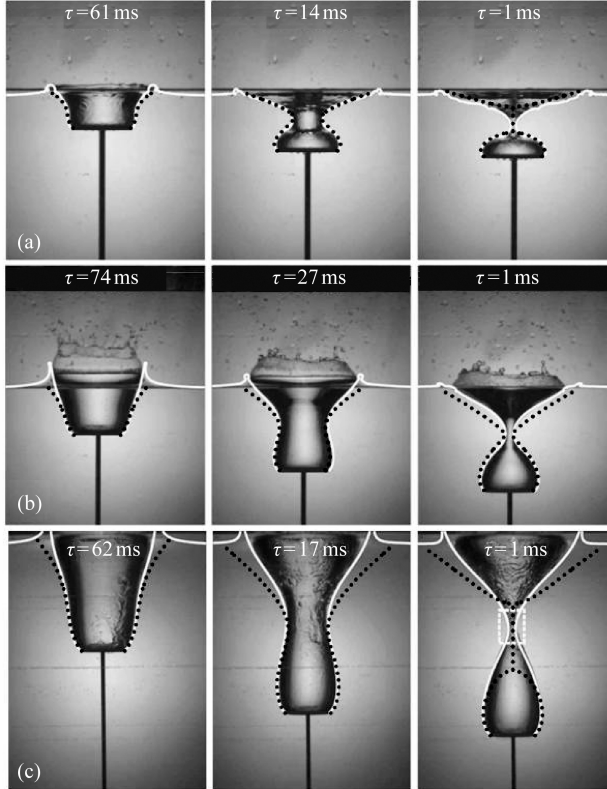


图4 入水空泡外形计算结果(黑点虚线)与试验照片对比

Fig.4 Comparison of the calculation profile (dotted line) with experimental photograph of cavity

3 水平空泡的数学模型

为了方便进行对比,用类似的方法可得到水深 \bar{x} 位置的水平空泡截面面积公式(其中, \bar{x} 相对空泡直径足够大以至于可忽略自由面变形和空泡截面本身的变形):

$$\frac{2\pi}{k} \Delta \bar{S}_0(\bar{h}, \bar{x}) = \bar{h} \left[a - \left(\frac{\sigma_0}{2} + \frac{\bar{x}}{Fr^2} \right) \bar{h} \right]. \quad (20)$$

水平空泡长度为

$$\bar{L}(\bar{x}) = \frac{4aFr^2}{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x}) + \sqrt{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x})^2}} = \frac{2aFr^2}{(\sigma_0 Fr^2 + 2\bar{x})}; \quad (21)$$

水平空泡体积为

$$W_0(\bar{x}) = \frac{k}{12\pi} \bar{L}^2 \left(a + 2 \frac{\bar{L}^2}{Fr^2} \right). \quad (22)$$

对于水平空泡而言,水深 \bar{x} 保持不变,因此空泡长度和体积都不会发生变化,空泡是定常的.基于空泡截面独立膨胀原理对水平空泡外形的研究及试验验证在相关文献中已经有很多,这里不再赘述.

4 形成超空泡的条件

当空泡发展到能包裹住物体就成为超空泡,因此当空泡长度等于物体长度时,就认为是空泡发展为超空泡的临界条件.根据空泡长度解析式可得出垂直空泡发展为超空泡的条件.

设圆柱体长度为 L_b ($\bar{L}_b = L_b/R'$),当出水垂直空泡发展为超空泡 $\bar{L}(\bar{x}) \geq \bar{L}_b$ 时,有

$$\sigma_0 \leq 2 \left(\frac{a}{\bar{L}_b} - \frac{\bar{x}}{Fr^2} \right) - 2 \frac{\bar{L}_b}{Fr^2} = \sigma_1. \quad (23)$$

取等号时有 $\bar{L}(\bar{x}) = \bar{L}_b$,此时的 σ_1 称为临界空化数.特别是当 $\bar{x} = 0$,即空化器到达水面时空泡为超空泡的条件为

$$\sigma_0 = 2 \left(\frac{a}{\bar{L}_b} - \frac{\bar{L}_b}{Fr^2} \right). \quad (24)$$

其有量纲形式为

$$V = \sqrt{\frac{(p_0 + \rho g L_b - p_c)}{\rho} \frac{L_b}{a R'}}. \quad (25)$$

式(25)给出了出水物体形成超空泡的条件.假设圆柱长度 $L_b = 1 \text{ m}$, $R' = 0.1 \text{ m}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $p_c = 0.05 \text{ MPa}$, $p_0 = 0.1 \text{ MPa}$,计算形成超空泡的出水速度为 $V \approx 20 \text{ m/s}$.如果要减少形成超空泡的出水速度,该式表明增大空化面半径或增大空泡压力都是有效手段.

类似地,入水垂直空泡形成超空泡的条件是

$$\sigma_0 \leq 2 \left(\frac{a}{\bar{L}_b} - \frac{\bar{x}}{Fr^2} \right) + 2 \frac{\bar{L}_b}{Fr^2} = \sigma_2 \quad (\bar{x} \geq \bar{x}_{\min}). \quad (26)$$

对于从大气入水的实际问题,即 $\sigma_0 = 0$ 时,可得到入水空泡发生深闭合即 $\bar{x} = \bar{x}_{\min}$ 的情况下,形成超空泡的条件是 $Fr \geq \bar{L}_b / \sqrt{a}$,即圆柱体入水速度必须满足 $V \geq L_b \sqrt{g/aR'}$.从中可看出,空化面面积越小,入水速度就应越大,因此如果物体头部的空化面面积较大,就能在较小速度下获得超空泡.

对于水平空泡发展为超空泡的条件是

$$\sigma_0 \leq 2 \left(\frac{a}{\bar{L}_b} - \frac{\bar{x}}{Fr^2} \right) = \sigma_0^*, \quad (27)$$

这里定义 σ_0^* 表示水平空泡形成超空泡的临界空化数,当 $\sigma_0 = \sigma_0^*$ 时空泡长度正好等于物体长度 $\bar{L}(\bar{x}) = \bar{L}_b$.

比较3个空泡的临界空泡数,可知 $\sigma_2 > \sigma_0^* > \sigma_1$,即出水空泡发展为超空泡的空化数要求更低,因此条件更苛刻,其次水平空泡,最容易的是入水空泡.

降低空化数的常用方法就是人工通气,通过通气提高空泡压力从而降低空化数.但是从式

(7) 可得知, 出水空泡体积自身将随出水深度的减少而不断扩大, 这就意味着要维持空泡压力不变, 就需要不断地对空泡进行通气. 如果通入的气体刚好填充了空泡体积增大的部分, 则空泡压力不会变化. 如果想提高空泡压力而加大通气气体流量, 也因部分通气气体用于填充空泡体积自身增大的部分, 所以空泡压力也提高的不大. 这说明对于出水空泡而言, 人工通气形成超空泡的难度较大.

从与水平空泡对比的角度可以说明这个问题. 如果速度相同, 水深相同, 要使出水空泡长度与水平空泡相同, 利用式(6)和式(21), 得到出水空泡压力 p_c 与水平空泡压力 p'_c 的关系为

$$p_c = p'_c + \rho g L. \quad (28)$$

类似地可得出出水空泡体积 W_1 与水平空泡体积 W_0 的关系式:

$$W_1 = W_0 + \frac{k}{24\pi} \frac{\bar{L}^4}{Fr^2}. \quad (29)$$

显然, 如果要达到相同空泡长度, 出水空泡的压力与体积都要大于水平空泡.

出水空泡体积自身增大的特点会有一个好处, 那就是出水空泡通气时不容易发生泄气, 因为人工通气的大部分气体可能用于填充空泡体积的增大部分, 而不是泄漏出去. 对于水平空泡, 空泡体积本身不会发生变化, 因此通入气体将主要用于提高压力, 如果通入气量与泄气量平衡, 空泡将维持不变. 对于入水空泡情况又是另一种复杂现象, 下面将详述.

5 入水空泡不稳定现象的机理

式(15)和(17)表明, 随着入水深度 \bar{x} 增加, 入水空泡体积和长度在压力作用下自身会发生收缩. 如果入水空泡内是弹性气体, 空泡体积的收缩将导致空泡内压力上升. 重要的是, 如果空泡持续收缩的压力上升到足够大, 以至于空泡压力大于空泡尾部相对较小的流体静压, 空泡内的气体将从空泡尾部喷射出来形成气体射流并产生气泡.

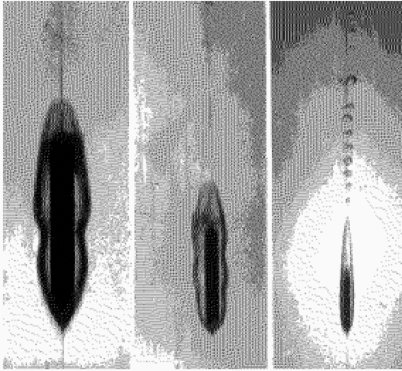


图5 从大气入水的空泡试验照片^[8]

Fig.5 Cavity photograph after water-entry from atmosphere

在气体射出后, 空泡内的气体总质量将减少, 泡内压力又开始下降. 当压力下降到低于空泡尾部环境压力, 空泡尾部又将在环境压力作用下封闭并停止喷射气体. 随着入水深度继续加大, 上述过程又将重复出现并持续很多次, 形成周期性的喷射-封闭-喷射-封闭过程, 由此将在空泡尾部形成一串小气泡; 同时, 由于空泡压力产生波动, 从而导致空泡面上的波动现象. 这些气泡和空泡表面波动现象都在试验中被发现^[8], 见图5.

从照片中还可发现, 空泡尾部的小气泡从上到下呈现出从大到小的分布特征, 利用入水空泡长度和体积公式(15)和(17)不难解释这种现象, 而且还可得出气泡大小及排列间隔与空泡表面的波动幅度及周期相对应. 限于篇幅, 不展开讨论.

6 结 论

本文建立了描述出入水垂直空泡关键特征的简化数学模型, 然后通过数学模型所反映的

一般性规律分析了出入水空泡的各种特性及物理现象的机理,解释了试验中观察到的入水空泡波动现象和小气泡生成机制,给出了匀速、定压条件下垂直空泡形态的解析解。有关入水空泡闭合之后的喷射-闭合-喷射周期性过程的动力学模型将在后续工作中完成。

参考文献(References):

- [1] Michel J M. Introduction to cavitation and supercavitation[R]. RTO AVT Lecture. Brussels, 2001.
- [2] Semenenko V N. Artificial supercavitation. physics and calculation[R]. RTO AVT Lecture. Brussels, 2001.
- [3] Savchenko Y N, Semenenko V N, Putilin S L. Unsteady supercavitated motion of bodies[J]. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, 2000, **37**(1): 109-137.
- [4] Savchenko Y N, Semenenko V N. The gas absorption into supercavity from liquid-gas bubble mixture[C]//*Proc Third Internal Symposium on Cavitation*. Vol 2. Grenoble, France, 1998: 49-53.
- [5] Logvinovich G V. *Hydrodynamics of Flows With Free Boundaries*[M]. Halsted Press, 1973.
- [6] Vasin A D. The principle of independence of the cavity sections expansion (Logvinovich's principle) as the basis for investigation on cavitation flows[R]. RTO AVT Lecture. Brussels, 2001.
- [7] Savchenko Y N, Semenenko V N. Wave formation on the boundaries of cavities forming at water entry of a disk and cones[C]//*Problems of High-Speed Fluid Mechanics*. Cheboksary: Chyvashi University Press, 1993: 231-239.
- [8] Semenenko V N. Dynamic processes of supercavitation and computer simulation[R]. RTO AVT Lecture. Brussels, 2001.
- [9] Bergmann R, Van der Meer D, Gekle S, Van der Bos A, Lohse D. Controlled impact of a disk on a water surface: cavity dynamics[J]. *J Fluid Mech*, 2009, **633**: 381-409.
- [10] 鲁传敬, 李杰. 水下航行体出水空泡溃灭过程及其特性研究[C]//第十一届全国水动力学学术会议暨第二十四届全国水动力学研讨会并周培源教授诞辰 110 周年纪念大会文集. 北京: 海洋出版社, 2012: 54-67. (LU Chuan-jing, LI Jie. Research on the cavity collapse of the exit-water body[C]//*Proceeding of the 11th National Congress on Hydrodynamics & 24th National Conference on Hydrodynamics and Commemoration of the 110th Anniversary of ZHOU Pei-guan's Birth*. Beijing: Ocean Press, 2012: 54-67. (in Chinese))
- [11] 王一伟, 黄晨光, 杜特专, 方新, 梁乃刚. 航行体垂直出水载荷与空泡溃灭机理分析[J]. 力学学报, 2012, **44**(1): 39-48. (WANG Yi-wei, Huang Chen-guang, DU Te-zhuan, FANG Xin, LI-ANG Nai-gang. Mechanism analysis about cavitation collapse load of underwater vehicles in a vertical launching process[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, **44**(1): 39-48. (in Chinese))
- [12] 陈玮琪, 王宝寿, 颜开, 易淑群. 空化器出水非正常垂直空泡的研究[J]. 力学学报, 2013, **45**(1): 76-82. (CHEN Wei-qi, WANG Bao-shou, YAN Kai, YI Shu-qun. Study on the unsteady vertical cavity of the exit-water cavitator[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, **45**(1): 76-82. (in Chinese))

Model of the Unsteady Vertical Water-Entry and Water-Exit Cavities

CHEN Wei-qi¹, WANG Bao-shou¹, YAN Kai¹, LU Hai-yan²

(1. *China Ship Scientific Research Center, Wuxi, Jiangsu 214082, P.R.China;*

2. *School of Science, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, P.R.China*)

Abstract: The unsteady vertical water-entry and water-exit cavities produced by a high-speed body were investigated theoretically, the mathematical models of the water-entry and water-exit cavities were proposed, and the solutions of the cavity shape varying with water depth were derived. Based on the solutions, the cavity length, cavity volume, closure depth of water-entry cavity and the condition for the formation of supercavity were obtained. The results show that the volume of the water-exit cavity increases with the reduction in water depth. Therefore, in order to maintain (or increase) the pressure of the water-exit cavity, more volume of gas injection is required in contrast to horizontal cavity, which also means that it is harder for the water-exit cavity to form supercavity, but simultaneously the advantage is that the water-exit cavity is hard to leak gas due to the increase in its volume. On the contrary, with the increase in water depth, the water-entry cavity has the tendency to shrink its volume, and squeeze gas within the cavity to jet out from the rear end of the cavity, with the gas reduction within cavity due to the gas jet, the pressure of the cavity will decrease, if the pressure falls below the environmental pressure, the rear end of the cavity will be closed by the environmental high-pressure, and thus the gas jet will terminate. As a result, a periodic impulsive process that consists of successive jetting-closure phases will be formed at the rear end of the cavity, resulting in the formation of a series of small bubbles in the wake of the cavity and wavelike fluctuations on the surface of the cavity due to the fluctuations of the pressure within the cavity.

Key words: cavity; water-exit; water-entry