

弹性约束浅拱的非线性动力响应与分岔分析*

易壮鹏¹, 张勇¹, 王连华²

(1. 长沙理工大学 土木与建筑学院, 长沙 410004;

2. 湖南大学 土木工程学院, 长沙 410082)

摘要: 浅拱采用竖向、转动方向弹性约束时,自振频率和模态与理想的铰支/固结边界存在差异,不同约束刚度将改变外激励下的非线性响应及各种分岔产生的参数域.由浅拱基本假定建立无量纲动力学方程,采用在频率和模态中考虑约束刚度大小的方法,通过 Galerkin 全离散和多尺度摄动分析导出极坐标、直角坐标形式的平均方程,其中方程系数与约束刚度一一对应.用数值方法分析了周期激励下竖向弹性约束系统最低两阶模态之间 1:2 内共振时的动力行为,所得结果与有限元的对比以及平均方程系数的收敛性证明了所采用方法是可行的.随着激励幅值、频率的变化存在若干分岔点,分岔发生时的参数分布与约束刚度值有关,在由分岔点连接的不稳定区或共振区附近,存在一系列稳态解、周期解、准周期解和混沌解窗口,且随参数的变化可观测到倍周期分岔.

关键词: 弹性约束; 浅拱; 1:2 内共振; 多尺度法; 分岔; 混沌

中图分类号: U311.2; O302 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.11.008

引 言

拱在土木、机械与航天航空等领域有广泛的应用,在低阻尼、轻质量的情况下外激励将引起结构大幅振动,甚至出现分岔和混沌.文献[1-4]对周期激励下两端铰支浅拱发生内共振时的分岔和混沌特性进行了研究;文献[5]则研究了一端铰支一端转动弹性约束曲梁的非线性相互作用;文献[6-7]研究了周期激励和水平参数激励联合作用下浅拱的非线性振动特性与分岔行为;文献[8]研究了弹性地基上集中移动荷载作用下浅拱的动力跳跃;文献[9]研究了两端竖向弹性约束浅拱在脉冲荷载作用下的动力屈曲特性.拱结构的精确动力分析在很多情况下需考虑复杂的边界,如系杆拱桥、弹性约束的机械拱臂/曲梁中,拱结构与相邻结构共同受力,基础变形引起的附加惯性力将对结构力学特性产生影响,此时,将其考虑为弹性约束更加合理.

本文针对两端均采用竖向、转动弹性约束浅拱,在系统的自振频率和模态中考虑弹性约束刚度大小,进而通过 Galerkin 全离散及多尺度摄动法^[10]得到平均方程.以 1:2 内共振为例,采用数值方法全面分析两端竖向弹性约束时系统的非线性响应和分岔特性.

* 收稿日期: 2013-07-05; 修订日期: 2013-08-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11002030; 11032004); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-09-0335)

作者简介: 易壮鹏(1979—),男,湖南长沙人,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: yizhuang-peng@163.com).

1 动力学方程与非线性模态

图 1 所示为直角坐标系 $\hat{O}-\hat{x}\hat{y}$ 下跨径为 \hat{l} 的两端弹性约束拱, 其中 \hat{k}_1, \hat{k}_2 为两端竖向支撑刚度, \hat{k}_3, \hat{k}_4 为两端转动支撑刚度, $\hat{\psi}(\hat{x})$ 为初始时刻的拱轴线形, 在 \hat{t} 时刻外荷载 $\hat{f}(\hat{x}, \hat{t})$ 作用下发生水平位移 $\hat{w}(\hat{x}, \hat{t})$ 和竖直位移 $\hat{u}(\hat{x}, \hat{t})$, 其动力学控制方程与边界条件可写为^[10]

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left\{ \left[(N_0 - EA)(1 - e) + \frac{EA}{\sqrt{1 + \hat{\psi}_x^2}} \right] \left(1 + \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right) \right\} = \rho A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left\{ \left[(N_0 - EA)(1 - e) + \frac{EA}{\sqrt{1 + \hat{\psi}_x^2}} \right] \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{d\hat{\psi}}{d\hat{x}} \right) \right\} = \rho A \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{t}^2} + EI \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial \hat{x}^4} + \hat{f}(\hat{x}, \hat{t}); \quad (1b)$$

$\hat{x} = 0$ 时,

$$EI \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{x}^3} + \hat{k}_1 \hat{u} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} - \hat{k}_3 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (2a)$$

$\hat{x} = \hat{l}$ 时,

$$EI \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{x}^3} - \hat{k}_2 \hat{u} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \hat{k}_4 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (2b)$$

上述式中 N_0 为初始轴向力; $e = \hat{w}_x - \hat{w}_x^2 + \hat{u}_x \hat{\psi}_x + \hat{u}_x^2/2 + \hat{\psi}_x^2/2$; E, ρ, A, I 分别为弹性模量、密度、截面积和惯性矩. 对于浅拱有基本假定: ① 平截面假定; ② 不考虑剪切变形和转动惯量; ③ 忽略纵向惯性; ④ 零初始轴力. 可知式(1a)右边与 N_0 均等于 0, 另外 $1/\sqrt{1 + \hat{\psi}_x^2} \approx 1 - \hat{\psi}_x^2/2$; 将这些条件与 e 代入式(1)中展开, 利用边界条件 $\hat{x} = 0, \hat{w} = 0$ 以及 $\hat{x} = \hat{l}, \hat{w} = 0$ 进行积分并忽略三阶以上的非线性项; 引入无量纲变量

$$\begin{cases} x = \frac{\hat{x}}{\hat{l}}, \quad u = \frac{\hat{u}}{r_x}, \quad w = \frac{\hat{w}}{r_x}, \quad \psi = \frac{\hat{\psi}}{r_x}, \quad t = \frac{\hat{t}}{(\rho A l^4 / EI)^{1/2}}, \\ k_i = \frac{\hat{k}_i l^3}{EI} \quad (i = 1, 2), \quad k_i = \frac{\hat{k}_i l}{EI} \quad (i = 3, 4), \end{cases} \quad (3)$$

其中 r_x 为转动半径, 动力学方程与边界条件可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \left(\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\psi}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \mu \frac{\partial u}{\partial t} - F \cos \Omega t; \quad (4)$$

$x = 0$ 时,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + k_1 u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k_3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5a)$$

$x = 1$ 时,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - k_2 u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_4 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5b)$$

式中 μ 为加入的阻尼系数, $F \cos \Omega t = (l^4 / EI r_x) \hat{f}(\hat{x}, \hat{t})$ 为周期激励. 式(4)中阻尼、外荷载及非线性项去掉后所得线性方程可求解自振特性, 设 n 阶频率 ω_n 对应标准化正交模态 $\phi_n(x)$, 有 $\int_0^1 \phi_m \phi_n dx = \langle \phi_m, \phi_n \rangle = \delta_{mn}$ (δ 是 Dirac 函数), 假定 $\psi(x) = b \sin \pi x$, 其中矢高 $b = \hat{b}/r_x$, 则 $\phi_n(x)$

可表示为

$$\phi_n(x) = c_1 \cos \omega_n^{1/2} x + c_2 \sin \omega_n^{1/2} x + c_3 \cosh \omega_n^{1/2} x + c_4 \sinh \omega_n^{1/2} x + c_5 \sin \pi x, \quad (6)$$

其中 c_i 是系数, 将其代入式(5), 式(4) 对应线性方程可得

$$k_1 c_1 - \omega^{3/2} c_2 + k_1 c_3 + \omega^{3/2} c_4 - \pi^3 c_5 = 0, \quad (7a)$$

$$(\omega^{3/2} \sin \omega^{1/2} - k_2 \cos \omega^{1/2}) c_1 - (\omega^{3/2} \cos \omega^{1/2} + k_2 \sin \omega^{1/2}) c_2 + \pi^3 c_5 +$$

$$(\omega^{3/2} \sinh \omega^{1/2} - k_2 \cosh \omega^{1/2}) c_3 + (\omega^{3/2} \cosh \omega^{1/2} - k_2 \sinh \omega^{1/2}) c_4 = 0, \quad (7b)$$

$$c_1 \omega + k_3 \omega^{1/2} c_2 - \omega c_3 + k_3 \omega^{1/2} c_4 + k_3 \pi c_5 = 0, \quad (7c)$$

$$(\omega \cos \omega^{1/2} + k_4 \omega^{1/2} \sin \omega^{1/2}) c_1 + (\omega \sin \omega^{1/2} - k_4 \omega^{1/2} \cos \omega^{1/2}) c_2 + k_4 \pi c_5 -$$

$$(\omega \cosh \omega^{1/2} + k_4 \omega^{1/2} \sinh \omega^{1/2}) c_3 - (\omega \sinh \omega^{1/2} + k_4 \omega^{1/2} \cosh \omega^{1/2}) c_4 = 0, \quad (7d)$$

$$\Gamma_1 c_1 + \Gamma_2 c_2 + \Gamma_3 c_3 + \Gamma_4 c_4 + \Gamma_5 c_5 = 0, \quad (7e)$$

其中

$$\Gamma_1 = \frac{1 + \cos \omega^{1/2}}{\pi^2 - \omega}, \quad \Gamma_2 = \frac{\sin \omega^{1/2}}{\pi^2 - \omega}, \quad \Gamma_3 = -\frac{1 + \cosh \omega^{1/2}}{\pi^2 + \omega},$$

$$\Gamma_4 = -\frac{\sinh \omega^{1/2}}{\pi^2 + \omega}, \quad \Gamma_5 = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\pi}{b^2 \omega} - \frac{\omega}{b^2 \pi^3}.$$

由 c_i 的系数矩阵对应的行列式等于 0 求解 ω_n 和 $\phi_n(x)$. 通过系统参数变化时频率、模态的规律来分析弹性约束系统的自振特性. 具体做法是假定某一参数在一定区间内变化而其余参数保持不变, 由式(7) 中 c_i 的系数矩阵进行计算. 由于所得方程为超越方程, 实际采用 Mathematica 软件中的 Findroot 命令搜索求解.

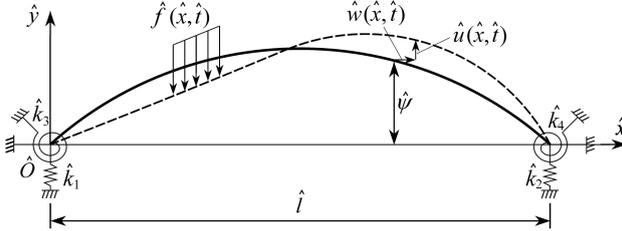


图 1 竖向弹性支撑浅拱结构示意图

Fig.1 The schematic of a vertical elastically supported shallow arch and the excitation

2 1:2 内共振平均方程

为分析方便及使阻尼效应、激励与非线性项同阶, 定义小参数 ε 用 $\mu \rightarrow \varepsilon^2 \mu, F \rightarrow \varepsilon^3 F$, 并将式(4) 写为

$$\ddot{u} + Lu = G_2(u_1, u_2) + G_3(u_1, u_2, u_3) - \varepsilon^2 \mu \dot{u} - \varepsilon^3 F \cos \Omega t, \quad (8)$$

上标点表示对 t 微分, 线性自伴随微分算子 $Lu = u'''' - \psi'' \langle u', \psi' \rangle$, G_2 和 G_3 分别为 2、3 次非线性微分算子, 且 $G_2(u_1, u_2) = u_1'' \langle u_2', \psi' \rangle + \psi'' \langle u_1', u_2' \rangle / 2$, $G_3(u_1, u_2, u_3) = u_1'' \langle u_2', u_3' \rangle / 2$, 上标撇表示对 x 微分. 采用多尺度法进行全离散, 将 u 一致展开为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) \phi_k(x), \quad (9)$$

式中 r_k 是广义坐标, 将其代入式(8) 进行 Galerkin 积分可得

$$\ddot{r}_k + \omega_k^2 r_k = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} r_i r_j + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_{kijh} r_i r_j r_h - 2\varepsilon^2 \mu \dot{r}_k -$$

$$\varepsilon^3 f_k \cos \Omega t, \quad k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (10)$$

其中

$$\Lambda_{kij} = \langle \phi_k, G_2(\phi_i, \phi_j) \rangle, \quad \Gamma_{kijh} = \langle \phi_k, G_3(\phi_i, \phi_j, \phi_h) \rangle, \quad 2\mu_k = \langle \mu, \phi_k^2 \rangle, \quad f_k = \langle F, \phi_k \rangle.$$

将 r_k 展开为

$$r_k(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i r_{ki}(T_0, T_1, T_2), \quad (11)$$

式中 $T_i = \varepsilon^i t (i = 0, 1, 2)$, 且 $\partial/\partial t = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i D_i, D_i = \partial/\partial T_i$. 考虑 m 和 n 阶模态之间的 1:2 内共振, 引入调谐参数 σ_1 和 σ_2 ,

$$\omega_n = 2\omega_m + \varepsilon\sigma_2, \quad \Omega = \omega_i + \varepsilon\sigma_1 \quad (i = m, n), \quad (12)$$

分别描述 ω_n 和 ω_m 之间, Ω 与 ω_m (ω_n) 之间的接近程度. 将式(11)代入式(10)展开并利用时间参数的独立性可得各阶近似方程

ε

$$D_0^2 r_{k1} + \omega_k^2 r_{k1} = 0, \quad (13)$$

ε^2

$$D_0^2 r_{k2} + \omega_k^2 r_{k2} = -2D_1 D_0 r_{k1} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} r_{i1} r_{j1}, \quad (14)$$

ε^3

$$D_0^2 r_{k3} + \omega_k^2 r_{k3} = -2D_1 D_0 r_{k2} - D_1^2 r_{k1} - 2D_2 D_0 r_{k1} - 2\mu_k D_0 r_{k1} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} (r_{i1} r_{j2} + r_{i2} r_{j1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_{kijh} r_{i1} r_{j1} r_{h1} - f_k \cos \Omega t. \quad (15)$$

式(13)中一阶近似方程的解可写为

$$r_{k1} = A_k(T_1, T_2) e^{i\omega_k T_0} + \text{CC}, \quad (16)$$

其中 CC 表示前面复数项的共轭项, 将上式代入式(14)可得

$$D_0^2 r_{k2} + \omega_k^2 r_{k2} = -2i\omega_k D_1 A_k e^{i\omega_k T_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_{kij} (A_i A_j e^{i(\omega_i + \omega_j) T_0} + A_i \bar{A}_j e^{i(\omega_i - \omega_j) T_0}) + \text{CC}. \quad (17)$$

由消除共振项的条件可得

$$\begin{cases} 2i\omega_m D_1 A_m = S_1 A_n \bar{A}_m e^{i\sigma_2 T_1}, \\ 2i\omega_n D_1 A_n = S_2 A_m^2 e^{-i\sigma_2 T_1}, \\ 2i\omega_k D_1 A_k = 0 \quad (k \neq m, n), \end{cases} \quad (18)$$

其中 $S_1 = \Lambda_{mnm} + \Lambda_{nmm}, S_2 = \Lambda_{nmm}$. 由于系统响应只与发生非线性相互作用的模态有关, 式(17)的解可写为

$$r_{k2} = \frac{S_1}{4\omega_m^2} A_n \bar{A}_m e^{i(\omega_n - \omega_m) T_0} \delta_{km} + \frac{S_2}{4\omega_n^2} A_m^2 e^{2i\omega_m T_0} \delta_{kn} + \frac{\Lambda_{kmm}}{\omega_k^2} A_m \bar{A}_m + \frac{\Lambda_{knn}}{\omega_k^2 - 4\omega_n^2} A_n^2 e^{2i\omega_n T_0} + \frac{\Lambda_{kmm}}{\omega_k^2 - 4\omega_m^2} A_m^2 e^{2i\omega_m T_0} (1 - \delta_{kn}) + \frac{\Lambda_{knn}}{\omega_k^2} A_n \bar{A}_n + \frac{\Lambda_{knn} + \Lambda_{kmm}}{\omega_k^2 - (\omega_n + \omega_m)^2} A_m A_n e^{i(\omega_n + \omega_m) T_0} + \frac{\Lambda_{kmm} + \Lambda_{knn}}{\omega_k^2 - (\omega_n - \omega_m)^2} A_n \bar{A}_m e^{i(\omega_n - \omega_m) T_0} (1 - \delta_{km}) + \text{CC}. \quad (19)$$

将式(19)、(16)代入式(15)化简可将三阶近似方程写成

$$\begin{cases} D_0^2 r_{m3} + \omega_m^2 r_{m3} = -2i\omega_m(D_2 A_m + \mu_m A_m) e^{i\omega_m T_0} + \\ \quad S_{mm} A_m^2 \bar{A}_m e^{i\omega_m T_0} + S_{mn} A_m A_n \bar{A}_n e^{i\omega_m T_0} - f_m \cos \Omega t + \text{NST} + \text{CC}, \\ D_0^2 r_{n3} + \omega_n^2 r_{n3} = -2i\omega_n(D_2 A_n + \mu_n A_n) e^{i\omega_n T_0} + S_{nn} A_n^2 \bar{A}_n e^{i\omega_n T_0} + \\ \quad S_{mn} A_n A_m \bar{A}_m e^{i\omega_n T_0} - f_n \cos \Omega t + \text{NST} + \text{CC}, \\ D_0^2 r_{k3} + \omega_k^2 r_{k3} = 0 \quad (k \neq m, n), \end{cases} \quad (20)$$

式中 NST 表示非共振项, 系数 S_{mm}, S_{nn}, S_{mn} 的具体表达式如下:

$$S_{mm} = \frac{10\Lambda_{mmm}^2}{3\omega_m^2} + \frac{9\Lambda_{nmm}(\Lambda_{mnn} + \Lambda_{mnm})}{4\omega_n^2} + 3\Gamma_{mmmm} + \sum_{j=1, j \neq m, n}^{\infty} \left[(\Lambda_{mmj} + \Lambda_{mjm}) \left(\frac{2\Lambda_{jmm}}{\omega_j^2} + \frac{\Lambda_{jmm}}{\omega_j^2 - 4\omega_m^2} \right) \right], \quad (21)$$

$$S_{nn} = \frac{10\Lambda_{nnn}^2}{3\omega_n^2} + \frac{29\Lambda_{mnn}(\Lambda_{nmm} + \Lambda_{nmm})}{15\omega_m^2} + 3\Gamma_{nnnn} + \sum_{j=1, j \neq m, n}^{\infty} \left[(\Lambda_{nnj} + \Lambda_{njn}) \left(\frac{2\Lambda_{jnn}}{\omega_j^2} + \frac{\Lambda_{jnn}}{\omega_j^2 - 4\omega_n^2} \right) \right], \quad (22)$$

$$S_{mn} = \frac{4\Lambda_{mnn}(\Lambda_{nmm} + \Lambda_{nmm})}{15\omega_m^2} + \frac{\Lambda_{nmm}(\Lambda_{mnn} + \Lambda_{mnn})}{2\omega_n^2} + \frac{(\Lambda_{mnn} + \Lambda_{mnn})^2}{8\omega_m^2} + \frac{4\Lambda_{mnn}\Lambda_{mnm}}{\omega_m^2} + 2(\Gamma_{mnm} + \Gamma_{mnm} + \Gamma_{mnm}) + \sum_{j=1, j \neq m, n}^{\infty} \left[(\Lambda_{mjn} + \Lambda_{mjm}) (\Lambda_{jnn} + \Lambda_{jnm}) \left(\frac{1}{\omega_j^2 - 9\omega_m^2} + \frac{1}{\omega_j^2 - \omega_m^2} \right) + \frac{2\Lambda_{jnn}}{\omega_j^2} (\Lambda_{mmj} + \Lambda_{mjm}) \right], \quad (23)$$

上述 3 式中 \sum 符号前为共振模态项, \sum 内为非共振模态项. 由式(20) 和式(18) 中消除永年项条件, 以及变量时间导数的多尺度表达式 $\dot{A} = \varepsilon D_1 A + \varepsilon^2 D_2 A + \dots$, 可得到求解方程:

$$2i\omega_m(\dot{A}_m + \mu_m A_m) = S_1 A_n \bar{A}_m e^{i\sigma_2 T_1} + S_{mm} A_m^2 \bar{A}_m + S_{mn} A_m A_n \bar{A}_n - \frac{1}{2} f_m e^{i\sigma_1 T_1}, \quad (24)$$

$$2i\omega_n(\dot{A}_n + \mu_n A_n) = S_2 A_m^2 e^{-i\sigma_2 T_1} + S_{nn} A_n^2 \bar{A}_n + S_{mn} A_n A_m \bar{A}_m - \frac{1}{2} f_n e^{i\sigma_1 T_1}. \quad (25)$$

将摄动解 A_m 和 A_n 写为极坐标形式

$$A_j = \frac{1}{2} a_j e^{i\beta_j}, \quad j = m, n, \quad (26)$$

其中, a_j 和 β_j 均为实函数. 将其代入式(24)、(25) 展开, 分离实、虚部可得极坐标形式的平均方程:

$$\dot{a}_m = -\mu_m a_m + \frac{S_1}{4\omega_m} a_n a_m \sin \gamma_1 + \frac{f_m}{2\omega_m} \sin \gamma_2, \quad (27a)$$

$$a_m \dot{\beta}_m = -\frac{S_1}{4\omega_m} a_m a_n \cos \gamma_1 - \frac{S_{mm}}{8\omega_m} a_m^3 - \frac{S_{mn}}{8\omega_m} a_m a_n^2 + \frac{f_m}{2\omega_m} \cos \gamma_2, \quad (27b)$$

$$\dot{a}_n = -\mu_n a_n - \frac{S_2}{4\omega_n} a_m^2 \sin \gamma_1 + \frac{f_n}{2\omega_n} \sin \gamma_3, \quad (27c)$$

$$a_n \dot{\beta}_n = -\frac{S_2}{4\omega_n} a_m^2 \cos \gamma_1 - \frac{S_{nn}}{8\omega_n} a_n^3 - \frac{S_{mn}}{8\omega_n} a_n a_m^2 + \frac{f_n}{2\omega_n} \cos \gamma_3, \quad (27d)$$

其中 $\gamma_1 = \beta_n - 2\beta_m + \sigma_2 T_1$, $\gamma_2 = \beta_m - \sigma_1 T_1$, $\gamma_3 = \beta_n - \sigma_1 T_1$. 设 $p_i = a_i \cos \beta_i$, $q_i = a_i \sin \beta_i$ ($i = m, n$), 代入式(27)化简可得直角坐标形式的平均方程:

$$\begin{aligned} \dot{p}_m = & -\mu_m p_m + \chi_m q_m + \frac{S_1}{4\omega_m} (p_m q_n - q_m p_n) + \\ & \frac{S_{mm}}{8\omega_m} q_m (p_m^2 + q_m^2) + \frac{S_{mn}}{8\omega_m} q_m (p_n^2 + q_n^2), \end{aligned} \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_m = & -\mu_m q_m - \chi_m p_m - \frac{S_1}{4\omega_m} (p_m p_n + q_m q_n) - \\ & \frac{S_{mm}}{8\omega_m} p_m (p_m^2 + q_m^2) - \frac{S_{mn}}{8\omega_m} p_m (p_n^2 + q_n^2) + \frac{f_m}{2\omega_m}, \end{aligned} \quad (28b)$$

$$\dot{p}_n = -\mu_n p_n + \chi_n q_n + \frac{S_2}{2\omega_n} p_m q_m + \frac{S_{nn}}{8\omega_n} q_n (p_n^2 + q_n^2) + \frac{S_{mn}}{8\omega_n} q_n (p_m^2 + q_m^2), \quad (28c)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_n = & -\mu_n q_n - \chi_n p_n - \frac{S_2}{4\omega_n} (p_m^2 - q_m^2) - \\ & \frac{S_{nn}}{8\omega_n} p_n (p_n^2 + q_n^2) - \frac{S_{mn}}{8\omega_n} p_n (p_m^2 + q_m^2) + \frac{f_n}{2\omega_n}, \end{aligned} \quad (28d)$$

对于 m 阶主共振 $\chi_m = \sigma_1$, $\chi_n = 2\sigma_1 - \sigma_2$; 对于 n 阶主共振 $\chi_m = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, $\chi_n = \sigma_1$. 稳态解可通过在式(27)或(28)中令 $\dot{a}_j = \dot{\beta}_j = 0$ 或 $\dot{p}_j = \dot{q}_j = 0$ ($j = m, n$) 获得, 一般先选取远离共振区的参数进行积分得到一组解, 再利用拟弧长延拓法^[11]确定随参数变化的整条曲线, 稳定性由 Jacobi 矩阵的特征值判断. 本文采用 XPPAUT^[12] 软件的 AUTO 程序来实现求解过程.

3 数值分析

采用数值方法计算本文方法所得频率、模态, 并与有限元法进行对比验证; 验证平均方程系数的收敛性, 并得到不同 k_i 时的平均方程系数; 以最低两阶模态 ($m = 1, n = 2$) 的 1:2 内共振为对象, 研究 k_i 取不同值时系统的一阶模态主共振. 计算过程取 $\mu_m = 0.006$, $\mu_n = 0.008$, $k_3 = 0, k_4 = 0$, 即数值分析仅考虑竖向弹性约束情况.

3.1 系统频率与模态验证

图 2 给出了 (a) $k_1 = 100, k_2 = 100$ 和 (b) $k_1 = 100, k_2 = 500$ 两种情况下系统前几阶频率随 b 的变化规律. 由图 2(a) 可知当 b 在 $(0, 40]$ 内增加时, 1~2 阶, 3~4 阶, 5~6 阶模态之间的频率在相互接近时发生交叉, 各阶频率在 b 处于如图 2(a) 所示的位置存在 1:2 的关系; 而由图 2(b) 可知当 $b \in (0, 40]$ 时, 1~2 阶, 3~4 阶, 5~6 阶模态之间的频率在相互接近时发生转向, 各阶频率在如图 2(b) 所示位置存在 1:2 的关系. 由于交叉与转向的不同, 两种情况下出现 1:2 比例关系的模态存在差异, 例如 $b \approx 15.0$ 时前者是 $\omega_6 = 2\omega_3$, 后者是 $\omega_6 = 2\omega_4$. 模态之间是否存在 1:2 内共振及系统的非线性行为与平均方程系数有关, 而平均方程系数直接由相互作用模态的形状和对称性决定.

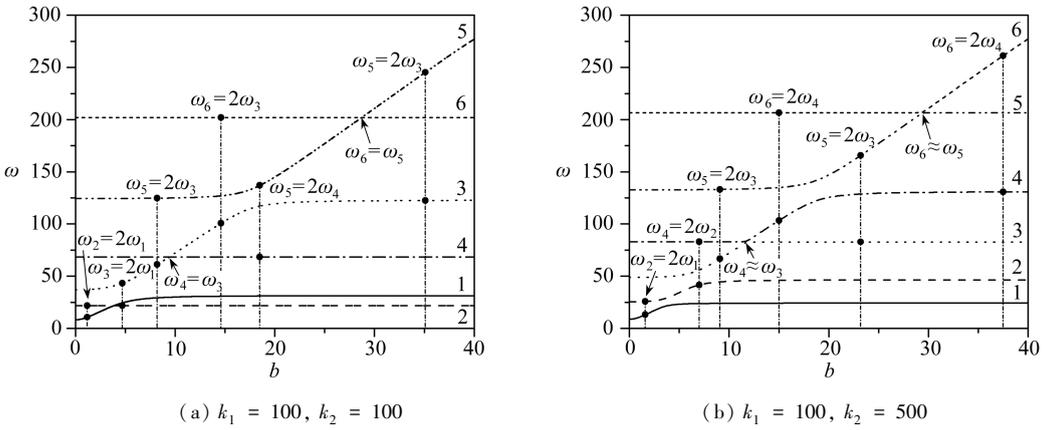


图2 频率 ω 随矢高 b 的变化示意图

Fig.2 Variation of frequency ω with arch rise b

以(a) $k_1 = 100, k_2 = 100$ 和(b) $k_1 = 100, k_2 = 500$ 两种情况下 $\omega_2 = 2\omega_1$ 的自振特性为对象, 图3给出了本文方法所得模态与有限元结果的对比. 两种方法通过式(3)进行量纲转换, 其中有限元分析的参数为: 截面 $0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$, $\hat{l} = 10 \text{ m}$, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\hat{k}_1 = 1.75 \times 10^2 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\hat{k}_2 = 1.75 \times 10^2 (8.75 \times 10^2) \text{ kN} \cdot \text{m}^{-1}$, $\hat{b} = 0.112 (0.116) \text{ m}$, 有限元计算模态进行了归一化. 由图3可知: 两种方法所得模态形状相同, 模态峰值差异均小于平均值的5%, 前四阶频率的相对差值最大为0.7%; 两种情况下模态两端均不为0, 这是弹性约束引起的, 另外第一种情况模态具有对称性或反对称性, 而第二种情况模态则不具有(反)对称性.

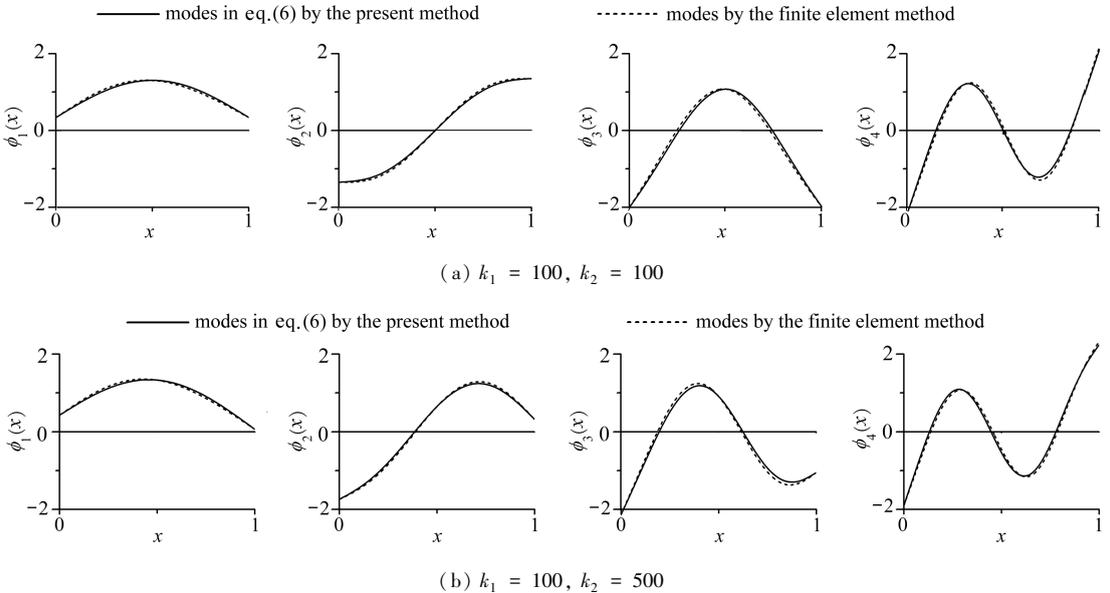


图3 本文方法所得前四阶模态与有限元结果对比图

Fig.3 Comparison of the first four modes results between the presented method and the finite element method

3.2 平均方程系数

式(21)~(23)中 S_{ij} 是与模态相关的无穷项之和, 除了与共振模态有关外, 随着所截取模态阶数 N 的增加非共振部分逐渐衰减. 为验证这些系数的收敛性, 表1给出了它们与 N 的关系. 结果显示, 各系数当 N 增至某一值时均迅速收敛, 当 N 再进一步增加时其变化值相对平均值均小于

1%,收敛之后即可作为平均方程系数.

表 1 平均方程系数随截取模态阶数的变化表

Table 1 Variation of coefficients in the averaging equation with the truncation mode order

coefficients	truncation mode order N for $k_1 = 100, k_2 = 100$						truncation mode order N for $k_1 = 100, k_2 = 500$					
	6	7	8	9	10	11	6	7	8	9	10	11
S_{mm}	5 077.021	5 076.586	5 086.756	5 086.743	5 086.830	5 086.551	34.550	34.521	34.830	34.804	34.322	34.924
S_{nn}	625.114	625.059	626.207	626.194	626.281	626.002	18.146	17.998	19.184	19.159	19.177	19.178
S_{mn}	1 355.397	1 355.096	1 360.634	1 363.557	1 364.960	1 364.960	13.875	13.750	14.961	14.924	14.921	14.921

考虑 $k_1 = 100, 200, 500$ 三种情况,图 4 给出了 S_{ij} 和 S_i 在 $k_2 \in [10^2, 5 \times 10^4]$ 时的分布规律,其中横坐标为对数坐标,纵坐标为直角坐标.从中可知:① k_1, k_2 的取值互换前后各系数不变,如 $k_1 = 100, k_2 = 200$ 和 $k_1 = 200, k_2 = 100$ 时 S_{mm} 均为 2 465.61,这是由于虽然 $k_1 \neq k_2$ 时模态不对称且两端不为 0,但 k_1, k_2 取值互换前后的模态关于跨中对称,组成系数的 A_{kij} 和 Γ_{kijh} 相同.② 图 4(a)~(c) 所示 k_2 变化的过程中, $k_1 = 500$ 时各系数最平稳, $k_1 = 100$ 时各系数起伏最大;另一方面, S_{mm} 和 S_{nn} 在 k_2 越大时越稳定, k_2 较小时变化明显,尤以 $k_2 = 100, 200$ 最显著, S_{mn} 随 k_2 的变化规律刚好相反,但总体上变化值相对小.③ S_1 和 S_2 的大小为 2:1,这与文献[13]中基于动能、弹性势能的 Euler-Lagrange 公式得到 $A_{mnn} + A_{nmm} = 2A_{mnm}$ 的结论一致.图 4(d) 中结果显示模态耦合系数 S_1 和 S_2 在 $k_1 = k_2$ 时等于 0,而 $k_1 \neq k_2$ 时不等于 0,这决定了系统的非线性行为,当 $k_1 = k_2$ 时对称或反对称的正交模态使组成系数的 A_{kij} 为 0,而 $k_1 \neq k_2$ 时不对称的正交模态使得耦合系数不为 0,这样两种情况下虽然均有 $\omega_n = 2\omega_m$,但是前者无 1:2 内共振,后者有模态的非线性相互作用和 1:2 内共振.这是本文研究的出发点,也是与理想的对称铰支/固支浅拱^[14]的不同之处.

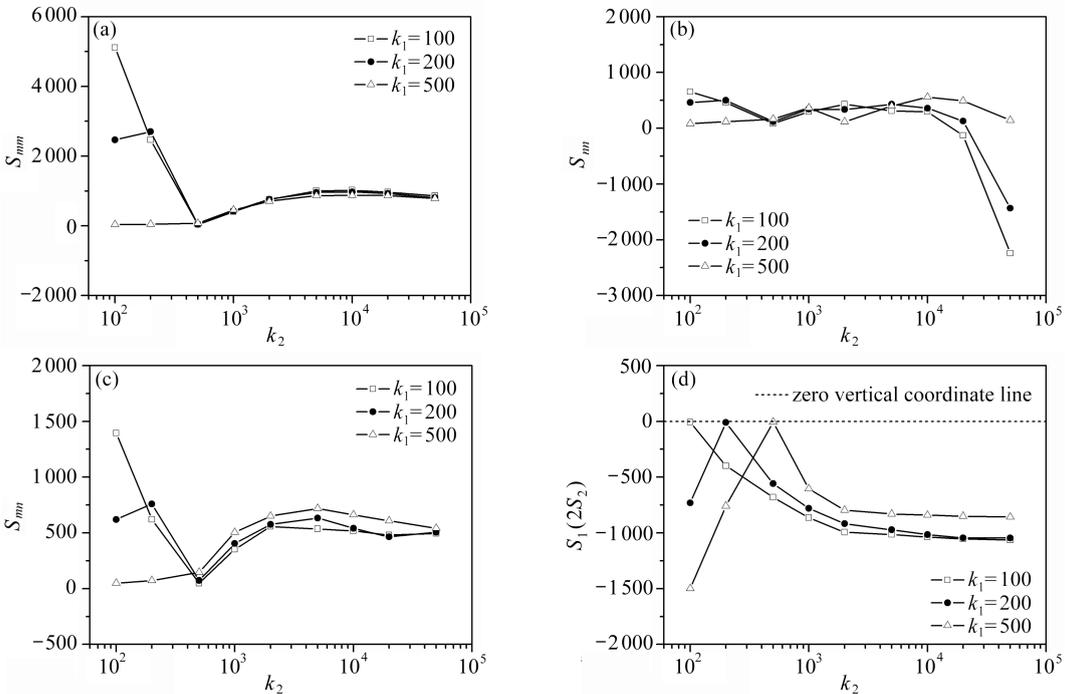


图 4 平均方程系数与竖向约束刚度 k_1, k_2 的关系

Fig.4 Coefficients of the averaged equation vs. the vertical constraining stiffness k_1, k_2

鉴于平均方程系数对非线性行为、分岔特性的重要性以及图 4 中各系数的分布规律,在后续分析中取 $k_1 = 100, 200, 500, k_2 \in [10^2, 5 \times 10^4]$ 来考察外激励下动力系统的各类解。

3.3 激励幅值的影响

图 5 给出了 $k_1 = 100$ 而 k_2 在 $[10^2, 5 \times 10^4]$ 内取不同值时的激励幅值响应曲线,其中 $\sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.05, F$ 是激励幅值, $f_1 = \langle F, \phi_1 \rangle$ 直接激发模态响应, $f_2 = 0, a_1, a_2$ 为极坐标形式的模态响应.由图 5 可知, $k_1 = k_2 = 100$ 时系统只有一阶响应 a_1 且无分岔点,没有模态相互作用,这是由系数 $S_1(S_2) = 0$ 引起的; k_2 取其他不同值时 a_1, a_2 的响应曲线均类似,当 F 从 0 开始增加时

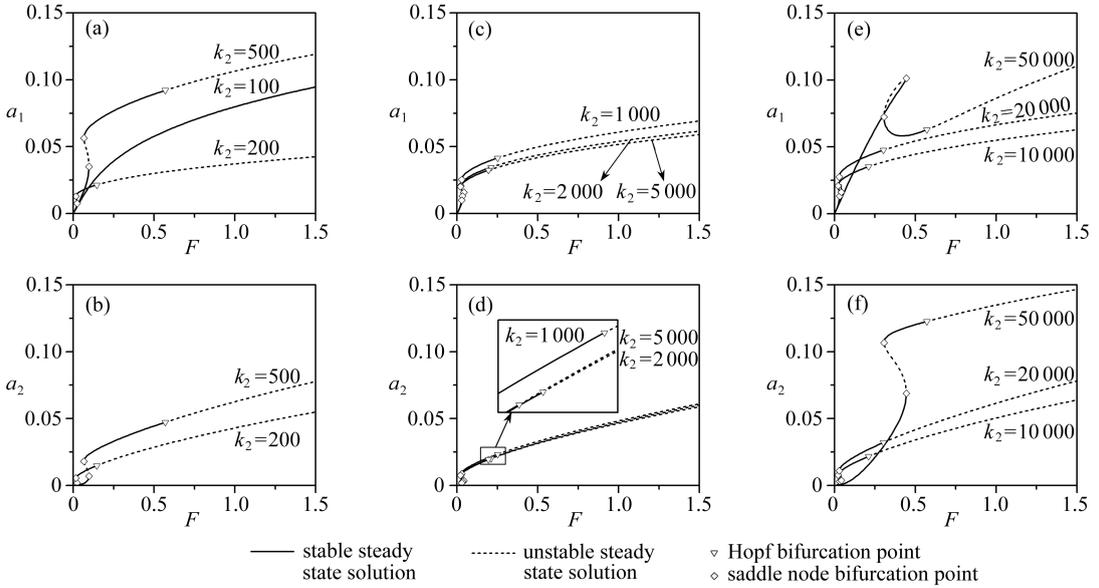
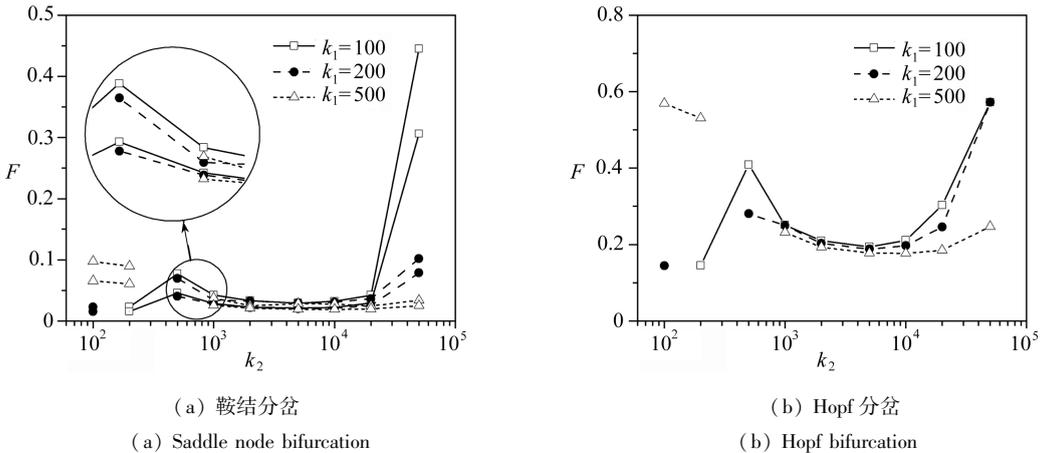


图 5 激励幅值响应曲线 ($k_1 = 100, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.05$)

Fig.5 Force-response curves ($k_1 = 100, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.05$)



(a) 鞍结分岔

(a) Saddle node bifurcation

(b) Hopf 分岔

(b) Hopf bifurcation

图 6 系统分岔时约束刚度激励幅值的关系图

Fig.6 Constraining stiffness vs. excitation amplitude for bifurcation

稳态解均遇到两个鞍结分岔点,两个分岔点之间的解不稳定,随 F 的增加解曲线遇到一个 Hopf 分岔点,在 F 进一步增加时解失去稳定性.然而 k_2 取不同值时各种分岔对应的 F 值有所不同.图 5 显示 $k_2 = 500$ 和 $50\ 000$ 时各种分岔对应的 F 值均较大,且此时系统响应 a_1, a_2 也相对较大;

而 k_2 取其他值时各种分岔对应的 F 值比较接近且 F 相对较小。

图 6 进一步对各种 k_1, k_2 时的鞍结分岔和 Hopf 分岔对应的激励幅值 F 进行了汇总. 图 6 (a) 所示 3 组 k_1 中上、下支分别表示发生两次鞍结分岔时的两个 F 值, 当 F 在 $[0, 1.5]$ 内增加时, 上支 (F 较大) 对应的鞍结分岔先发生, 且 $k_2 = k_1$ 时均无分岔. 对于 $k_2 \neq k_1, k_2$ 较小和较大时鞍结分岔均对 F 值敏感, 且前者 k_1 越大对应 F 值越小, 后者 k_1 越大对应 F 值越大; 而 k_2 在 $[10^3, 2 \times 10^4]$ 内取值时鞍结分岔对应的 F 很平稳. 图 6(b) 所示的 Hopf 分岔显示, $k_2 = k_1$ 时无 Hopf

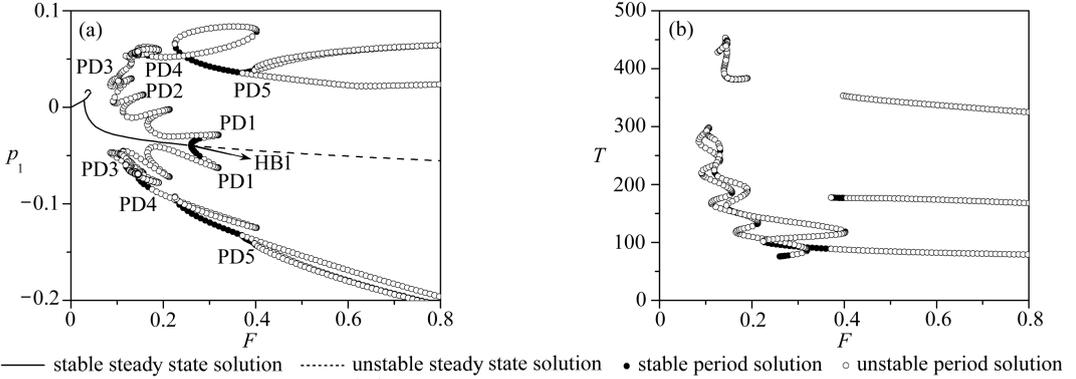


图 7 激励幅值变化时主共振周期解 ($k_1 = 100, k_2 = 1\,000, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.05$)

Fig.7 Period solution of primary resonance vs. excitation amplitude
($k_1 = 100, k_2 = 1\,000, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.05$)

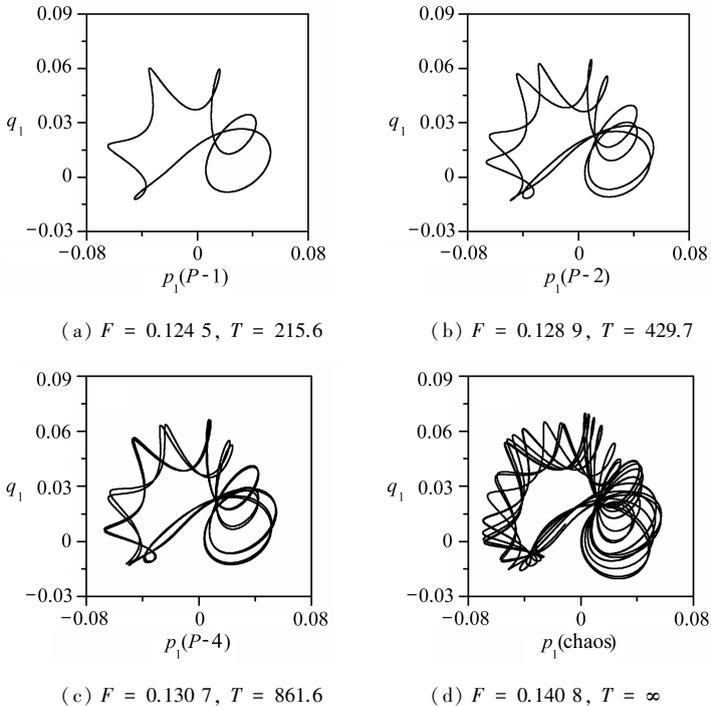


图 8 倍周期分岔相图 ($k_1 = 100, k_2 = 1\,000, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.05$)

Fig.8 Phase portraits in (p_1-q_1) phase space of period-doubling bifurcation
($k_1 = 100, k_2 = 1\,000, \sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.05$)

分岔,这同样是由于此时正(反)对称模态使得平均方程系数 $S_1(S_2) = 0$ 引起;对于 $k_2 \neq k_1, k_1 = 100$ 和 200 时 Hopf 分岔对应的 F 值接近, $k_1 = 500$ 时则有明显区别,整体上 k_2 取较小和较大值时分岔所对应的 F 值对 k_2 敏感, k_2 取中间值时对应 F 值较平稳。

系统出现 Hopf 分岔之后,稳态解变为周期解,相空间出现极限环,随着参数的变化还可能出现准周期解和混沌解.图 7 给出了 $k_1 = 100, k_2 = 1\ 000$ 时 Hopf 分岔附近区域周期解及对应周期 T 随 F 变化的分布图,其中 $\sigma_1 = 0.05, \sigma_2 = 0.05, p_1, q_1$ 为直角坐标,HB 指 Hopf 分岔点,PD 指倍周期分岔点.由图 7(a)可知,从 HB1 衍生出来的周期解在 $F \in [0, 0.8]$ 时有 5 个倍周期分岔点 PD1~PD5,在 HB1 和 PD5 之间周期解随着 F 的变化来回折返,极限环时大时小,稳定性交替变化;PD5 之后的周期解路径非常明确,极限环随着 F 的增大逐渐变大.5 个倍周期分岔点中,PD1,PD2,PD4 在分岔后无进一步的倍周期分岔点;PD5 和 PD3 分岔后还有一系列的下一级倍周期分岔,每分岔一次周期增倍,分岔前后 p_1 的相对差小于 2%,其中图 7(a)中 PD5 附近的各级周期解路径及图 7(b)中 PD5 分岔前后 T 的分布很好地解释了由倍周期分岔进入混沌的过程.图 8 还采用 p_1 - q_1 平面相图对 PD3 附近倍周期分岔前后的周期解进行了定量描述, $P-1, P-2, P-4$ 分别为周期 1, 2, 4 吸引子。

3.4 激励频率的影响

通过调谐参数 σ_2 的变化来考察激励频率变化时的非线性行为.图 9 给出了 $k_1 = 100$ 而 k_2 在 $[10^2, 5 \times 10^4]$ 内取不同值时的激励幅值 a_1, a_2 的响应曲线,其中 $\sigma_1 = 0.05, F = 3$.由图 9 可知, $k_2 = k_1 = 100$ 时 $a_2 = 0$,系统只有一阶响应 a_1 ,在 $\sigma_2 = -0.756$ 时有一个鞍结分岔点.而对于 $k_2 \neq k_1$ 的情况, k_2 取不同值时各响应曲线类似,在 σ_2 的变化过程中均有两条明显分支,其中一条具有软弹簧性质,顶端鞍结分岔点在图中未显示的 $\sigma_2 < -2$ 处,另外一条具有硬弹簧性质,顶端有一个鞍结分岔点,两条分支上解随着 σ_2 的变化在稳定与不稳定之间交替变换; σ_2 接近于 0 时为两个 Hopf 分岔点连接的共振区,期间系统存在周期解、准周期解,甚至混沌解.对比

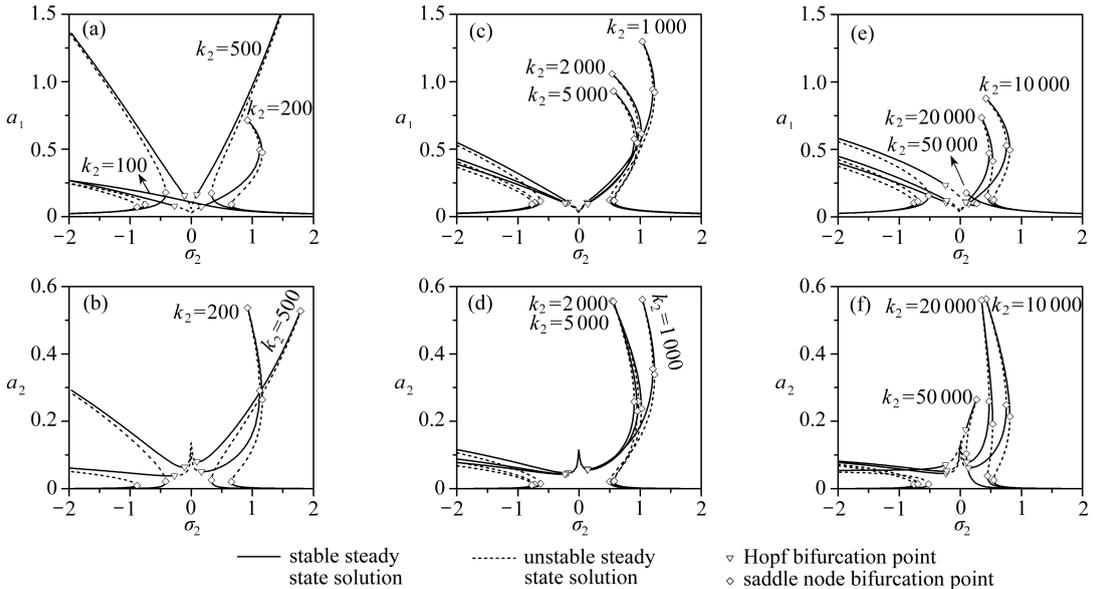


图 9 激励频率响应曲线 ($k_1 = 100, \sigma_1 = 0.05, F = 3$)

Fig.9 Frequency-response curves ($k_1 = 100, \sigma_1 = 0.05, F = 3$)

图 9(a), (c), (e) 可发现 a_1 对 k_2 较敏感, 其中, 硬弹簧分支顶端鞍结分岔点对应的 a_1 , 除了 $k_2 = 200$ 外均随 k_2 的增大而递减; 对比图 9(b), (d), (f) 则发现 a_2 在 k_2 增加的过程中变化较小, 除 $k_2 = 50\ 000$ 外 a_2 均为 0.55 左右. 还需指出的是, 远离共振区 a_1, a_2 均很小, 且解是稳定的, 尤其 $|\sigma_2| > 1.5$ 时 $a_2 < 10^{-3}$, a_2 可忽略, 此时可认为系统在一阶模态主共振作用下无模态相互作用.

数值研究结果表明, 不同 k_1, k_2 时 a_1, a_2 的响应曲线类似. 基于此, 图 10 给出了各种分岔发生时 σ_2 与 k_1, k_2 的关系. 如图 10 所示, 当 $k_2 = k_1$ 时系统无硬弹簧分支顶端鞍结分岔和共振区的 Hopf 分岔. 而对于 $k_2 \neq k_1$, 图 10(a) 所示鞍结分岔对应的 σ_2 与 k_2 的关系中, $k_1 = 100, 200, 500$ 三组数据中 $k_2 = 500$ 均是一个拐点; $k_2 < 500$ 时分岔对应的 σ_2 值对约束刚度敏感; 而 $k_2 > 500$ 时分岔对应的 σ_2 值随 k_2 的增加平缓减小. 图 10(b) 为两个 Hopf 分岔点的参数分布, σ_2 在 k_2 不同取值情况下变化均不明显, 各种约束条件下两个分岔点对应的 σ_2 值均大致沿 $\sigma_2 = 0$ 对称.

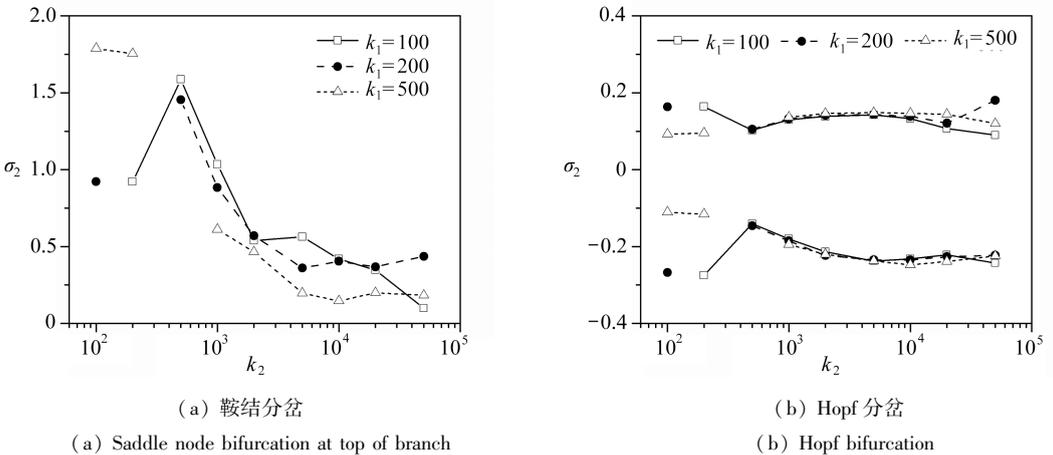


图 10 系统分岔时约束刚度与激励频率的关系图

Fig.10 Constraining stiffness vs. excitation frequency for bifurcation

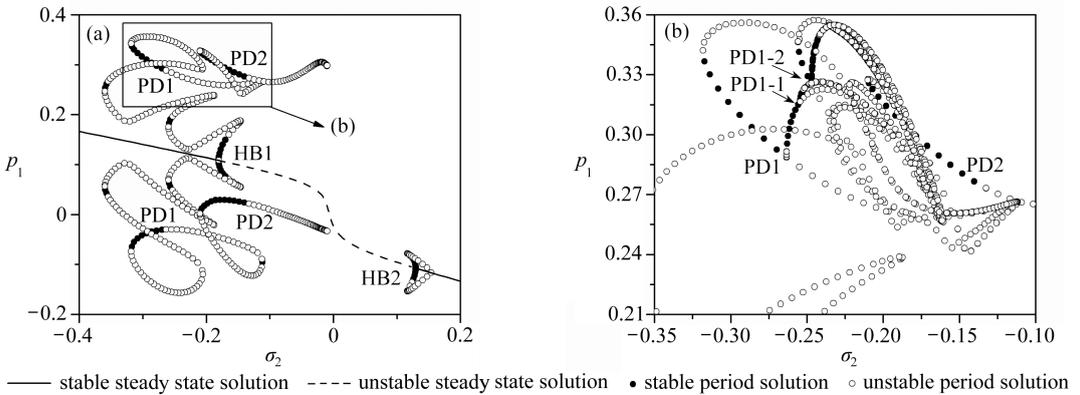


图 11 激励频率变化时主共振周期解 ($k_1 = 100, k_2 = 1\ 000, \sigma_1 = 0.05, F = 3$)

Fig.11 Period solution of primary resonance vs. excitation frequency
($k_1 = 100, k_2 = 1\ 000, \sigma_1 = 0.05, F = 3$)

k_1, k_2 取不同值时共振区非线性行为均十分显著, 系统随着 σ_2 的变化均存在一系列稳定和不安定的极限环. 图 11 给出了 $k_1 = 100, k_2 = 1\ 000$ 时周期解随 σ_2 的变化规律, 其中 $\sigma_1 =$

0.05, $F = 3$, p_1, q_1 为直角坐标, HB 指 Hopf 分岔点, PD 指倍周期分岔点. 图 11(a) 为一倍周期解: 从 HB2 出发的解分布较为简单; 而从 HB1 出发的解来回折返, 稳定解和不稳定解交替分布, 有一些区域对于同一个 σ_2 , 由于初始条件的不同, 既存在稳定的稳态解也存在稳定的周期解, 随着 σ_2 值的变化还存在图示的两个分岔点 PD1($\sigma_2 = -0.2633$) 和 PD2($\sigma_2 = -0.1325$) 以及由它们衍生的一系列多倍周期解. 对于 PD1, 由图 11(b) 可知随着 σ_2 的变化二倍周期解上存在下一级的分岔点 PD1-1, PD1-2 及更下一级的多倍周期解, 分岔前后解越来越接近, p_1 的相对差最终小于 5%, 且每分岔一次周期加倍. 图 12 采用 p_1 - q_1 相图对系统由 PD1 到 PD1-1 乃至混沌的过程中周期 1, 2, 4 及混沌吸引子进行了定量描述; 而从 PD2 引出的二倍周期解上则有 5 个下一级倍周期分岔点, 其中 2 个的附近动力系统由类似图 12 的分岔方式进入混沌, 另外 3 个衍生的下一级周期解均前面稳定后面不稳定, 无更下一级的分岔.

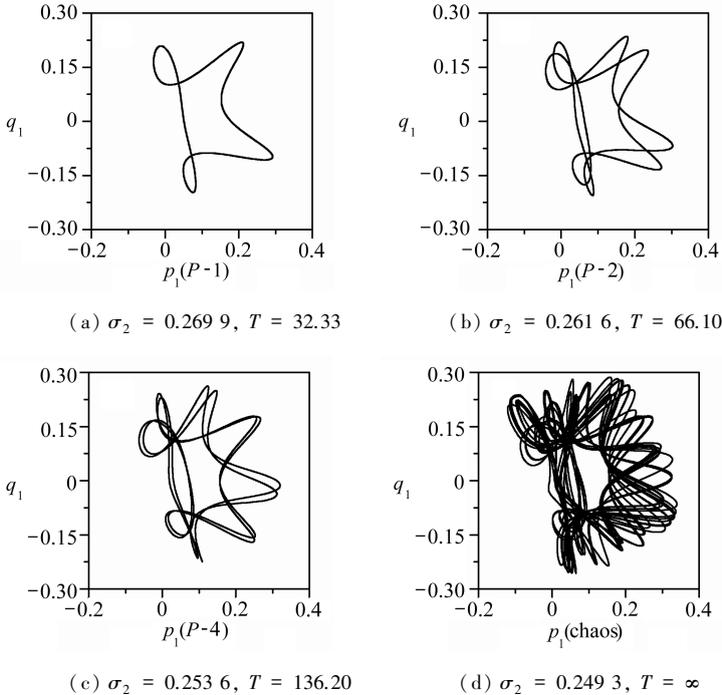


图 12 倍周期分岔相图 ($k_1 = 100, k_2 = 1000, \sigma_1 = 0.05, F = 0.05$)

Fig.12 Phase portraits in $(p_1$ - $q_1)$ phase space of period-doubling bifurcation ($k_1 = 100, k_2 = 1000, \sigma_1 = 0.05, F = 0.05$)

4 结 论

探讨了周期激励下弹性约束浅拱的非线性行为, 在频率和正交模态中考虑不同刚度的竖向、转动弹性约束, 以 1:2 内共振为例, 采用多尺度摄动法得到了平均方程, 并对两端竖向约束浅拱的一阶主共振响应及分岔行为进行了数值分析, 得到以下结论:

1) 考虑弹性约束之后的频率、模态与有限元结果差异很小, 平均方程系数随模态阶数增加而收敛, 证明所采用的方法是可行的.

2) 两端竖向刚度相同时, 结构对称, 最低两阶模态之间无相互作用和 1:2 内共振. 两端竖向刚度不相同, 激励幅值响应曲线存在两个鞍结分岔点连接的不稳定区域, 激励幅值增至某一值时出现 Hopf 分岔; 幅频响应曲线有两条分支、若干分岔点及由两个 Hopf 分岔点连接的共

振区.随着参数的变化,系统存在一系列的稳态解、周期解、准周期解和混沌解窗口,动力系统以倍周期分岔方式进入混沌.

本文采用了无量纲分析方法,对实际工程中的结构,可以通过量纲转换借鉴文中结果,使得设计参数避开不稳定区域和共振区.

参考文献(References):

- [1] Malhotra N, Namachchivaya N S. Chaotic dynamics of shallow arch structures under 1:2 resonance[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, **123**(6): 612-619.
- [2] Malhotra N, Namachchivaya N S. Chaotic motion of shallow arch structures under 1:1 internal resonance[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, **123**(6): 620-627.
- [3] Bi Q, Dai H H. Analysis of non-linear dynamics and bifurcations of a shallow arch subjected to periodic excitation with internal resonance[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **233**(4): 557-571.
- [4] 王钟羨, 江波, 孙保昌. 周期激励浅拱的全局分岔[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2004, **25**(1): 85-88. (WANG Zhong-xian, JIANG Bo, SUN Bao-chang. Global bifurcation of shallow arch with periodic excitation[J]. *Journal of Jiangsu University (Natural Science Edition)*, 2004, **25**(1): 85-88. (in Chinese))
- [5] Lacarbonara W, Arafat H N, Nayfeh A H. Non-linear interactions in imperfect beams at veering[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, **40**(7): 987-1003.
- [6] Zhou L Q, Chen Y S, Chen F Q. Global bifurcation analysis and chaos of an arch structure with parametric and forced excitation[J]. *Mechanics Research Communications*, 2010, **37**(1): 67-71.
- [7] 刘习军, 陈予恕, 侯书军. 拱型结构在参、强激励下的非线性振动分析[J]. 力学学报, 2000, **32**(1): 99-102. (LIU Xi-jun, CHEN Yu-shu, HOU Shu-jun. Analysis of nonlinear vibration of the arch structures under the parametric and forced exciting[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, **32**(1): 99-102. (in Chinese))
- [8] Chen J S, Li Y T. Effects of elastic foundation on the snap-through buckling of a shallow arch under a moving point load[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(14/15): 4220-4237.
- [9] Xu J X, Huang H, Zhang P Z, Zhou J Q. Dynamic stability of shallow arch with elastic supports-application in the dynamic stability analysis of inner winding of transformer during short circuit[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, **37**(4/5): 909-920.
- [10] Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations* [M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1979: 320-385.
- [11] Nayfeh A H, Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics* [M]. New York: Wiley-Interscience, 1995: 423-460.
- [12] Ermentrout B. *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students* [M]. Philadelphia: Siam, 2002: 161-193.
- [13] Lacarbonara W, Rega G, Nayfeh A H. Resonant non-linear normal modes—part I: analytical treatment for structural one-dimensional systems[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, **38**(6): 851-872.
- [14] Lacarbonara W, Rega G. Resonant non-linear normal modes—part II: activation orthogonality conditions for shallow structural systems[J]. *International Journal of Non-Linear Mechan-*

ics, 2003, **38**(6): 873-887.

Nonlinear Dynamic Response and Bifurcation Analysis of the Elastically Constrained Shallow Arch

YI Zhuang-peng¹, ZHANG Yong¹, WANG Lian-hua²

(1. *School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of
Science and Technology, Changsha 410004, P.R.China;*

2. *College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, P.R.China*)

Abstract: When the ends are elastically constrained in vertical and rotation directions for the shallow arch, the natural frequencies and modes are quite different from those of the case of ideal hinged or fixed boundary condition, and the different constraint stiffness will change the nonlinear responses and the parameter fields of various bifurcations under external excitation. The dimensionless dynamic equation was established by introducing the fundamental assumptions of shallow arch, and the method that the effects on the boundary constraint stiffness were considered in the natural frequencies and modes solution was employed, then the full-basis Galerkin discretization and the multi-scale perturbation methods were used to obtain the polar and Cartesian-type averaging equations, of which the coefficients had one-to-one correspondence with the values of constraint stiffness. With the application of numerical calculation, the dynamic behaviors of the vertical elastically constrained system in the case of one-to-two internal resonance between the lowest two modes under periodic excitation were studied. Both the comparison of calculated results with finite element results and the convergence of the coefficients in averaging equations proved the feasibility of the present method. Also, the numerical results show that there exist several bifurcation points with the variation of the amplitude and frequency of excitation, and the parameter distributions for the occurrence of bifurcations are associated with the values of constraint stiffness. Moreover, there are a series of steady-state solution, periodic solution, quasi-periodic solution and chaotic solution windows in the vicinity of the unstable areas or resonance regions which are connected by the bifurcation points, and the period-doubling bifurcation can be observed with the variation of parameters.

Key words: elastic restraint; shallow arch; 1:2 internal resonance; multi-scale method; bifurcation; chaos

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11002030; 11032004); The Program for New Century Excellent Talents in University of China (NCET-09-0335)