

# 分数阶 Fornberg-Whitham 方程及其改进方程的变分迭代解\*

鲍四元<sup>1</sup>, 邓子辰<sup>2,3</sup>

- (1. 苏州科技学院 土木工程学院 工程力学系, 江苏 苏州 215011;  
2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072;  
3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

(本刊编委邓子辰来稿)

**摘要:** 给出分数阶 Fornberg-Whitham 方程(FFW)并把其中非线性项  $uu_x$  换为  $u^2u_x$  后所得的改进 Fornberg-Whitham 方程的解. 使用了分数阶变分迭代法 (fractional variational iteration method, FVIM), 其中 Lagrange 乘子由泛函和 Laplace 变换确定. 讨论了分数阶次的数值在两种情况下 FFW 方程的解, 因为确定 FFW 方程中时间微分的阶次需要比较原方程中含时间的两个微分的阶次. 最后, 给出两个使用分数阶变分迭代法的算例. 算例结果证明了所提方法的有效性.

**关键词:** 分数阶 Fornberg-Whitham 方程; 分数阶变分迭代法; Lagrange 乘子; 近似解; 初值问题

中图分类号: O175.29 文献标志码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.002

## 引言

在过去 30 年间,大量地研究使用了分数阶微分来模拟自然现象及工程问题.与整数阶相比,分数阶导数建立的模型更能接近实际<sup>[1-6]</sup>.但是大多数分数阶微分方程没有精确的解析解,因此众多学者致力于求分数阶微分方程解的功能强大且稳定的数值或解析方法.这些方法包括差分法<sup>[7-8]</sup>、同伦分析法 (homotopy analysis method, HAM)<sup>[9]</sup>、Adomian 分解法 (Adomian decomposition method, ADM)<sup>[10-12]</sup>、同伦摄动法 (homotopy perturbation method, HPM)<sup>[13]</sup>、变分迭代法 (variational iteration method, VIM)<sup>[14]</sup>、同伦变换摄动法 (homotopy perturbation iteration method, HPTM)<sup>[15]</sup>等.在寻求线性和非线性问题的近似解时变分迭代法<sup>[16-18]</sup>是一种有效的方法,所得解析解的序列能够不断逼近真实解.许多学者使用 VIM 解决问题时结合了 Adomian 或 He 多项式,或提出改进方法,如文献[19-22].

本文考虑如下时间分数阶的 Fornberg-Whitham 方程(FFW):

$${}_0^C D_t^\alpha u - u_{xxt} + u_x = uu_{xxx} - uu_x + 3u_x u_{xx}, \quad t > 0, \alpha > 0. \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2013-08-27; 修订日期: 2013-10-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11202146)

作者简介: 鲍四元(1980—),男,安徽人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: bsiyuan@126.com);  
邓子辰(1964—),男,西安人,教授,博士生导师(E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

其初始条件为

$$u(x, 0) = Ae^{x/2}, \tag{2}$$

其中  $u$  表示位移函数,  $\alpha$  表示分数阶微分的阶次. 这里采用了工程中常用的 Caputo 分数阶导数, 而  $A$  是任意常数.

基于文献[23], 把式(1)中的非线性项  $uu_x$  改为  $u^2u_x$ , 本文提出一个改进的分数阶 Fornberg-Whitham 方程

$${}_0^C D_t^\alpha u - u_{xxx} + u_x = uu_{xxx} - u^2u_x + 3u_xu_{xx}, \quad t > 0, \alpha > 0. \tag{3}$$

当  $\alpha = 1$  时, FFW 方程式(1)和(2)变为经典的非线性 Fornberg-Whitham 方程, 这个方程在孤立子理论中具有重要意义. Fornberg 和 Whitham<sup>[24]</sup> 获得了一种如下形式的尖峰解  $u(x, t) = Ae^{|x-4t/3|/2}$ . 当  $0 < \alpha < 1$  时, 即一般情况下的 FFW 方程近年也已经被不少学者研究, 如 Abidi 和 Omrani<sup>[25]</sup>, Gupta 和 Singh<sup>[26]</sup>, Saker 等<sup>[27]</sup>, Merdan 等<sup>[28]</sup> 和 Lu<sup>[29]</sup> 等.

分数阶微分问题的变分迭代法中, Lagrange 乘子的确定是关键. 早期的文献中近似采用整数阶微分方程对应的变分迭代法中的 Lagrange 乘子, 这是不恰当的. 最近 Laplace 变换在一些著名的解析法中使用以简化求解过程并提高解的精度<sup>[30-33]</sup>. Wu(吴国成)<sup>[34]</sup> 等基于 Laplace 变换提出一种简单而有效的方法确定了分数阶微分问题的 Lagrange 乘子的通用形式.

基于文献[34]提出的 Lagrange 乘子, 本文使用 FVIM 方法求解 FFW 方程及改进的 FFW 方程, 求解时 FFW 方程需按  $\alpha \geq 1$  和  $0 < \alpha < 1$  分类. 并给出算例验证其有效性.

## 1 分数阶变分迭代法中 Lagrange 乘子的确定

首先给出 3 个相关的基本定义.

**定义 1** 关于函数  $f(t)$  的分数阶积分的定义如下:

$$I_{a,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0. \tag{4}$$

**定义 2** 关于函数  $f(t)$  的 Caputo 型分数阶导数的定义如下:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \tag{5}$$

$t > a, m - 1 < \alpha < m \in \mathbf{Z}_+$ .

**定义 3** 对  ${}_0^C D_t^\alpha u$  的拉氏变换如下:

$$L[{}_0^C D_t^\alpha u] = s^\alpha \bar{u}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0^+) s^{\alpha-1-k}, \quad m - 1 < \alpha \leq m, \tag{6}$$

其中  $L$  是拉氏算子, 且  $\bar{u}(s) = L[u(t)]$ .

假设  $\bar{h}(s) = L[h(t)]$ , 且  $\bar{g}(s) = L[g(t)]$ , 则卷积定理如下:

$$h(t) * g(t) = \int_0^t h(t - \tau)g(\tau) d\tau \tag{7}$$

且

$$\bar{h}(s)\bar{g}(s) = L[h(t) * g(t)]. \tag{8}$$

考虑如下的通用的分数阶微分方程:

$${}_0^C D_t^\alpha u + R[u] + N[u] = f(\tau), \tag{9}$$

其中  $R[u]$  是线性项, 而  $N[u]$  是非线性项.

通过 RL 积分得到式(9)对应的校正泛函是

$$u_{n+1} = u_n + {}_0 I_t^\alpha \lambda(t, \tau) [{}_0^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)], \tag{10}$$

其中  $R[u_n], N[u_n]$  是限制性变分.

对式(10)两边同时取拉氏变换式如下:

$$\bar{u}_{n+1}(s) = \bar{u}_n(s) + L[{}_0I_t^\alpha \lambda(t, \tau) ({}_0^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau))]. \quad (11)$$

注意到

$${}_0I_t^\alpha \lambda(t, \tau) {}_0^C D_t^\alpha u_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \lambda(t, \tau) {}_0^C D_t^\alpha u_n(\tau) d\tau. \quad (12)$$

设 Lagrange 乘子  $\lambda(t, \tau) = \lambda(X)|_{X=t-\tau}$ , 式(12)左端对应的 RL 积分项可理解为一种卷积, 即函数  $a(t) = (\lambda(t, \tau)/\Gamma(\alpha))t^{\alpha-1}$  与项  ${}_0^C D_t^\alpha u_n(t)$  的卷积.

令校正泛函式(11)关于  $\bar{u}_n(s)$  具有驻值, 并对式(12)两边同时做变分运算, 可得  $\bar{a}(s) = -1/s^\alpha, a(t) = -(1/\Gamma(\alpha))t^{\alpha-1}$ , 从而确定 Lagrange 乘子如下:

$$\lambda(t, \tau) = -1. \quad (13)$$

式(13)代入式(10)得

$$u_{n+1} = u_n - {}_0I_t^\alpha [{}_0^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)]. \quad (14)$$

实际上, 变分迭代关系式(14)可通过常规的 Riemann 积分得到

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^t \lambda(t, \tau) [{}_0^C D_t^\alpha u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)] d\tau, \quad (15)$$

其中项  $R[u_n], N[u_n]$  是对应于限制性变分的, 而 Lagrange 乘子由下式确定:

$$\lambda(t, \tau) = \frac{(-1)^\alpha (\tau - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (16)$$

结论式(15)和(16)适用于  $\alpha$  为任意正实数的情形.

## 2 FFW 方程的分数阶变分迭代解

下面使用分数阶变分迭代法(以下简称 FVIM) 求解微分方程(1). 为确定 FFW 方程中对时间的微分阶次的较大值, 应比较  $\alpha$  值与 1 的大小. 下面分别讨论  $\alpha \geq 1$  和  $0 < \alpha < 1$  两种情况.

### 2.1 $\alpha \geq 1$ 时 FFW 方程的解

当  $\alpha \geq 1$  时, 方程(1) 是一个时间分数阶微分方程, 分数阶微分的阶次  $\alpha$  大于方程中含时间导数项  $u_{xxx}(x, t)$  的阶次 1. 根据式(15)和(16), 可得变分迭代公式如下:

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \frac{(t - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [u_{n\tau}^\alpha(x, \tau) - u_{nxx\tau}(x, \tau) + u_{nx}(x, \tau) - u_n(x, \tau) u_{nxx}(x, \tau) + u_n u_{nx} - 3u_{nx}(x, \tau) u_{nxx}(x, \tau)] d\tau. \quad (17)$$

式(2)给出迭代的初始值  $u_0(x, 0) = Ae^{x/2}$ , 利用迭代公式(17), 可得如下若干次近似项:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x, t) = Ae^{x/2}, \\ u_1(x, t) = Ae^{x/2} \left( 1 - \frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \right), \\ u_2(x, t) = Ae^{x/2} \left( 1 - \frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha - \frac{1}{8\Gamma(2\alpha)} t^{2\alpha-1} + \frac{1}{4\Gamma(1+2\alpha)} t^{2\alpha} \right), \\ u_3(x, t) = Ae^{x/2} \left( 1 - \frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha - \frac{1}{8\Gamma(2\alpha)} t^{2\alpha-1} + \frac{1}{4\Gamma(1+2\alpha)} t^{2\alpha} - \frac{1}{32\Gamma(3\alpha-1)} t^{3\alpha-2} + \frac{1}{8\Gamma(3\alpha)} t^{3\alpha-1} - \frac{1}{8\Gamma(3\alpha)} t^{3\alpha} \right), \\ \dots \end{array} \right. \quad (18)$$

其他的近似解可借助符号运算软件获得,结论式(18)与文献[25,31]中的结论相同.

特别地,当  $\alpha = 1, A = 4/3$  时,式(18)中的  $u_2(x, t)$  和  $u_3(x, t)$  化简为

$$\begin{cases} u_2(x, t) = \frac{4}{3} e^{x/2} \left( 1 - \frac{5}{8} t + \frac{1}{8} t^2 \right), \\ u_3(x, t) = \frac{4}{3} e^{x/2} \left( 1 - \frac{21}{32} t + \frac{3}{16} t^2 - \frac{1}{48} t^3 \right). \end{cases} \quad (19)$$

此结果与文献[28]中的公式一致.

### 2.2 $0 < \alpha < 1$ 时 FFW 方程的解

由经典的 FW 方程的解,根据初值条件式(2)可设方程式(1)的解具有如下形式:

$$u(x, t) = Ae^{x/2}v(t). \quad (20)$$

此时,方程(1)可转化为

$${}_0^C D_t^\alpha u - \frac{1}{4} u_t + u_x = uu_{xxx} - uu_x + 3u_x u_{xx}, \quad t > 0, \alpha > 0. \quad (21)$$

方程式(21)可改写为

$$u_t - 4{}_0^C D_t^\alpha u - 4u_x - 4(uu_x - uu_{xx} - 3u_x u_{xx}) = 0. \quad (22)$$

尽管方程中含有  $\alpha$  阶时间分数导数,由于  $\alpha < 1$ , 方程(22)是关于时间的一阶微分方程. 在经典的变分迭代法中,Lagrange 乘子  $\lambda = -1$ ,可得如下的变分迭代格式:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t [ & u_\tau(x, \tau) - 4{}_0^C D_\tau^\alpha u(x, \tau) - 4u_x(x, \tau) - \\ & 4(u(x, \tau)u_x(x, \tau) - u(x, \tau)u_{xx}(x, \tau) - 3u_x(x, \tau)u_{xx}(x, \tau)) ] d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

当方程的解有式(20)所示形式时,上述变分迭代格式可化简为

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t [ u_\tau(x, \tau) - 4{}_0^C D_\tau^\alpha u(x, \tau) - 2u(x, \tau) ] d\tau. \quad (24)$$

利用迭代公式(23)和初值条件式(2),可得如下近似解析解:

$$\begin{cases} u_0(x, t) = Ae^{x/2}, \\ u_1(x, t) = Ae^{x/2}(1 + 2t), \\ u_2(x, t) = Ae^{x/2} \left( 1 + 2t + 2t^2 + \frac{8}{\Gamma(3 - \alpha)} t^{2-\alpha} \right), \\ u_3(x, t) = Ae^{x/2} \left( 1 + 2t + \frac{8}{\Gamma(3 - \alpha)} t^{2-\alpha} + 2t^2 + \right. \\ \left. \frac{32}{\Gamma(4 - 2\alpha)} t^{3-2\alpha} + \frac{32}{\Gamma(4 - \alpha)} t^{3-\alpha} + \frac{4}{3} t^3 \right), \\ \dots\dots \end{cases} \quad (25)$$

其他的近似解可借助符号运算软件获得.

### 3 改进的 FFW 方程的变分迭代解

改进的时间分数阶的 Fornberg-Whitham 方程为式(3),其中  $\alpha$  表示分数阶微分的阶次,设其初始条件为

$$u(x, 0) = A \operatorname{sech}^2 cx, \quad (26)$$

其中  $A, c$  为常数.

### 3.1 $\alpha \geq 1$ 时改进 FFW 方程的解

当  $\alpha \geq 1$  时, 方程(3) 可理解为关于时间的分数阶微分方程, 分数阶微分的阶次  $\alpha$  大于方程中含时间导数项  $u_{xxx}(x, t)$  的阶次 1, 根据式(15) 和(16), 可得变分迭代格式如下:

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [u_{nt}^\alpha(x, \tau) - u_{nxt}(x, \tau) + u_{nx}(x, \tau) - u_n(x, \tau)u_{nxx}(x, \tau) + u_n^2(x, \tau)\bar{u}_{nx}(x, \tau) - 3u_{nx}(x, \tau)u_{nxx}(x, \tau)] d\tau. \quad (27)$$

设  $A = 3(\sqrt{15} - 5)/4, c = \sqrt{10(5 - \sqrt{15})}/20$ , 由式(26) 得

$$u_0 = (3/4)(\sqrt{15} - 5) \operatorname{sech}^2(cx),$$

代入式(27) 计算得

$$u_1 = u_0 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} cA \operatorname{tanh} cx [2\operatorname{sech}^2 cx + (24 - 6\sqrt{15})\operatorname{sech}^4 cx]. \quad (28)$$

此结果可表示为

$$u_1 = u_0 + P_5(\operatorname{tanh} cx)t^\alpha, \quad (29)$$

其中  $P_5(x)$  表示关于  $x$  的 5 次多项式.

基于式(29) 和迭代格式(27), 可得

$$u_2 = u_1 + Q_7(\operatorname{tanh} cx)t^{2\alpha-1} + Q_{12}(\operatorname{tanh} cx)t^{2\alpha} + Q_{13}(\operatorname{tanh} cx)t^{3\alpha} + Q_{16}(\operatorname{tanh} cx)t^{4\alpha}, \quad (30)$$

其中  $Q_i(x)$  表示关于  $x$  的  $i$  次多项式(其中  $i = 7, 12, 13, 16$ ), 具体形式略去.

类似可得  $u_3, u_4, \dots$ , 其具体表达式较复杂, 略去.

设  $u_1 = f(x) + g(x)t^\alpha$ , 其中  $g = ff_{xxx} + 3f_x f_{xx} - f^2 f_x - f_x$ . 则迭代结果式(30) 可由下式确定:

$$u_2 = u_1 + g_{xx} \frac{\Gamma(1 + \alpha)t^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} - (2gff_x + g_x + g_x f^2 - 3g_x f_{xx} - 3g_{xx} f_x - fg_{xxx} - g f_{xxx}) \frac{\Gamma(1 + \alpha)t^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} - (2gfg_x + f_x g^2 - 3g_x g_{xx} - gg_{xxx}) \frac{\Gamma(1 + 2\alpha)t^{3\alpha}}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + g_x g^2 \frac{\Gamma(1 + 3\alpha)t^{4\alpha}}{\Gamma(1 + 4\alpha)}. \quad (31)$$

若  $\alpha = 1$ , 文献[29] 给出改进 FFW 方程的精确解如下:

$$u(x, t) = \frac{3}{4}(\sqrt{15} - 5) \operatorname{sech}^2[ cx - c(5 - \sqrt{15})t ], \quad (32)$$

其中  $c = \sqrt{10(5 - \sqrt{15})}/20$ . 式(32) 中的函数  $\operatorname{sech}^2[ cx - c(5 - \sqrt{15})t ]$  在  $t = 0$  可作 Taylor(泰勒) 展开, 形式如下:

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}^2[ cx - c(5 - \sqrt{15})t ] = & \operatorname{sech}^2 cx + 2c(5 - \sqrt{15}) \operatorname{sech}^2 cx \operatorname{tanh}(cx)t + \\ & c^2(5 - \sqrt{15})^2 (\cosh 2cx - 2) \operatorname{sech}^4(cx)t^2 + \\ & \frac{2}{3} c^3(5 - \sqrt{15})^3 (\cosh 2cx - 5) \operatorname{sech}^4 cx \operatorname{tanh}(cx)t^3 + O(t^4). \end{aligned} \quad (33)$$

特别地, 若  $\alpha = 1$ , 可以验证, 分数阶变分迭代法结果式(27) 的极限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  同式(33).

### 3.2 $0 < \alpha < 1$ 时改进 FFW 方程的解

当  $0 < \alpha < 1$  时, 方程(3) 可理解为一个时间分数阶微分方程, 分数阶微分的阶次  $\alpha$  小于

方程中含时间导数项  $u_{xxt}(x, t)$  的阶次 1.把式(3)改写为

$$u_{xxt} - \left[ {}_0^C D_t^\alpha u + u_x - (uu_{xxx} - u^2 u_x + 3u_x u_{xx}) \right] = 0. \tag{34}$$

以  $x = x_0$  为积分下限,式(34)中对  $x$  进行两次积分得

$$u_t + u_{xt} \Big|_{x=x_0} - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \left[ {}_0^C D_t^\alpha u + u_x - uu_{xxx} + u^2 u_x - 3u_x u_{xx} \right] dx dx = 0. \tag{35}$$

根据式(15)和(16),可得方程式(35)对应的变分迭代公式如下:

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left\{ u_\tau(x, \tau) - u_\tau(x_0, \tau) - \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \left[ {}_0^C D_\tau^\alpha u(x, \tau) + u_x(x, \tau) + (u^2(x, \tau)u_x(x, \tau) - u(x, \tau)u_{xxx}(x, \tau) - 3u_x(x, \tau)u_{xx}(x, \tau)) \right] dx dx \right\} d\tau. \tag{36}$$

由式(26)对应的初值  $u_0$ ,代入迭代式(36),计算可得各阶近似结果.设  $x_0 = 0$ ,则  $u_1$  的结果为

$$u_1 = u_0 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} A \left[ \left( 2 - \frac{\sqrt{15}}{2} \right) \tanh cx \operatorname{sech}^2 cx - (21 - 5\sqrt{15}) \tanh cx + \left( 19 - \frac{9\sqrt{15}}{2} \right) cx \right], \tag{37}$$

其中,  $A = 3(\sqrt{15} - 5)/4, c = \sqrt{10(5 - \sqrt{15})}/20$ ,其他阶近似解由于表达式复杂而略去.

### 4 算 例

**例 1** 对 FFW 微分方程式(1),初值条件(2)中,令  $A = 1$ .引入

$$v_i(t) = u_i(x, t)/e^{x/2}. \tag{38}$$

取  $\alpha = 1.5$ ,图 1 给出按式(16)得到的  $v_i(t)$  随时间在区间  $t \in [0, 4]$  的变化曲线( $i = 2, 3, 4, 5$ ),其中  $v_3(t)$  与  $v_5(t)$  非常接近,而  $v_4(t)$  和  $v_5(t)$  基本重合.

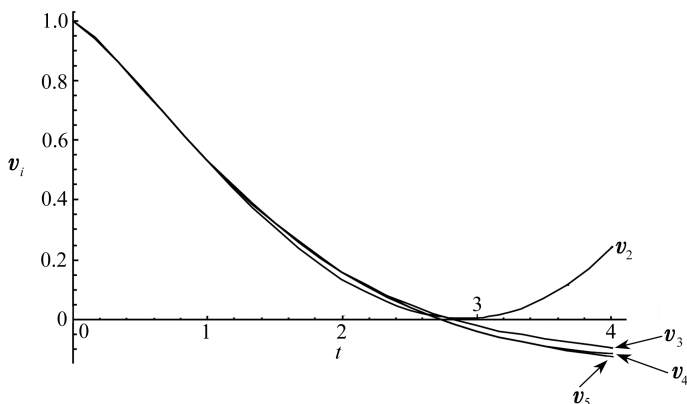


图 1  $\alpha = 1.5$  时,FFW 方程中  $v_i(t) (i = 2, 3, 4, 5)$  随时间的变化曲线

Fig.1 The varying curve of  $v_i(t) (i = 2, 3, 4, 5)$  in FFW equation when  $\alpha = 1.5$

类似地,图 2 给出按式(18)得到的  $v_i(t)$  在时间区间  $t \in [0, 8]$  内的变化曲线( $i = 10, 11, \dots, 30$ ),其中  $v_{11}(t)$  与  $v_{30}(t)$  非常接近,而  $v_i(t) (i = 12, 13, \dots, 30)$  对应的各条曲线基本重合.

图 3 给出按式(18)得到的  $u_5(x, t)$  的空间曲面图形.

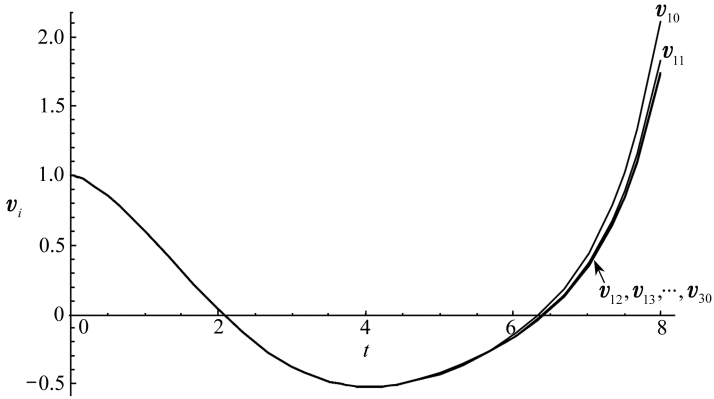


图2  $\alpha = 1.5$  时,FFW 方程中  $v_i(t) (i = 10, 11, \dots, 30)$  随时间的变化曲线

Fig.2 The varying curve of  $v_i(t) (i = 10, 11, \dots, 30)$  in FFW equation when  $\alpha = 1.5$

取  $\alpha = 0.5$ ,图4 给出按式 (25) 得到的  $v_i(t)$  随时间的变化曲线(迭代次数  $i = 10, 20, 25, 28, 30$ ), 其中  $v_{20}(t)$  与  $v_{25}(t)$  在图上已经比较接近, 而  $v_{25}(t), v_{28}(t)$  和  $v_{30}(t)$  基本重合. 图 5 给出按式 (25) 得到的  $u_{25}(x, t)$  的空间曲面图形.

例 2 改进的 FFW 方程式 (3) 和初值条件式 (26) 中取

$$A = 3(\sqrt{15} - 5)/4,$$

$$c = \sqrt{10(5 - \sqrt{15})}/20.$$

对改进 FFW 方程, 取  $\alpha = 1$ , 图 6 给出按式 (30) 得到的二阶近似解  $u_2(x, t)$  的曲面图, 以及按精确解式 (32) 得到的曲面图. 对比发现, 两者基本一致.

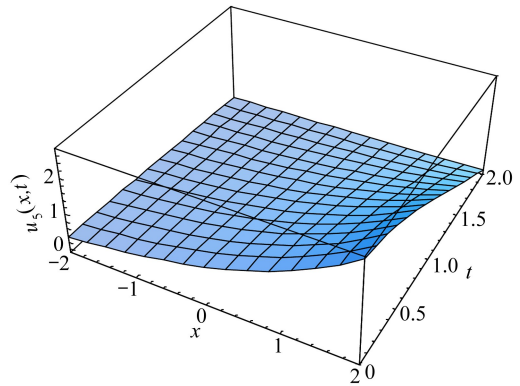


图3  $\alpha = 1.5$  时,FFW 方程中  $u_5(x, t)$  的空间曲面图形

Fig.3 The curved surface of  $u_5(x, t)$  in FFW equation when  $\alpha = 1.5$

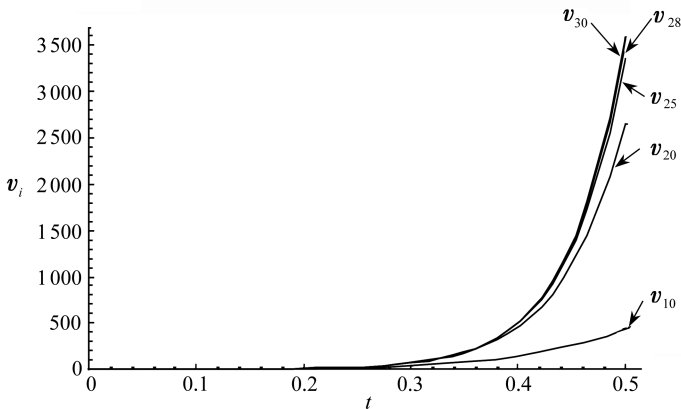


图4  $\alpha = 0.5$  时,FFW 方程中  $v_i(t) (i = 10, 20, 25, 28, 30)$  随时间的变化曲线

Fig.4 The varying curve of  $v_i(t) (i = 10, 20, 25, 28, 30)$  in FFW equation when  $\alpha = 0.5$

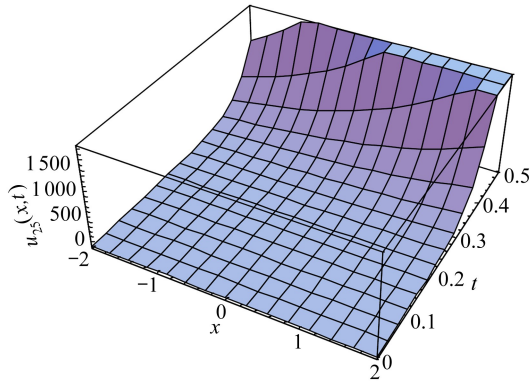


图 5  $\alpha = 0.5$  时, FFW 方程中  $u_{25}(x,t)$  的空间曲面图形

Fig.5 The curved surface of  $u_{25}(x,t)$  in FFW equation when  $\alpha = 0.5$

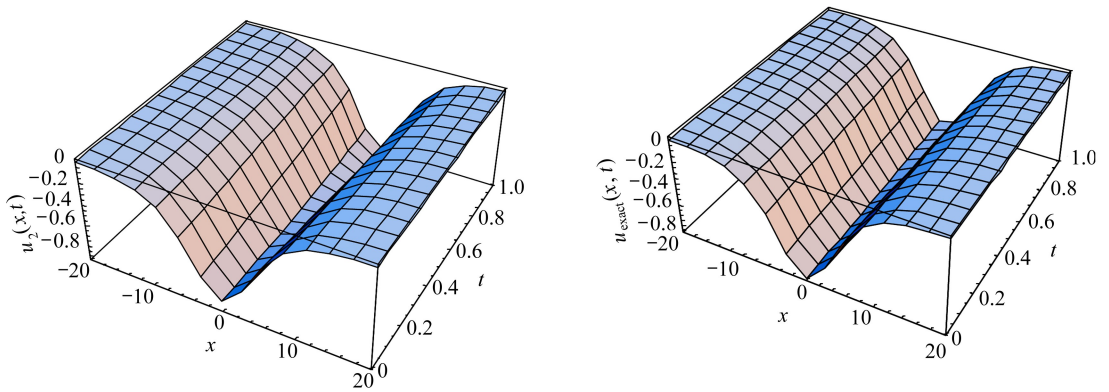


图 6  $\alpha = 1$  时,改进 FFW 方程中  $u_2(x,t)$  与精确解的图形的对比

Fig.6 Comparison of the curves between the accurate solution and  $u_2(x,t)$  in FFW equation when  $\alpha = 1$

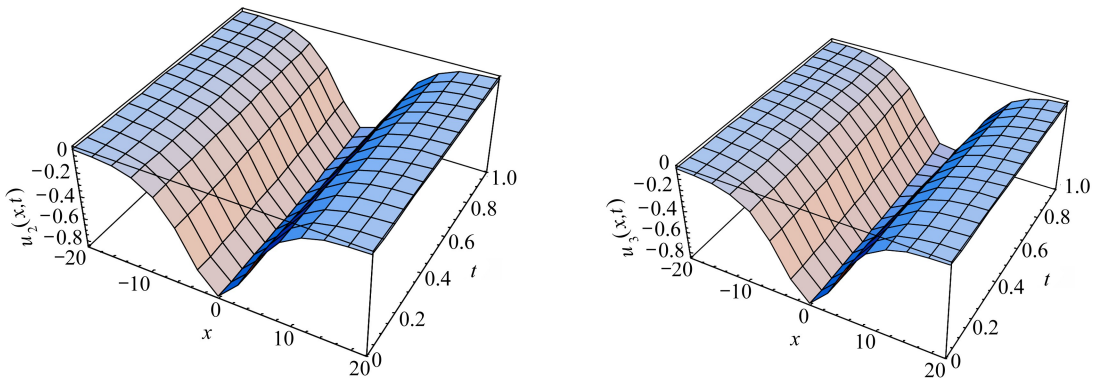


图 7  $\alpha = 1.5$  时,改进 FFW 方程中  $u_2(x,t)$  与  $u_3(x,t)$  对应图形的对比

Fig.7 Comparison of the curves between  $u_2(x,t)$  and  $u_3(x,t)$  in FFW equation when  $\alpha = 1.5$

类似地,  $\alpha = 1.5$  时,图 7 给出按式(31)得到的二阶近似解  $u_2(x,t)$  与三阶近似解  $u_3(x,t)$  的曲面图,对比发现,两者非常接近.

以上结果说明了分数阶变分迭代法求解分数阶 Fornberg-Whitham 方程及其改进方程的有效性.



## 5 结 论

基于拉氏变换,确定了适合分数阶问题的变分迭代法中的 Lagrange 乘子.在变分迭代法求解 FFW 方程及其改进方程时,需按分数微分阶次  $\alpha$  与 1 的大小关系分类,在  $\alpha \geq 1$  与  $0 < \alpha < 1$  两类情况下位移函数的表达式完全不同.

利用分数阶问题的变分迭代法(FVIM)得到了分数阶非线性 Fornberg-Whitham 方程及改进方程的若干阶解析近似解.与经典的变分迭代法(VIM)相比,分数阶问题的变分迭代法能够求解含有时间分数微分项的 Fornberg-Whitham 方程.文献中已有的一些整数阶 Fornberg-Whitham 问题的结果成为本文算例结果的特例,这说明本文方法的可行性.

### 参考文献(References):

- [1] 孙文,孙洪广,李西成.力学与工程问题的分数阶导数建模[M].北京:科学出版社,2010.(SUN Wen, SUN Hong-guang, LI Xi-cheng. *Modeling Using the Fractional Derivative in Mechanics and Engineering Problems*[M]. Beijing: Science Press, 2010.(in Chinese))
- [2] Miller K S, Ross B. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*[M]. New York: Wiley, 1993.
- [3] Oldham K B, Spanier J. *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*[M]. New York: Academic Press, 1974.
- [4] Debnath L. Fractional integrals and fractional differential equations in fluid mechanics[J]. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2003, **6**(2): 119-155.
- [5] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [6] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*[M]. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- [7] DENG Wei-hua. Short memory principle and a predictor-corrector approach for fractional differential equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, **206**(1): 174-188.
- [8] Liu F W, Anh V, Turner I. Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, **166**(1): 209-219.
- [9] Odibat Z, Momani S. A generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2008, **21**(2): 194-199.
- [10] LIAO Shi-jun. A short review on the homotopy analysis method in fluid mechanics[J]. *Journal of Hydrodynamics, Series B*, 2010, **22**(5): 882-884.
- [11] LI Chang-pin, WANG Yi-hong. Numerical algorithm based on Adomian decomposition for fractional differential equations[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2009, **57**(10): 1672-1681.
- [12] Duan J S, Rach R, Buleanu D, Wazwaz A M. A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations[J]. *Communications in Fractional Calculus*, 2012, **3**(2): 73-99.
- [13] Momani S, Odibat Z. Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order[J]. *Physics Letters A*, 2007, **365**(5/6): 345-350.
- [14] HE Ji-huan. Variational iteration method for delay differential equations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 1997, **2**(4): 230-235.
- [15] GUO Shi-min, MEI Li-quan, LI Ying. Fractional variational homotopy perturbation iteration

- method and its application to a fractional diffusion equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, **219**(11): 5909-5917.
- [16] HE Ji-huan, WU Xu-hong. Variational iteration method: new development and applications [J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2007, **54**(7/8): 881-894.
- [17] HE Ji-huan. Asymptotic methods for solitary solutions and compactons[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012; 916793.
- [18] 莫嘉琪, 张伟江, 陈贤峰. 一类强非线性发展方程孤波变分迭代解法[J]. 物理学报, 2009, **58**(11): 7397-7401.(MO Jia-qi, ZHANG Wei-jiang, CHEN Xian-feng. Variational iteration method for solving a class of strongly nonlinear evolution equations[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(11): 7397-7401.(in Chinese))
- [19] Abbasbandy S. A new application of He's variational iteration method for quadratic Riccati differential equation by using Adomian's polynomials[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, **207**(1): 59-63.
- [20] Noor M A, Mohyud-Din S T. Variational iteration method for solving higher-order nonlinear boundary value problems using He's polynomials[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2008, **9**(2): 141-156.
- [21] GENG Fa-zhan. A modified variational iteration method for solving Riccati differential equations[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2010, **60**(7): 1868-1872.
- [22] Ghorbani A, Momani S. An effective variational iteration algorithm for solving Riccati differential equations[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2010, **23**(8): 922-927.
- [23] HE Bin, MENG Qing, LI Shao-lin. Explicit peakon and solitary wave solutions for the modified Fornberg-Whitham equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, **217**(5): 1976-1982.
- [24] Fornberg B, Whitham G B. A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena[J]. *Phil Trans R Soc A*, 1978, **289**: 373-404.
- [25] Abidi F, Omrani K. The homotopy analysis method for solving the Fornberg-Whitham equation and comparison with Adomian's decomposition method[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2010, **59**(8): 2743-2750.
- [26] Gupta P K, Singh M. Homotopy perturbation method for fractional Fornberg-Whitham equation[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2011, **61**(2): 250-254.
- [27] Saker M G, Erdogan F, Yildirim A. Variational iteration method for the time fractional Fornberg-Whitham equation [J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2012, **63**(9): 1382-1388.
- [28] Merdan M, Gökdoğan A, Yıldırım A, Mohyud-Din S T. Numerical simulation of fractional Fornberg-Whitham equation by differential transformation method[J]. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, **2012**: 1-8.
- [29] Lu J. An analytical approach to the Fornberg-Whitham type equations by using the variational iteration method[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2011, **61**(8): 2010-2013.
- [30] Javidi M, Raji M A. Combination of Laplace transform and homotopy perturbation method to solve the parabolic partial differential equations[J]. *Commun Fract Calc*, 2012, **3**(1): 10-19.
- [31] Singha J, Vitae A, Kumarb D, Vitae A, Kumar S. New treatment of fractional Fornberg-Whitham equation via Laplace transform[J]. *Ain Shams Engineering Journal*, 2013, **4**(3): 557-562.
- [32] Zeng D Q, Qin Y M. The Laplace-Adomian-Pade technique for the seepage flows with the Rie-

- mann-Liouville derivatives[J]. *Commun Fract Calc*, 2012, **3**(1): 26-29.
- [33] Tsai P Y, Chen C K. An approximate analytic solution of the nonlinear Riccati differential equation[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2010, **347**(10): 1850-1862.
- [34] WU Guo-cheng, Baleanu D. Variational iteration method for the Burgers' flow with fractional derivatives—new Lagrange multipliers [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, **37**(9): 6183-6190.

## Variational Iteration Solutions for Fractional Fornberg-Whitham Equation and Its Modified Equation

BAO Si-yuan<sup>1</sup>, DENG Zi-chen<sup>2,3</sup>

(1. *Department of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou, Jiangsu 215011, P.R.China;*

2. *Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;*

3. *State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P.R.China)*

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The solutions to the fractional Fornberg-Whitham (FFW) equation and the modified FFW equation generated by change of one nonlinear term  $uu_x$  with  $u^2u_x$  were presented. The fractional variational iteration method (FVIM) was used, in which the Lagrange multiplier was determined with the variational function and the Laplace transformation. Two cases were discussed respectively for the FFW equation because the order of time differentiation was determined through comparison of the two derivatives' orders in the fractional differential equation. Finally, two numerical examples of the FVIM solution were given. The computational results demonstrate the high efficiency of the presented method.

**Key words:** fractional Fornberg-Whitham equation; fractional variational iteration method; Lagrange multiplier; approximate solution; initial value problem

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11202146)