

求解浅水波方程的熵相容格式*

刘友琼, 封建湖, 梁楠, 任炯

(长安大学 理学院, 西安 710064)

摘要: 提出了一种求解浅水波方程组的熵相容格式.在熵稳定通量中添加特征速度差分绝对值的项来抵消解在跨过激波时所产生的熵增,从而实现熵相容.新的数值差分格式具有形式简单、计算效率高、无需添加任何的人工数值粘性的特点.数值算例充分说明了其显著的优点.利用新格式成功地模拟了不同类型溃坝问题的激波、稀疏波传播及溃坝两侧旋涡的形成,是求解浅水波方程组较为理想的方法.

关键词: 数值模拟; 浅水波方程组; 熵相容格式

中图分类号: O354; O241.82 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.003

引 言

当水域沿特征方向的水平尺度比水的深度大得多时,可称为浅水环境,其流体运动的规律可用二维浅水波方程来描述.二维浅水波方程的形式有很多种,本文考虑二维平底无摩擦、自由表面可压缩流的守恒形式的浅水波方程^[1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{g}(\mathbf{U}) = \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{d}(\mathbf{U}) \right) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{d}(\mathbf{U}) \right), \quad (1)$$

其中守恒型向量

$$\mathbf{U} = [h, uh, vh]^T,$$

通量

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = [uh, u^2h + gh^2/2, uvh]^T, \quad \mathbf{g}(\mathbf{U}) = [vh, uvh, v^2h + gh^2/2]^T,$$

以及粘性矢通量 $\mathbf{d} = [0, u, v]^T$. $h = h(x, y, t)$ 是总水深度, $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ 分别是深度平均速度沿着 x, y 方向的分量.式(1)中关于 $(\mathbf{U}, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ 的3个方程各自表示对于浅水流的质量守恒律及在 x, y 方向上的动量守恒律.这些通量包括常数重力加速度 $g > 0$ 及涡粘系数 $\eta > 0$, 由于忽略了小尺度涡的运动,本文计算具有涡流粘度的大规模流运动来描述小规模流的能量传输和耗散.如果涡粘系数为0,方程组(1)降低到无粘的浅水波方程.浅水波方程可用来研究诸如

* 收稿日期: 2013-05-12; 修订日期: 2013-10-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11171043); 中央高校基本科研业务费资助项目(CHD2102TD015)

作者简介: 刘友琼(1989—),女,云南人,硕士生(E-mail: youqiongliu@163.com);
封建湖(1960—),男,陕西人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: jhfeng@chd.edu.cn).

潮汐、涌浪、溃坝、水环境污染扩散等人们关心的实际问题,浅水波方程的更多应用见文献[2-3],方程组(1)也属于双曲守恒律方程,又由于守恒律的非线性性质,数值方法的稳定性结果很难获得.早在19世纪80年代 Osher, Harten, Lax 及 Tadmor 等人对双曲守恒律方程的数值求解已经做了很多工作.Tadmor 在文献[4]里定义了一类二阶的熵守恒格式,得到一种对数值粘性更精确的量化方法,即:一个三点格式只需含有比熵守恒格式更多的粘性则是熵稳定的.熵守恒/熵稳定格式的提出为获得具有物理意义、数值上稳定的解提供了一种简便有效的方法,更易于推广和实际应用.Tadmor 进一步提出分段线性路径的熵稳定格式^[5],适用于 Navier-Stokes(N-S)方程^[6]、浅水波方程^[7]等各种守恒系统.近几年, Ismail 和 Roe 在熵守恒格式的基础上提出了熵相容的 Euler(欧拉)通量函数,新格式在保证熵增正确性的同时也保持了激波稳定性^[8].随后, Mohammed 等将与人工物理耗散机制相结合的熵守恒格式推广至一维粘性 Burgers 方程及 Navier-Stokes 方程^[9].

本文针对浅水波方程构造一个熵相容差分格式,并用该格式模拟了二维部分溃坝问题.熵相容数值矢通量的构造方法类似于 Ismail 处理 Euler 方程的方法^[8]以及最近针对 N-S 方程的熵相容通量的构造^[9],将总能 $E = (gh^2 + u^2h + v^2h)/2$ 作为浅水波方程的熵函数,通过对数值通量的构造使格式满足离散熵不等式.本文所构造的数值格式是熵相容的、无需添加任何人工数值粘性项、非常简单、计算效率高,且与分段线性路径的熵稳定格式^[7]相比,在网格加密及时间较长时不会出现复数及分母为0的情况,是求解二维浅水波方程更为理想的方法.

本文采用空间半离散格式,时间上的推进一律采用三阶强稳定的 Runge-Kutta 方法^[10]:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i^* = \mathbf{U}_i^k + \Delta t L(\mathbf{U}_i^k), \\ \mathbf{U}_i^{**} = \frac{3}{4} \mathbf{U}_i^k + \frac{1}{4} \mathbf{U}_i^* + \frac{\Delta t}{4} L(\mathbf{U}_i^*), \\ \mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{1}{3} \mathbf{U}_i^k + \frac{2}{3} \mathbf{U}_i^{**} + \frac{2\Delta t}{3} L(\mathbf{U}_i^{**}). \end{cases} \quad (2)$$

1 一维无粘浅水波方程

考虑一维无粘浅水波方程初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{U}) = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (3)$$

其中,守恒型变量 $\mathbf{U} = [h, uh]^T$, 通量 $\mathbf{f}(\mathbf{U}) = [hu, gh^2/2 + hu^2]^T$, $h = h(x, t)$ 是总的水深, $u(x, t)$ 是深度平均速度.众所周知,问题(3)的解在有激波形成时往往会出现间断,即使初始条件是光滑的.因此, Lax 提出了弱解的概念^[11], 函数 $\mathbf{U} \in L^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$ 为初值问题(3)的弱解,若对所有的紧支光滑检验函数 $\varphi \in C_0^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$ 满足

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}_+} (\mathbf{U} \varphi_t + \mathbf{f}(\mathbf{U}) \varphi_x) dx dt + \int_{\mathbf{R}} \mathbf{U}(x, 0) \varphi(x, 0) dx = 0.$$

由于上述的弱解并不唯一, Lax 在文献[12]中证明了如果弱解 \mathbf{U} 满足熵稳定条件

$$E(\mathbf{U})_t + Q(\mathbf{U})_x \leq 0, \quad (4)$$

则 \mathbf{U} 是唯一的且具有物理意义.不等式(4)中 $E(\mathbf{U})$ 是 \mathbf{U} 的一个凸函数, $Q(\mathbf{U})$ 满足

$$Q'(\mathbf{U})^T = \mathbf{E}'(\mathbf{U})^T \mathbf{f}'(\mathbf{U}), \quad (5)$$

上述 $E(\mathbf{U})$ 称为熵函数, $Q(\mathbf{U})$ 称为熵通量函数.

对于一维浅水波方程,取内能和势能的总和作为熵函数,即 $E(U) = (gh^2 + u^2h)/2$.由式(5)计算出熵通量函数 $Q(U) = guh^2 + u^3h/2$.熵变量 $V = E'(U) = [gh - u^2/2, u]^T$,熵势 $\psi = guh^2/2$.熵不等式为

$$\frac{d}{dt} \int_x E dx \leq 0. \quad (6)$$

在单元交界面处的熵增定义为 $\dot{U} = \iint_{\Omega} (\partial_t U + \partial_x Q) dx dt = \oint_{\partial\Omega} (U dx - F dt)$,其中 $\Omega \in [0, \infty) \times \mathbf{R}$.通常熵增表现为一个耗散或色散的过程,数学上由一些较小的参数乘以高阶导数来表示.

1.1 熵守恒格式

平均熵守恒格式^[1]及 Tadmor 等提出的分段路径的熵守恒格式^[7]在计算每个通量时都包含复数表达式,而且分段线性路径的显式熵守恒格式的数值稳定性还有争议,在计算时出现大量分母为 0 的警告.2008 年 Fjordholm 等根据浅水波方程自身的特点,构造了简单的显式熵守恒格式 EEC(explicit energy conserving)^[10]避免了这些缺点,其数值通量如下:

$$\tilde{F}_{i+1/2} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} \\ \frac{1}{2} g \bar{h}_{i+1/2}^2 + \bar{h}_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2}^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{其中 } \overline{(\cdot)}_{i+1/2} = \frac{(\cdot)_i + (\cdot)_{i+1}}{2}, \quad \overline{(\cdot)^2}_{i+1/2} = \frac{(\cdot)_i^2 + (\cdot)_{i+1}^2}{2}.$$

由相应格式得到的解保持离散总熵 $S = \Delta x \sum_i E(u_i)$ 不变,熵增为 0.

1.2 熵稳定格式

由于熵守恒格式没有任何的耗散机制,导致数值解表现出较强的色散效应.色散效应使系统的能量重新分布,并以振荡的形式集中在激波附近,见图 1.根据比较原则^[4],通过修正 Roe 通量的扩散因子可以获得熵稳定的数值通量,使之满足离散熵不等式,同时避免振荡的产生. Roe 已经将类似的方法用于 Euler 方程的求解.用熵守恒数值通量式(7)代替 Roe 格式的通量平均项,以及用算术平均求解熵变量形式的数值粘性项,从而获得关于求解一维浅水波方程的 Roe 类型的熵稳定格式 ERoe(entropy stable Roe)^[1].具体数值通量为

$$F_{i+1/2}^{\text{ERoe}} = \tilde{F}_{i+1/2} - \frac{1}{2} \mathbf{R} |\mathbf{A}| \mathbf{R}^T (V_{i+1} - V_i), \quad (8)$$

其中 \mathbf{R} 是 $f'(U)$ 的特征向量矩阵,

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u_{i+1/2} - \sqrt{gh_{i+1/2}} & u_{i+1/2} + \sqrt{gh_{i+1/2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} u_{i+1/2} - \sqrt{gh_{i+1/2}} & 0 \\ 0 & u_{i+1/2} + \sqrt{gh_{i+1/2}} \end{bmatrix}.$$

1.3 熵相容格式

显然,熵稳定格式就是包含比熵守恒格式更多粘性的数值格式.那么怎么添加一个正确的粘性项,使之满足离散熵不等式,同时避免振荡的产生呢?在稳定状态下,这个量的“正确性”取决于通过过渡相产生的熵增 \dot{U} .Lax 早在 1972 年就已经证明了解在跨过激波时的熵增为激波强度的立方阶.这说明数值通量也应该包含一个与激波强度平方阶相当的项.具体地,对数值

通量添加一个与 $|[u]||[u]$ 相当的项,那么熵增就达到 $|[u]||[u]|^2$,其中 $[\cdot] = (\cdot)_R - (\cdot)_L$. Ismail 等在文献[8]中提出了求解一维守恒律方程的熵相容通量的一般形式,并推广到一维 Euler 方程组.本文将 Ismail 等的熵相容通量的一般形式进一步推广到浅水波方程,得到求解一维浅水波方程组(3)的熵相容数值通量如下:

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2} - \frac{1}{2} \mathbf{R} (|\mathbf{A}| + \alpha |\mathbf{A}|) \mathbf{R}^T (\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i), \quad (9)$$

其中

$$\alpha = 1/6, [\mathbf{A}] = \text{diag}(\lambda_{i+1}^1 - \lambda_i^1, \lambda_{i+1}^2 - \lambda_i^2), \lambda_i^1 = u_i - \sqrt{gh_i}, \lambda_i^2 = u_i + \sqrt{gh_i}.$$

熵相容格式简记为 EC(entropy-consistent scheme).

2 二维浅水波方程

考虑二维浅水波方程的守恒形式(1),总能 $E(\mathbf{U}) = (gh^2 + u^2h + v^2h)/2$ 作为熵函数,

$$\frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x} Q^x(\mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y} Q^y(\mathbf{U}) = -\eta h(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2), \quad (10)$$

熵通量

$$\begin{cases} Q^x(\mathbf{U}) = guh^2 + (u^3h + uv^2h)/2 - hu u_x, \\ Q^y(\mathbf{U}) = gvh^2 + (u^2vh + v^3h)/2 - hv v_y. \end{cases}$$

对式(10)进行空间积分得出

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_y \int_x E(\mathbf{U}) dx dy = -\eta \int_y \int_x h(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) dx dy. \quad (11)$$

对于无粘例子 ($\eta = 0$), 总熵守恒满足:

$$\int_y \int_x E(\mathbf{U}(x, t)) dx dy = \int_y \int_x E(\mathbf{U}(x, 0)) dx dy. \quad (12)$$

对 x, y 方向分别采用与一维相似的处理方式,就可以得到二维浅水波方程的半离散格式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_{i,j}(t) + \frac{1}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i+1/2,j}^* - \mathbf{f}_{i-1/2,j}^*) + \frac{1}{\Delta y} (\mathbf{g}_{i,j+1/2}^* - \mathbf{g}_{i,j-1/2}^*) = \\ \frac{\eta}{\Delta x} \left(\hat{h}_{i+1/2,j} \frac{\mathbf{d}_{i+1,j} - \mathbf{d}_{i,j}}{\Delta x} - \hat{h}_{i-1/2,j} \frac{\mathbf{d}_{i,j} - \mathbf{d}_{i-1,j}}{\Delta x} \right) + \\ \frac{\eta}{\Delta y} \left(\hat{h}_{i,j+1/2} \frac{\mathbf{d}_{i,j+1} - \mathbf{d}_{i,j}}{\Delta y} - \hat{h}_{i,j-1/2} \frac{\mathbf{d}_{i,j} - \mathbf{d}_{i,j-1}}{\Delta y} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\mathbf{f}_{i+1/2,j}^*, \mathbf{g}_{i,j+1/2}^*$ 是数值通量, $\hat{h}_{i+1/2,j} = (h_{i+1,j} + h_{i,j})/2$.

2.1 熵守恒格式

与一维情形类似,构造出求解二维浅水波方程的熵守恒数值通量如下:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{i+1/2,j} \bar{u}_{i+1/2,j} \\ \bar{h}_{i+1/2,j} \bar{u}_{i+1/2,j}^2 + \frac{g}{2} (\bar{h}^2)_{i+1/2,j} \\ \bar{h}_{i+1/2,j} \bar{u}_{i+1/2,j} \bar{v}_{i+1/2,j} \end{bmatrix}, \quad (14a)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{i,j+1/2} = \begin{bmatrix} \bar{h}_{i,j+1/2} \bar{v}_{i,j+1/2} \\ \bar{h}_{i,j+1/2} \bar{u}_{i,j+1/2} \bar{v}_{i,j+1/2} \\ \bar{h}_{i,j+1/2} (\bar{v}_{i,j+1/2})^2 + \frac{g}{2} (\bar{h}^2)_{i,j+1/2} \end{bmatrix}, \quad (14b)$$

其中 $\overline{(\cdot)}_{i+1/2,j} = \frac{(\cdot)_{i,j} + (\cdot)_{i+1,j}}{2}$, $\overline{(\cdot)^2}_{i+1/2,j} = \frac{(\cdot)_{i,j}^2 + (\cdot)_{i+1,j}^2}{2}$.

2.2 熵稳定格式

二维浅水波方程的熵稳定格式是一维情形的直接推广, $\mathbf{R}^x, \mathbf{A}^x$ 分别是 $\mathbf{f}'(U)$ 的特征向量、特征值矩阵, $\mathbf{R}^y, \mathbf{A}^y$ 分别是 $\mathbf{g}'(U)$ 的特征向量、特征值矩阵, 数值通量分别为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{i+1/2,j}^{\text{ERoe}} = \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} - \frac{1}{2} \mathbf{R}^x |\mathbf{A}^x| (\mathbf{R}^x)^T (\mathbf{V}_{i+1,j} - \mathbf{V}_{i,j}), \\ \mathbf{G}_{i,j+1/2}^{\text{ERoe}} = \tilde{\mathbf{G}}_{i,j+1/2} - \frac{1}{2} \mathbf{R}^y |\mathbf{A}^y| (\mathbf{R}^y)^T (\mathbf{V}_{i,j+1} - \mathbf{V}_{i,j}), \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{R}^x = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u - \sqrt{gh} & 0 & u + \sqrt{gh} \\ v & \sqrt{2gh} & v \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}^y = \frac{1}{\sqrt{2g}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u & -\sqrt{2gh} & u \\ v - \sqrt{gh} & 0 & v + \sqrt{gh} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^x = \text{diag}(u - \sqrt{gh}, u, u + \sqrt{gh}), \quad \mathbf{A}^y = \text{diag}(v - \sqrt{gh}, v, v + \sqrt{gh}).$$

$\mathbf{R}^x, \mathbf{A}^x$ 中的 $h = \bar{h}_{i+1/2,j}, u = \bar{u}_{i+1/2,j}, v = \bar{v}_{i+1/2,j}$. $\mathbf{R}^y, \mathbf{A}^y$ 中的 $h = \bar{h}_{i,j+1/2}, u = \bar{u}_{i,j+1/2}, v = \bar{v}_{i,j+1/2}$.

2.3 熵相容格式

将本文构造的一维熵相容格式直接推广到二维浅水波方程, 即得数值通量如下:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{i+1/2,j} = \tilde{\mathbf{F}}_{i+1/2,j} - \frac{1}{2} \mathbf{R}^x (|\mathbf{A}^x| + \alpha |[\mathbf{A}]^x|) (\mathbf{R}^x)^T (\mathbf{V}_{i+1,j} - \mathbf{V}_{i,j}), \\ \mathbf{G}_{i,j+1/2} = \tilde{\mathbf{G}}_{i,j+1/2} - \frac{1}{2} \mathbf{R}^y (|\mathbf{A}^y| + \alpha |[\mathbf{A}]^y|) (\mathbf{R}^y)^T (\mathbf{V}_{i,j+1} - \mathbf{V}_{i,j}), \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$[\mathbf{A}]^x = \text{diag}((\lambda_x^1)_{i+1,j} - (\lambda_x^1)_{i,j}, (\lambda_x^2)_{i+1,j} - (\lambda_x^2)_{i,j}, (\lambda_x^3)_{i+1,j} - (\lambda_x^3)_{i,j}),$$

$$[\mathbf{A}]^y = \text{diag}((\lambda_y^1)_{i,j+1} - (\lambda_y^1)_{i,j}, (\lambda_y^2)_{i,j+1} - (\lambda_y^2)_{i,j}, (\lambda_y^3)_{i,j+1} - (\lambda_y^3)_{i,j}),$$

$$(\lambda_x^1)_{i,j} = u_{i,j} - \sqrt{gh_{i,j}}, \quad (\lambda_x^2)_{i,j} = u_{i,j}, \quad (\lambda_x^3)_{i,j} = u_{i,j} + \sqrt{gh_{i,j}},$$

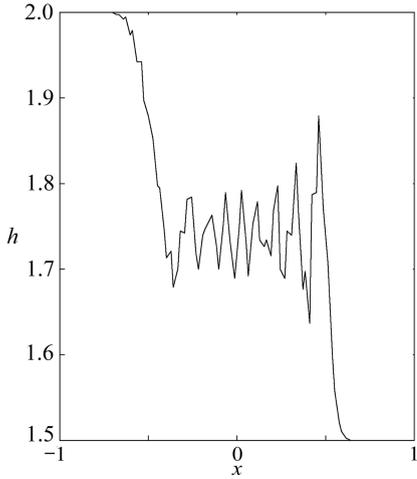
$$(\lambda_y^1)_{i,j} = v_{i,j} - \sqrt{gh_{i,j}}, \quad (\lambda_y^2)_{i,j} = v_{i,j}, \quad (\lambda_y^3)_{i,j} = v_{i,j} + \sqrt{gh_{i,j}},$$

$$\alpha = 1/6.$$

3 数值算例

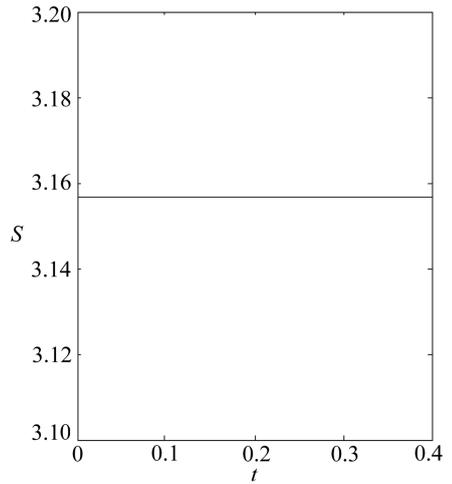
算例 1 考虑一维溃坝问题

$$h(x,0) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 1.5, & x > 0, \end{cases} \quad u(x,0) \equiv 0.$$



(a) $t = 0.4$ 时刻的 h

(a) Total water depth h at $t = 0.4$

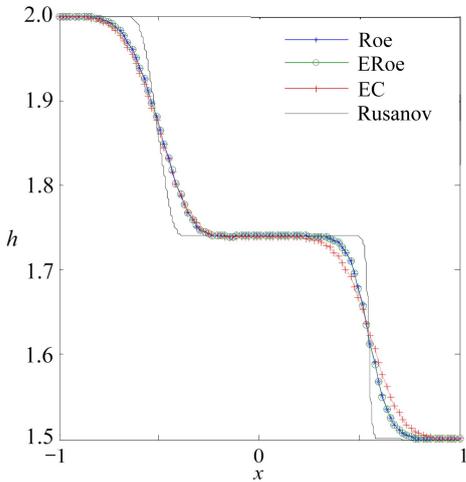


(b) 时间与总熵的关系图

(b) Total entropy vs. time

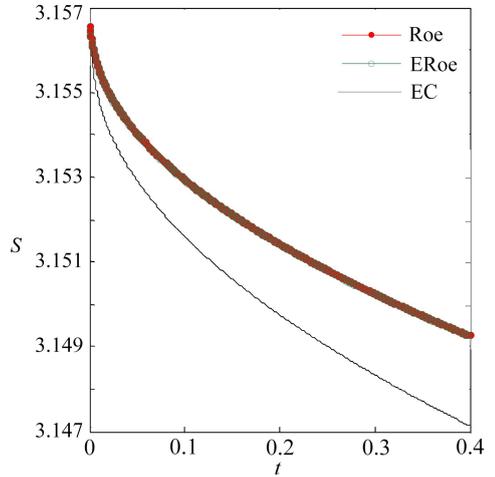
图1 熵守恒格式求解一维溃坝问题的结果

Fig.1 Results computed with the entropy conservation scheme for a 1-dimensional dam break problem



(a) $t = 0.4$ 时刻的 h

(a) Total water depth h at $t = 0.4$



(b) 时间与总熵的关系图

(b) Total entropy vs. time

图2 Roe, ERoe, 熵相容格式求解一维溃坝问题的结果

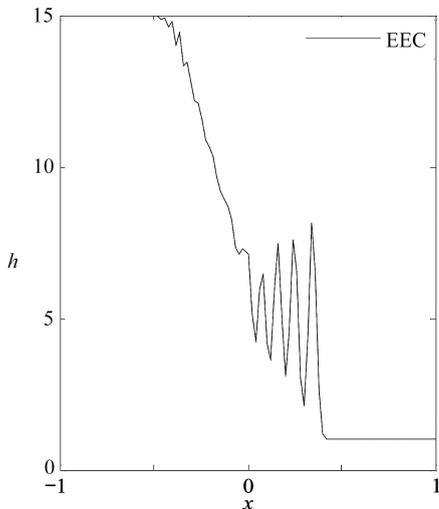
Fig.2 Results computed with the Roe, ERoe, entropy-consistent schemes for a 1-dimensional dam break problem

取 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy) 条件数为 0.02, 空间网格数为 100, 计算到 $t = 0.4$. 本算例的精确解包括一个向左传播的稀疏波及一个向右传播的激波. 图 1 是熵守恒格式计算结果, 激波头有 Δx 阶的周期性的非物理振荡, 这是由于熵守恒格式缺乏任何的扩散机制, 非线性色散效应重新分配能量转化为更高的波数. 在离散网格上, 最高波数为 $1/\Delta x$. 图 2(a) 是 3 种格式计

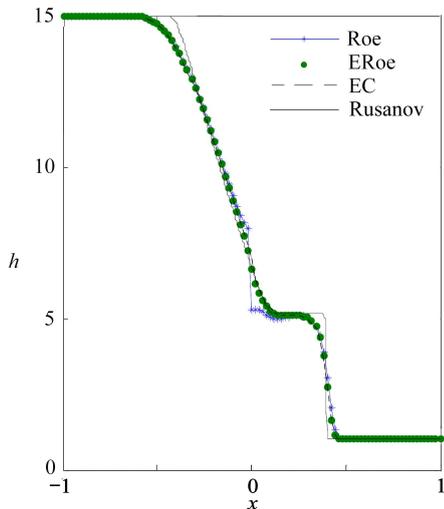
算结果与由 1 200 个网格点加密的 Rusanov 格式计算的数值解作为参考,虽然与熵守恒格式相比较,激波与稀疏波都被更加抹平了,但是所有的非物理振荡消除了,并且熵相容格式计算的结果更好.如此,增加的数值扩散达到了理想效应.图 2(b)是总熵与时间关系图,表明了格式的熵稳定性.

算例 2 考虑一维大型溃坝问题

$$h(x,0) = \begin{cases} 15, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad u(x,0) \equiv 0.$$



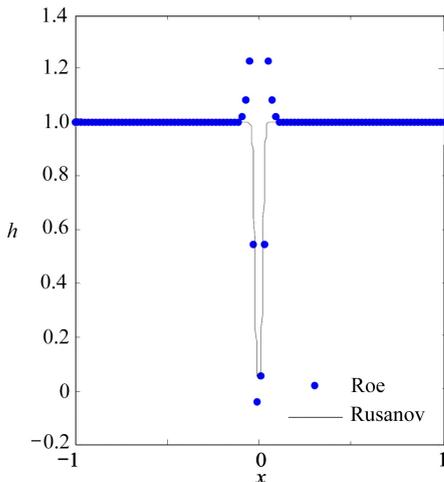
(a) 熵守恒格式
(a) With the EEC scheme



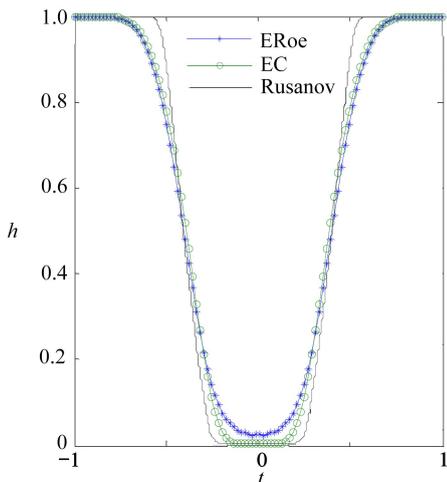
(b) Roe, 熵稳定格式, 熵相容格式
(b) With the Roe, ERoe, EC schemes

图 3 大型溃坝问题的计算结果

Fig.3 Results of a large dam break problem



(a) Roe 格式, $t = 0.0056$
(a) With the Roe scheme, $t = 0.0056$



(b) 熵稳定格式, 熵相容格式, $t = 0.1$
(b) With the ERoe, EC schemes, $t = 0.1$

图 4 高度接近 0 的溃坝问题的计算结果

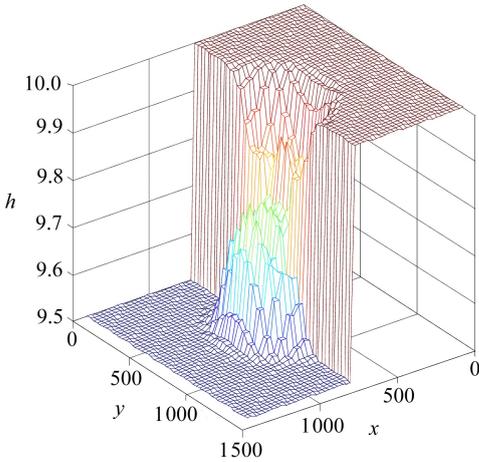
Fig.4 Results of a dam break problem of near-zero height

取 CFL 条件数为 0.02,空间网格数为 100,计算到 $t = 0.1$.本算例的精确解包括一个向左传播的稀疏波及一个向右传播的激波.图 3(a)是熵守恒格式计算结果,图 3(b)是 3 种格式计算结果与由 1 200 个网格点加密的 Rusanov 格式计算的数值解作为参考.由图 3 可知 Roe 格式直接产生了一个非物理的静态激波,而熵稳定格式、熵相容格式都抑制了振荡,得到了较理想的结果.

算例 3 考虑一维高度接近 0 的溃坝问题

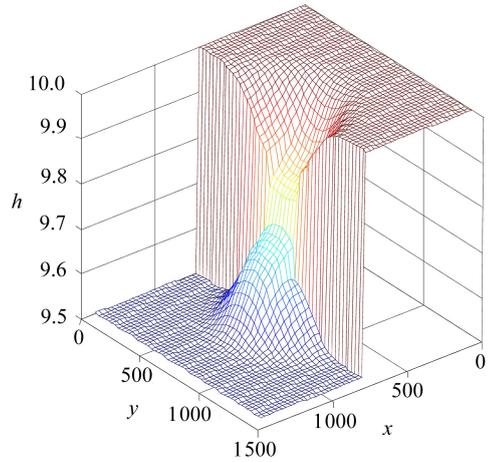
$$h(x,0) \equiv 1, u(x,0) = \begin{cases} -4, & x < 0, \\ 4, & x > 0. \end{cases}$$

取 CFL 条件数为 0.02,空间网格数为 100.数值实验表明:熵守恒格式不能求解出此问题的近似解,结果为 NaN(分母为 0);熵稳定格式及熵守恒格式都保持了浅水波方程水深非负的物理特性,且熵相容格式计算效果较好;Roe 格式违反了物理特性.详见图 4.



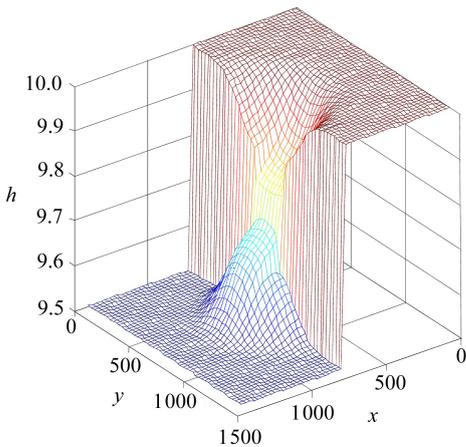
(a) 熵守恒格式

(a) With the entropy conservation scheme



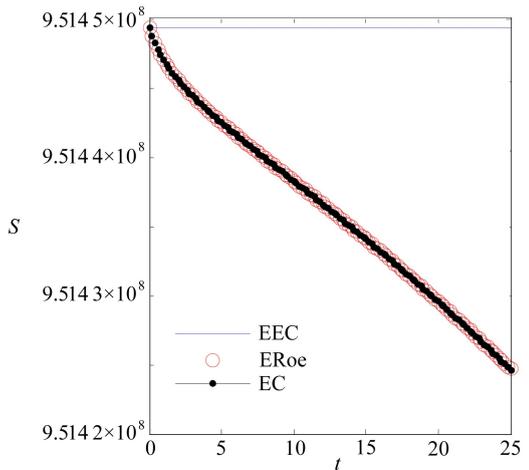
(b) 熵稳定格式

(b) With the entropy stable scheme



(c) 熵相容格式

(c) With the entropy-consistent scheme



(d) 总熵与时间关系图

(d) Total entropy vs. time

图 5 二维浅水波方程组求解部分溃坝问题

Fig.5 Results of 2-dimensional shallow water equations for a partial dam break problem

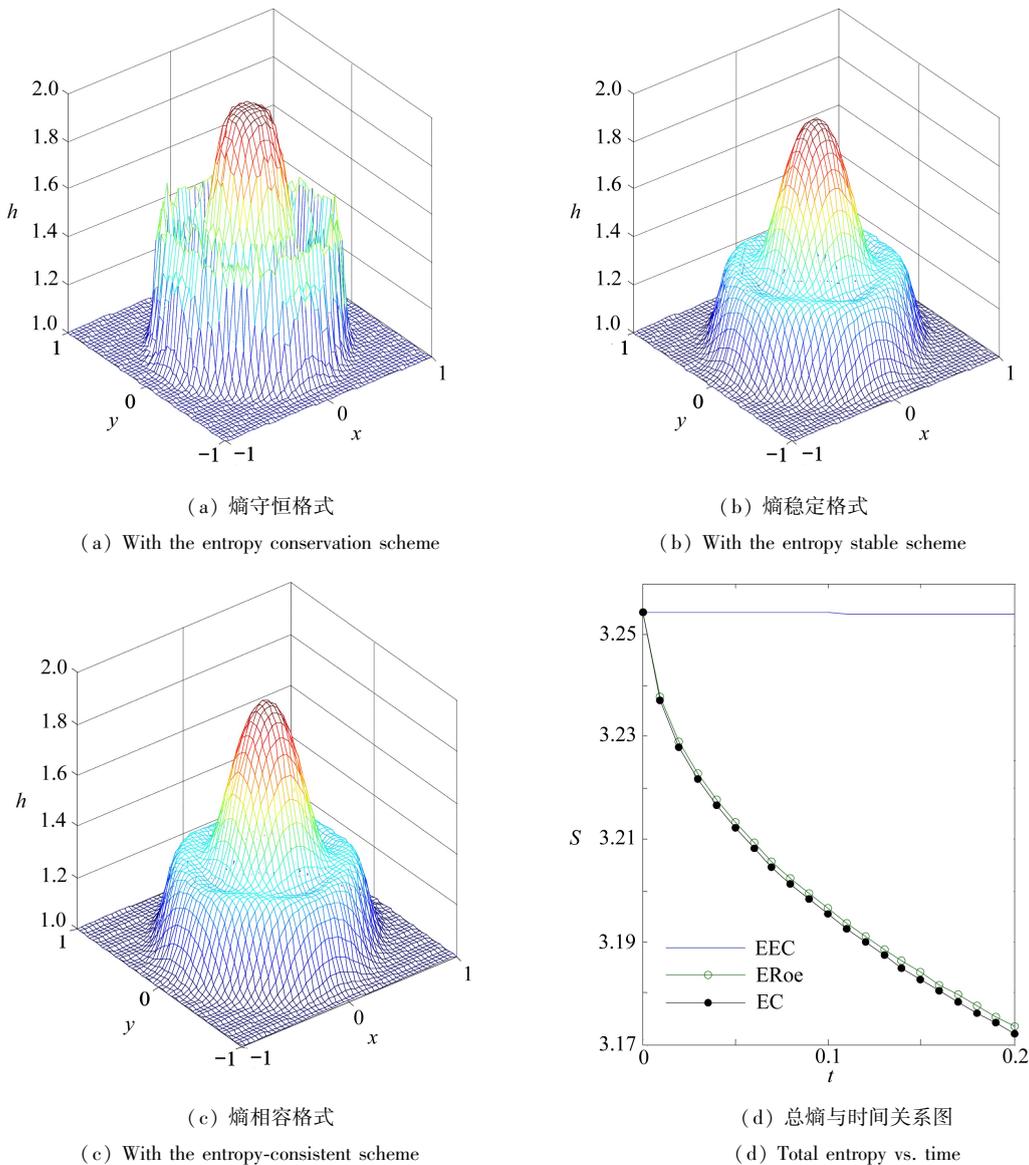


图6 二维浅水波方程组求解圆形溃坝问题

Fig.6 Results of 2-dimensional shallow water equations for a cylindrical dam break problem

算例 4 考虑由 Fennema 及 Chaudhry^[13] 最初提出的二维无摩擦部分溃坝问题.等宽矩形 (1 400×1 400) 平底二维水域, 中间位置有一固定无摩擦水坝, 上下游均为静水, 水深分别为 10 和 9.5, 计算区域的四周采用 Neumann 边界条件, 沿着中间位置的水坝假设为反射条件. 其中水坝从 560 到 840 之间自 0 时刻起溃决, 产生了正、负水波. 正波向下游传播, 负波向上游传播, 而且受负波影响水域的水深下降, 水流向两边扩散, 形成回流. 重力加速度常数 $g = 9.8$, 图 5 为空间网格数 50×50 , $\Delta x = \Delta y = 28$, $\Delta t = 0.2$, 计算时间到 $t = 25$ 时的水深计算结果. 如图所示, 可见水深 h 的数值解都成功地模拟了圆形激波传播以及在溃坝两侧旋涡的形成. 对于无粘性的浅水波方程组, 熵守恒格式的弥散性误差以伪振荡的形式表现出来, 在溃坝附近很明显, 见图 5(a); 熵稳定格式的解要比熵守恒格式的解光滑, 见图 5(b); 熵相容格式的解也比熵守恒格式的解光滑, 虽然对解有部分抹平, 但通过简单的构造消除了振荡, 精确地捕捉到激波及稀疏

波.熵相容格式与分段线性路径的显式构造方法^[7]相比:计算简单、不会出现复数及分母为0的情况,而且在水坝内不会出现上下尖峰.图5(d)显示了不同格式对应的总熵(总能量)关于时间的变化,进一步说明格式的熵稳定性.

算例5 考虑二维浅水波方程组圆形溃坝问题^[1].计算区域为 $[-1,1] \times [-1,1]$,初始条件为

$$h(x,y,0) = \begin{cases} 2, & \sqrt{x^2 + y^2} < 0.5, \\ 1, & \text{其它}, \end{cases} \quad u(x,y,0) \equiv 0.$$

采用 Neumann 边界条件,取 CFL 条件数为 0.25,常数 $g = 1$,空间网格数为 50×50 ,计算时间到 $t = 0.2$.水深高度的精确解包括两部分,分别为向内的稀疏波和向外的激波.计算结果如图6所示,可见数值解对激波和稀疏波都准确地捕捉到了,然而熵守恒格式在激波上沿产生了明显地振荡.熵稳定格式和熵相容格式都抑制了振荡,且熵相容格式对溃坝现象捕捉效果更为锐利.

4 结 论

本文构造了求解浅水波方程的熵相容格式,该格式与物理概念联系紧密,有效避免产生非物理解.与分段线性路径的熵稳定格式相比,新格式具有构造简单、计算效率高、无需添加任何的人工数值粘性项等优点.即使在网格加密,计算时间较长时也不会出现复数及分母为0的情况.数值结果表明新格式是模拟浅水波方程组不同类型的溃坝问题较为理想的方法.也可以将新格式与限制器、WENO(weighted essentially non-oscillatory)重构相结合达到对溃坝现象更加高分辨率高精度的模拟,这方面的进展将在以后的文章中详述.

参考文献(References):

- [1] Fjordholm U S. Structure preserving finite volume methods for the shallow water equations [D]. Master Thesis. Norway: University of Oslo, 2009.
- [2] Arakawa A, Lamb V R. Computational design of the basic dynamical process of the UCLA general circulation mode[J]. *Methods in Computational Physics*, 1977, **17**: 173-265.
- [3] LeVeque R J. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **146**(1): 346-365.
- [4] Tadmor E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws I[J]. *Mathematics of Computation*, 1987, **49**(179): 91-103.
- [5] Tadmor E. Entropy stability theory for difference approximation of nonlinear conservation laws and related time-dependent problems[J]. *Acta Numerica*, 2003, **12**: 451-512.
- [6] Tadmor E, Zhong W. Entropy stable approximations of Navier-Stokes equations with no artificial numerical viscosity[J]. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 2006, **3**(3): 529-559.
- [7] Tadmor E, Zhong W. Energy preserving and stable approximations for the two-dimensional shallow water equations[C]//Munthe-Kaas H, Owren B, eds. *Mathematics and Computation, a Contemporary View: The Abel Symposium 2006. The 3rd Abel Symposia*. Alesund, Norway. Berlin: Springer, 2008: 67-94.
- [8] Ismail F, Roe P L. Affordable, entropy-consistent Euler flux functions II: entropy production at shocks[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(15): 5410-5436.
- [9] Mohammed A N, Ismail F. Study of an entropy-consistent Navier-Stokes flux[J]. *Internation-*

- al Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2013, **27**(1): 1-14.
- [10] Fjordholm U, Mishra S, Tadmor E. Energy preserving and energy stable schemes for the shallow water equations[C]//Cucker F, Pinkus A, Todd M J, eds. *Foundations of Computational Mathematics, Hong Kong 2008. London Mathematical Society Lecture Note Series*(363). London: Cambridge University Press, 2009: 93-139.
- [11] Lax P D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computations [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1954, **7**(1): 159-193.
- [12] Lax P D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves[C]//*CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, 1973, **11**.
- [13] Fennema R J, Chaudhry M H. Explicit methods for 2-D transient free surface flows[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1990, **116**(8): 1013-1034.

An Entropy-Consistent Flux Scheme for Shallow Water Equations

LIU You-qiong, FENG Jian-hu, LIANG Nan, REN Jiong
(*School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China*)

Abstract: An entropy-consistent flux scheme was developed for the shallow water equations. To offset the entropy increase with cubic order of the shock strength across shock waves, the term of absolute value of the characteristic velocity difference was added into the entropy stable flux, so as to achieve entropy consistency. The new numerical difference scheme featured extreme simplicity, high efficiency, and none additional artificial numerical viscous terms. Numerical experiments of the proposed scheme adequately demonstrated these advantages. The new scheme successfully simulates both the circular shock water wave propagations and the vortices formed on both sides of the breach in different kinds of dam break problems, thus makes a better method to solve the shallow water equations.

Key words: numerical simulation; shallow water equations; entropy-consistent scheme

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11171043)