文章编号:1000-0887(2013)12-1258-08

一类太空等离子体单粒子运动模型的同宿轨*

陈丽娟， 鲁世平

(南京信息工程大学 数学与统计学院, 南京 210044)

摘要: 由于空间等离子体间接观察的不确定性和不可重复性以及只能进行被动实验的局限性,为了准确地描述空间等离子体粒子运动的动力学特征,建立了一类太空等离子体单粒子运动的非线性模型.首先运用重合度理论探讨了一类非线性问题的周期解,然后将其应用于太空等离子体单粒子运动模型的同宿轨问题的研究,获得了该模型存在同宿轨的新结果,为研究空间环境提供了更好的观测和理论基础.

关 键 词: 非线性; 太空等离子体; 周期解; 同宿轨

中图分类号: O193 **文献标志码**: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.004

引 言

太空等离子体是各种带电(中性)粒子及其波动组成的复杂的非线性系统,它涵盖了从地球电离层到星系间广袤的宇宙空间.太阳等离子体的研究,对于深入理解日地空间磁层各部分之间的波和粒子的能量传输过程,各种不稳定现象以及非线性过程等有着十分重要的意义.

太空等离子体广泛应用于太阳风和行星际磁场、行星自身的磁场和电离层及其相互作用形成的复杂的边界层的研究[1-6].在现有的观测条件下,空间和地面望远镜的分辨能力远远不能达到等离子体特征尺度(即 Debye(德拜)长度)的量级,因而太阳物理研究主要集中在宏观的磁流体力学的尺度,相应的理论研究大多不涉及微观带电粒子的基本物理过程,而是更加侧重于理论与大尺度观测现象的比较和解释.然而实际上任何宏观或大尺度的唯象理论必然包含而且最终归结于某些基本物理过程的研究,因此,研究太空等离子体单粒子运动模型在一定程度上可以克服太阳和空间等离子体间接观测的不确定性和不可重复性,以及只能进行被动实验的局限性,也为研究空间环境,提供更好的观测和理论基础.

太空等离子体运动过程是非线性的多维的物理过程,只用一般的线性模式去研究它们的运动机理是不够理想的.许多学者已经研究了非线性问题,如莫嘉琪等在大气物理、海洋气候、动力系统等方面利用数值分析方法研究了一些非线性问题[7-12].本文借助于 Marwhin 重合度及

* **收稿日期**: 2013-05-06; **修订日期**: 2013-09-13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11271197);教育部科学技术重点资助项目(207047);江苏省普通高校研究生科研创新计划项目资助项目(CXLX13_502)
作者简介: 陈丽娟(1973—),女,江苏靖江人,副教授,博士生(通讯作者. E-mail: cljung@sohu.com).

泛函理论探讨了一类太空等离子体单粒子非线性运动模型的同宿轨问题.

1 非线性单粒子运动模型

等离子体主要是由带电粒子组成的电中性的气体,电磁力对等离子体的行为有重要作用,因此在描述等离子体行为的重要方程中必然包含电磁力.如果电场为 $\boldsymbol{E}$,磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的电磁场作用在质量为 m,电荷为 q,速度为 $\boldsymbol{v}$ 的粒子上,粒子就会受到 Lorentz(洛伦兹)力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}}$,而且由 Lorentz 力定律可得到 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{E}q + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$.假设速度足够小,可以不考虑相对论效应,根据 Newton(牛顿)定律,粒子动量 $m\boldsymbol{v}$ 的变化率为

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{E}q + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_q, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{F}_q$ 代表非电磁力,例如重力等.

经常遇到的是非电磁力足够小可以忽略的情况,可假设 $\boldsymbol{F}_q = 0$,然而,在有些情况下重力也很重要,例如在讨论太阳日冕和行星电离层时必须考虑重力的作用,此时 $\boldsymbol{F}_q \neq 0$.又上述的讨论中假设磁场是均匀的,即它的强度和方向在任何地方都是不变的,虽然有时这是很好的近似(例如,地磁场在实验室大小的尺度上可认为几乎不变),但更多的情况并不是这样的.如地磁场近似是偶极场,它的方向和大小随位置都在变化.这说明需要描述变化磁场中的粒子运动.再考虑到实际的空间天气现象和扰动,因此,在方程(1)中,各系数一般都与时间 t 有关且 $\boldsymbol{F}_q \neq 0$.由此,本文建立如下的太空等离子体单粒子运动的 n 维非线性模型:

$$\boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}(t)) = \boldsymbol{F}(t), \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \cdots, v_n(t))^{\mathrm{T}} \in R^n$, $t \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{G} \in C(\mathbf{R} \times R^n, R^n)$, $\boldsymbol{F} \in C(\mathbf{R}, R^n)$.

若方程(2)有解 $\boldsymbol{v}(t)$ 且满足当 $|t| \to +\infty$, $\boldsymbol{v}(t) \to 0$,则称 $\boldsymbol{v}(t)$ 为方程(2)的一个同宿解.

构造方程

$$\boldsymbol{v}'(t) + \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}(t)) = \boldsymbol{F}_k(t), \tag{3}$$

其中对 $\forall k \in N$, $\boldsymbol{F}_k(t): \mathbf{R} \to R^n$ 是一个 $2kT$- 周期函数,且满足

$$\boldsymbol{F}_k(t) = \begin{cases} \boldsymbol{F}(t), & t \in [-kT, kT - \varepsilon_0], \\ \boldsymbol{F}(kT - \varepsilon_0) + \dfrac{\boldsymbol{F}(-kT) - \boldsymbol{F}(kT - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0}(t - kT + \varepsilon_0), & \\ & t \in [kT - \varepsilon_0, kT], \end{cases} \tag{4}$$

T 为一给定的正常数,ε_0 为 $(0,T)$ 上与 k 无关的常数.

本文首先利用 Marwhin 重合度理论找到方程(3)的 $2kT$- 周期解集 $\{\boldsymbol{v}_k(t)\}$,然后利用泛函理论中的紧性说明周期解集 $\{\boldsymbol{v}_k(t)\}$ 存在唯一的极限点 $\boldsymbol{v}_0(t)$,最后说明该极限点 $\boldsymbol{v}_0(t)$ 即为方程(2)的一个同宿解.

2 引　理

$\forall k \in N$, 令

$$C_{2kT} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in C(\mathbf{R}, R^n), \boldsymbol{x}(t + 2kT) \equiv \boldsymbol{x}(t)\}, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in C_{2kT},$$

定义

$$|\boldsymbol{x}(t)| = \sqrt{\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{t \in [-kT, kT]} |\boldsymbol{x}(t)|,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_r = \left(\int_{-kT}^{kT} |\boldsymbol{x}(t)|^r \mathrm{d}t\right)^{1/r}, \qquad r \in (1, +\infty).$$

引理 1[13] 设 $a>0,\boldsymbol{q}\in W^{1,p}(\mathbf{R},R^n)$,则对 $\forall t\in\mathbf{R}$,下面的不等式成立:

$$|\boldsymbol{q}(t)|\leqslant(2a)^{-1/\mu}\left(\int_{t-a}^{t+a}|\boldsymbol{q}(s)|^{\mu}\mathrm{d}s\right)^{1/\mu}+a(2a)^{-1/p}\left(\int_{t-a}^{t+a}|\boldsymbol{q}'(s)|^{p}\mathrm{d}s\right)^{1/p},$$

其中 $\mu,p\in(1,+\infty)$.

引理 2[13] 设 $\boldsymbol{q}\in W_{2kT}^{1,p}(\mathbf{R},R^n)$,则

$$\|\boldsymbol{q}\|_{\infty}\leqslant T^{-1/v}\left(\int_{-kT}^{kT}|\boldsymbol{q}(s)|^{v}\mathrm{d}s\right)^{1/v}+T^{(p-1)/p}\left(\int_{-kT}^{kT}|\boldsymbol{q}'(s)|^{p}\mathrm{d}s\right)^{1/p},$$

其中 v 和 p 为常数且 $v>1,p>1$.

引理 3[14] 设 X,Y 是两个 Banach 空间, $L:D(L)\subset X\to Y$ 为指标为 0 的 Fredholm 算子, $\Omega\subset X$ 为有界开集,$N:X\to Y$ 为 $\bar{\Omega}$ 上是 L- 紧的,如果满足下列条件:

1) 对任意的 $\lambda\in(0,1),x\in\partial\Omega\cap D(L)$,均有 $Lx\neq\lambda Nx$;

2) 对任意的 $x\in\operatorname{Ker}L\cap\partial\Omega$,均有 $QNx\neq0$;

3) $\deg\{JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker}L,0\}\neq0$,其中 $J:\operatorname{Im}Q\to\operatorname{Ker}L$ 同构.

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\bar{\Omega}\cap D(L)$ 上至少存在一个解.

引理 4 如果存在常数 $a>0,b>0$ 使得下列条件满足:

(H_1): $|\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v})|\geqslant a|\boldsymbol{v}|^2,\quad\forall(t,\boldsymbol{v})\in[0,T]\times R^n$;

(H_2): $|\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v})|\leqslant b|\boldsymbol{v}|,\quad\forall(t,\boldsymbol{v})\in[0,T]\times R^n$;

(H_3): $\int_{\mathbf{R}}|\boldsymbol{F}(t)|^2\mathrm{d}t<+\infty$,

则方程(3)至少存在一个 $2kT$- 周期解.

注 2.1 由式(4)可得

$$\|\boldsymbol{F}_k\|_2\leqslant\left(\int_{-kT}^{kT-\varepsilon_0}|\boldsymbol{F}_k(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}+\left(\int_{kT-\varepsilon_0}^{kT}|\boldsymbol{F}_k(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}}|\boldsymbol{F}_k(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}+\sqrt{\varepsilon_0}\sup_{t\in\mathbf{R}}|\boldsymbol{F}(t)|,$$

由条件(H_3)可得, $\|\boldsymbol{F}_k\|_2\leqslant+\infty$,且 $\|\boldsymbol{F}_k\|_2$ 是与 $k\in N$ 无关的常数.

证明 令 $X=C_{2kT}$, 分别定义算子

$$\begin{cases}L:D(L)\subset X\to X,\ L\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}',\\N:X\to X,\ [N\boldsymbol{v}](t)=\boldsymbol{F}_k(t)-\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}),\end{cases}\tag{5}$$

其中 $D(L)=\{\boldsymbol{v}\mid\boldsymbol{v}\in C_{2kT},\ \boldsymbol{v}'\in C(\mathbf{R},R^n)\}$.

易见,方程(3)可转换成算子方程 $L\boldsymbol{v}=N\boldsymbol{v}$.此外,根据算子的定义,不难得出

$$\operatorname{Ker}L=R^n,\ \operatorname{Im}L=\left\{\boldsymbol{v}\in X,\ \int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{v}(s)\mathrm{d}s=0\right\},$$

因此, L 是指标为 0 的 Fredholm 算子.

令投影算子 P,Q 分别为

$$P:X\to\operatorname{Ker}L,\ P\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(0),$$

$$Q:X\to\operatorname{Im}Q,\ Q\boldsymbol{v}=\frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{v}(s)\mathrm{d}s,$$

则 $\operatorname{Ker}L=\operatorname{Im}P$, $\operatorname{Ker}Q=\operatorname{Im}L$.

令 $K:\operatorname{Im}L\to D(L)\cap\operatorname{Ker}P$ 表示 $L|_{D(L)\cap\operatorname{Ker}P}:D(L)\cap\operatorname{Ker}P\to\operatorname{Im}L$ 的唯一逆,则

$$[Ky](t)=\int_0^t y(s)\mathrm{d}s\in D(L).\tag{6}$$

由式(5)、(6)易证 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L- 紧的,其中 Ω 为 X 中的任意有界开集.

令 $\Omega_1=\{\boldsymbol{v}\mid \boldsymbol{v}\in D(L)\subset C_{2kT},\ L\boldsymbol{v}=\lambda N\boldsymbol{v},\ \lambda\in(0,1)\}$,则 $\forall\boldsymbol{v}\in\Omega_1$,有

$$\boldsymbol{v}'(t)=\lambda\boldsymbol{F}_k(t)-\lambda\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}(t)).\tag{7}$$

将方程(7)两边同时左乘 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)$,在$[-kT,kT]$上对 t 积分,得

$$\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{v}'(t)\mathrm{d}t=\lambda\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_k(t)\mathrm{d}t-\lambda\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}(t))\mathrm{d}t,$$

$$\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}(t))\mathrm{d}t=\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_k(t)\mathrm{d}t.$$

由 Holder 不等式及条件(H_1)得

$$a\|\boldsymbol{v}\|_2^2=\int_{-kT}^{kT}a|\boldsymbol{v}(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_{-kT}^{kT}|\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_k(t)|\mathrm{d}t\leqslant\|\boldsymbol{v}\|_2\cdot\|\boldsymbol{F}_k\|_2,$$

即有

$$\|\boldsymbol{v}\|_2\leqslant\frac{\|\boldsymbol{F}_k\|_2}{a}=M_1,\tag{8}$$

其中 M_1 为与 $k\in N$ 无关的常数.

将方程(7)两边同时左乘 $\boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}(t)$,在$[-kT,kT]$上对 t 积分,得

$$\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{v}'(t)\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_{-kT}^{kT}|\boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}(t)|\cdot|\boldsymbol{F}_k(t)|\mathrm{d}t+\int_{-kT}^{kT}|\boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}(t)|\cdot|\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}(t))|\mathrm{d}t.$$

由 Holder 不等式,式(8)及条件(H_2)得

$$a\|\boldsymbol{v}'\|_2^2\leqslant\|\boldsymbol{v}'\|_2\cdot\|\boldsymbol{F}_k\|_2+b\|\boldsymbol{v}'\|_2\|\boldsymbol{v}\|_2\leqslant$$
$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\|\boldsymbol{v}'\|_2\cdot\|\boldsymbol{F}_k\|_2,$$

即有

$$\|\boldsymbol{v}'\|_2\leqslant\left(1+\frac{b}{a}\right)\|\boldsymbol{F}_k\|_2=M_2,\tag{9}$$

其中 M_2 为与 $k\in N$ 无关的常数.由引理 2,有

$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty\leqslant T^{-1/2}\|\boldsymbol{v}\|_2+\sqrt{T}\|\boldsymbol{v}'\|_2\leqslant T^{-1/2}M_1+\sqrt{T}M_2=M.$$

令

$$\Omega=\{\boldsymbol{v}\in C_{2kT},\ \|\boldsymbol{v}\|_\infty<M+1\},\qquad\forall\boldsymbol{v}\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker}L,$$

则 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}\in R^n$ 且 $|\boldsymbol{c}|=M+1$,

$$QN\boldsymbol{c}=\frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT}[\boldsymbol{F}_k(s)-\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{c})]\mathrm{d}s=\bar{\boldsymbol{F}}_k-\frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{c})\mathrm{d}s,$$

其中 $\bar{\boldsymbol{F}}_k=\frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{F}_k(s)\mathrm{d}s.$

根据条件(H_1),有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{c})\leqslant-a|\boldsymbol{c}|^2$ 或 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{c})\geqslant a|\boldsymbol{c}|^2$.

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{c})\leqslant-a|\boldsymbol{c}|^2$ 时,

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}QN\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}_k-\frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{c})\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}_k + a|\boldsymbol{c}|^2 \geqslant -|\boldsymbol{c}||\bar{\boldsymbol{F}}_k| + a|\boldsymbol{c}|^2 \geqslant a|\boldsymbol{c}|^2 - |\boldsymbol{c}|\,\|\boldsymbol{F}\|_\infty > 0;$$

$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{c}) \geqslant a|\boldsymbol{c}|^2$ 时，

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}QN\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}_k - \frac{1}{2kT}\int_{-kT}^{kT}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{c})\,\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{F}}_k - a|\boldsymbol{c}|^2 \leqslant |\boldsymbol{c}||\bar{\boldsymbol{F}}_k| + a|\boldsymbol{c}|^2 \leqslant |\boldsymbol{c}|\,\|\boldsymbol{F}\|_\infty - a|\boldsymbol{c}|^2 < 0.$$

所以，$\forall \boldsymbol{v} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}\,L, \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}QN\boldsymbol{v} \neq 0$，从而有 $QN\boldsymbol{v} \neq 0$ 即 $N\boldsymbol{v} \notin \mathrm{Im}\,L$.

再令 $J:\mathrm{Im}\,Q \to \mathrm{Ker}\,L,\ J\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

当 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{v}) \leqslant -a|\boldsymbol{v}|^2$，作同伦

$$H(\boldsymbol{v},\xi) = \xi\boldsymbol{v} + (1-\xi)JQN\boldsymbol{v}, \qquad \xi \in [0,1]$$

且

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}H(\boldsymbol{v},\xi) = \xi|\boldsymbol{v}|^2 + (1-\xi)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}QN\boldsymbol{v} > 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}\,L.$$

即 $H(\boldsymbol{v},\xi) \neq 0, \forall \boldsymbol{v} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ \xi \in [0,1]$.因此，

$$\deg(JQN,\ \Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ 0) = \deg(H(\cdot,0),\ \Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ 0) =$$

$$\deg(H(\cdot,1),\ \Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ 0) = \deg(I,\ \Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ 0) \neq 0.$$

当 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{v}) \geqslant a|\boldsymbol{v}|^2$，作同伦

$$H(\boldsymbol{v},\xi) = -\xi\boldsymbol{v} + (1-\xi)JQN\boldsymbol{v}, \qquad \xi \in [0,1]$$

且

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}H(\boldsymbol{v},\xi) = -\xi|\boldsymbol{v}|^2 + (1-\xi)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}QN\boldsymbol{v} < 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}\,L.$$

即 $H(\boldsymbol{v},\xi) \neq 0, \forall \boldsymbol{v} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ \xi \in [0,1]$.因此，

$$\deg(JQN,\ \Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ 0) = \deg(H(\cdot,0),\ \Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ 0) =$$

$$\deg(H(\cdot,1),\ \Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ 0) = \deg(-I,\ \Omega \cap \mathrm{Ker}\,L,\ 0) \neq 0.$$

根据引理 3，方程(3)至少存在一个 $2kT$- 周期解.

注 2.2 若 $\int_{\mathbf{R}}|\boldsymbol{F}(t)|^2\mathrm{d}t < +\infty$，由引理 4，对 $\forall k \in N$，方程(3) 存在一个 $2kT$- 周期解 $\boldsymbol{v}_k(t) \in \Omega$，且

$$\|\boldsymbol{v}_k\|_\infty < M + 1. \tag{10}$$

类似于引理 4 的证明，同样有

$$\|\boldsymbol{v}_k\|_2 \leqslant M_1,\ \|\boldsymbol{v}_k'\|_2 \leqslant M_2, \tag{11}$$

其中 M_1, M_2 为与 $k \in N$ 无关的常数.

引理 5[13] 对任意 $k \in N$，设 $\boldsymbol{v}_k \in C_{2kT}$ 是方程(3) 的一个解且满足式(10)、(11)，则存在 $\boldsymbol{v}_0 \in C(\mathbf{R}, R^n)$，使得对 $\forall[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$，一定存在 $\{\boldsymbol{v}_k\}_{k\in N}$ 的子序列 $\{\boldsymbol{v}_{k_j}\}$ 满足 $\boldsymbol{v}_{k_j}(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\boldsymbol{v}_0(t)$.

3 主要结果

现考虑方程(2)的同宿解存在性问题.

定理 1 设 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 满足条件$(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_3)$，则方程(2)存在同宿解.

证明 根据引理 4，对 $k \in N$，方程(3) 存在一个 $2kT$- 周期解 $\boldsymbol{v}_k(t)$ 满足式(10)、(11).再由引理 5，存在 $\boldsymbol{v}_0 \in C(\mathbf{R}, R^n)$，使得对 $\forall[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$，$\{\boldsymbol{v}_{k_j}\}$ 一致收敛于 $\boldsymbol{v}_0(t)$.下面证明 $\boldsymbol{v}_0(t)$ 恰好为方程(2)的一个同宿解.

1) 证明 $\boldsymbol{v}_0(t)$ 为方程(2)的一个解.

考虑到 $\boldsymbol{v}_{k_j}(t)$ 为方程(3)的一个 $2k_jT$-周期解,

$$\boldsymbol{v}'_{k_j}(t)+\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}_{k_j}(t))=\boldsymbol{F}_{k_j}(t),\qquad t\in[-k_j(t),k_j(t)],\ j\in N.$$

对 $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$,易见一定存在 $j_0\in N$,当 $j>j_0$ 时,$[-k_j(t),k_j(t)]\supset[\alpha,\beta]$.故

$$\boldsymbol{v}'_{k_j}(t)+\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{v}_{k_j}(t))=\boldsymbol{F}(t),\qquad t\in[\alpha,\beta].\tag{12}$$

将式(12)两边从 α 到 β 积分,

$$\boldsymbol{v}_{k_j}(t)-\boldsymbol{v}_{k_j}(\alpha)=\int_\alpha^t[\boldsymbol{F}(s)-\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{v}_{k_j}(s))]\mathrm{d}s.\tag{13}$$

由引理 5,令 $j\to+\infty$,得到

$$\boldsymbol{v}_0(t)-\boldsymbol{v}_0(\alpha)=\int_\alpha^t[\boldsymbol{F}(s)-\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{v}_0(s))]\mathrm{d}s,\qquad t\in[\alpha,\beta].\tag{14}$$

由 α,β 的任意性,式(14)说明了 $\boldsymbol{v}_0(t)$ 为方程(2)的一个解.

2) 证明当 $|t|\to+\infty$,$\boldsymbol{v}_0(t)\to0$.

显然,$\forall i\in N$,$\exists j_i\in N$ 使得对所有 $j>j_i$ 都有

$$\int_{-iT}^{iT}[|\boldsymbol{v}_{k_j}(t)|^2+|\boldsymbol{v}'_{k_j}(t)|^2]\mathrm{d}t\leqslant\int_{-k_jT}^{k_jT}[|\boldsymbol{v}_{k_j}(t)|^2+|\boldsymbol{v}'_{k_j}(t)|^2]\mathrm{d}t\leqslant M_1^2+M_2^2.\tag{15}$$

又

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}[|\boldsymbol{v}_0(t)|^2+|\boldsymbol{v}'_0(t)|^2]\mathrm{d}t=\\&\quad\lim_{i\to+\infty}\int_{-iT}^{iT}[|\boldsymbol{v}_0(t)|^2+|\boldsymbol{v}'_0(t)|^2]\mathrm{d}t=\\&\quad\lim_{i\to+\infty}\lim_{j\to+\infty}\int_{-iT}^{iT}[|\boldsymbol{v}_{k_j}(t)|^2+|\boldsymbol{v}'_{k_j}(t)|^2]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由式(15)可知,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[|\boldsymbol{v}_0(t)|^2+|\boldsymbol{v}'_0(t)|^2]\mathrm{d}t\leqslant M_1^2+M_2^2.$$

从而

$$\int_{|t|>r}[|\boldsymbol{v}_0(t)|^2+|\boldsymbol{v}'_0(t)|^2]\mathrm{d}t\to0,\qquad r\to+\infty.$$

相应地,

$$\int_{|t|>r}|\boldsymbol{v}_0(t)|^2\mathrm{d}t\to0,\ \int_{|t|>r}|\boldsymbol{v}'_0(t)|^2\mathrm{d}t\to0,\qquad r\to+\infty.$$

由引理 1,当 $|t|\to+\infty$ 时,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}_0(t)|\leqslant&(2a)^{-1/2}\left(\int_{t-a}^{t+a}|\boldsymbol{v}_0(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}+\\&a(2a)^{-1/2}\left(\int_{t-a}^{t+a}|\boldsymbol{v}'_0(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\to0.\end{aligned}$$

综上可知,方程(2)存在同宿解.

4　结　　论

太空等离子体是由大量带电粒子集合而成,密度又足够低的系统.由于带电粒子数目很大,所以长程 Coulomb(库伦)力是确定其统计性质的一个重要因素[15].实际等离子体粒子数虽然比计算机所能模拟的粒子数远大得多,但仔细分析起来,在等离子体分布函数的相空间中一点 (x,v) 的周围,每个带电粒子对电磁场的贡献及电磁场对粒子的作用力都基本相同,故周围

这些大量带电粒子的运动规律基本相同,因而可以不必跟踪计算每一个粒子,只计算代表这些粒子的一个粒子就可以了.本文建立的是太空等离子体单粒子运动模型,运用重合度理论及泛函分析技巧得到了一定条件下该模型存在同宿轨这一动力学特征.所得结果一方面有助于描述太空等离子体粒子的“集体相互作用”效应,另一方面为合理解释观测结果提供理论依据.

致谢 作者对审稿人的建设性建议表达真诚的感谢.该项工作得到南京信息工程大学科研基金(20090202;2012r101)的资助.

参考文献(References):

[1] McLean D J. *Solar Radiophysics*[M]. London: Cambridge University Press, 1985.

[2] HUANG Guang-li. Turbulent spectrum of Alfvén waves excited by a kinetic instability for explaining the modulations with multi-timescales in solar flares[J]. *Astrophysics and Space Science*, 2009, **321**(2): 79-89.

[3] Aschwanden M J. *Particle Acceleration and Kinematics in Solar Flares*[M]. Netherlands: Springer, 2002: 187-227.

[4] Sakai J I, Kitamoto T, Saito S. Simulation of solar type III radio bursts from a magnetic reconnection[J]. *The Astrophysical Journal Letters*, 2005, **622**(2): 157-160.

[5] Grechnev V V, White S M, Kundu M R. Quasi-periodic pulsations in a solar microwave burst [J]. *Astrophysical Journal*, 2003, **588**(2): 1163-1175.

[6] HUANG Guang-li, JI Hai-sheng. Radio, hard X-ray, EUV and optical study of september 9, 2002 solar flare[J]. *Astrophysics and Space Science*, 2006, **301**(1/4): 65-71.

[7] MO Jia-qi, LIN Su-rong. The homotopic mapping solution for the solitary wave for a generalized nonlinear evolution equation[J]. *Chin Phys B*, 2009, **18**(9): 3628-3631.

[8] MO Jia-qi. Solution of travelling wave for nonlinear disturbed long-wave system[J]. *Commun Theor Phys*, 2011, **55**(3): 387-390.

[9] MO Jia-qi, CHEN Xian-feng. Homotopic mapping method of solitary wave solutions for generalized complex Burgers equation[J]. *Chin Phys B*, 2010, **19**(10): 100203.

[10] MO Jia-qi, LIN Wan-tao, WANG Hui. A class of homotopic solving method for ENSO model [J]. *Acta Math Sci*, 2009, **29**(1): 101-110.

[11] 姚静荪, 欧阳成, 陈丽华, 莫嘉琪. 非线性扰动耦合 Schrödinger 系统激波的近似解法[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(12): 1477-1486.(YAO Jing-sun, OUYANG Cheng, CHEN Li-hua, MO Jia-qi. Approximate solving method of shock for nonlinear disturbed coupled Schrödinger system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(12): 1477-1486.(in Chinese))

[12] 李晓静. 厄尔尼诺大气物理机制的周期解[J]. 物理学报, 2008, **57**(9): 5366-5368.(LI Xiao-jing. The periodic solutions of EI Niño mechanism of atmospheric physics[J]. *Acta Physica Sinica*, 2008, **57**(9): 5366-5368.(in Chinese))

[13] Tang X H, LI Xiao. Homoclinic solutions for ordinary p-Laplacian systems with a coercive potential[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, **71**(3/4): 1124-1132.

[14] Gaines R E, Mawhin J L. *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*[M]. Berlin: Springer, 1977.

[15] Kivelson M G, Russell C T. *Introduction to Space Physics*[M]. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 1995.

Homoclinic Orbit of the Motion Model for a Single Space Plasma Particle

CHEN Li-juan, LU Shi-ping

(*School of Mathematics and Statistics*, *Nanjing University of Information Science and Technology*, *Nanjing* 210044, *P.R.China*)

Abstract: Due to uncertainty and non-repeatability in the indirect observation of space plasma, and limitation of the passive experiment, in order to describe the dynamic characteristics of the space plasma particle motion accurately, a nonlinear motion model of a single space plasma particle was proposed. By dint of Mawhin's continuation theorem, the existence of periodic solutions to a class of nonlinear problems was discussed, and in turn, the homoclinic orbit of the motion model for a single space plasma particle was investigated. A new result about the existence of the homoclinic orbit was obtained. The result provides a better basis for observation and theoretical study in space environment.

Key words: nonlinear; space plasma; periodic solution; homoclinic orbit

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11271197); The Key Project of Chinese Ministry of Education(207047)