文章编号:1000-0887(2013)12-1291-09

一类具有分布时滞和非线性发生率的媒介传染病模型的全局稳定性*

杨亚莉[1,2], 李建全[2], 刘万萌[2], 唐三一[1]

(1. 陕西师范大学 数学与信息科学学院, 西安 710062;
2. 空军工程大学 理学院, 西安 710051)

(我刊编委唐三一来稿)

摘要: 建立了一类具有分布时滞和非线性发生率的 SIR 媒介传染病模型,分析得到了决定疾病是否一致持续存在的基本再生数.而且当基本再生数不大于 1 时,疾病最终灭绝;当基本再生数大于 1 时,模型存在惟一的地方病平衡点,并且疾病一致持续存在于种群之中.通过构造 Lyapunov 泛函,证明了在一定条件下地方病平衡点只要存在就全局稳定.同时指出了证明地方病平衡点全局稳定时可适用的 Lyapunov 泛函的不惟一性.

关 键 词: 媒介传染病模型; 基本再生数; 一致持续性; 平衡点; 全局稳定性

中图分类号: O175.12; O211.9 **文献标志码:** A

DOI:10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.008

引 言

在经典的传染病模型中,经常使用双线性或标准型发生率[1].近年来,一些不同形式的非线性发生率被提出.Capasso 和 Serio 对 1973 年霍乱在意大利巴里的传播进行研究时,在数学模型中引入了形式为 $Sg(I)$ 的发生率[2],其中 $S=S(t)$ 和 $I=I(t)$ 分别表示 t 时刻易感者和传染者的数量.随后,为了进一步研究非线性传染率对模型动力学性态的影响,Liu 等提出了形式为 $\beta I^p S^q$ 和 $\beta I^p S/(1+\alpha I^q)$ 的非线性发生率[3].文献[4]考虑了具有非线性发生率 $\beta SI/(1+aS)$ 的一类 SEIRS 传染病模型.该发生率表明每个感染者在单位时间内所能传染的数量是易感者数量的一种饱和形式.Korobeinikov 和 Maini 在文献[5]中提出并考虑了发生率为 $f(S)g(I)$ 的传染病模型,通过构造 Lyapunov 函数研究了模型的全局稳定性.

文献[6]中,Cooke 在考虑疾病通过媒介(如蚊子)传播的情形时,建立了发生率为

---

* **收稿日期:** 2013-08-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11071256;11171267;11301320;11371369);陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2012JQ1019);中国博士后科学基金资助项目(2013M532016);陕西省博士后科研资助项目

作者简介: 杨亚莉(1974—),女,陕西咸阳人,副教授,博士(E-mail: yylhgr@126.com);
李建全(1965—),男,教授,博士(E-mail: jianq_li@263.net);
刘万萌(1993—),男(E-mail: 1103016411@qq.com);
唐三一(1970—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: sytang@snnu.edn.cn).

$\beta S(t)I(t-\tau)$ 的离散时滞传染病模型,其中时滞参数 τ 表示疾病在媒介中的潜伏期.接着,发生率为 $\beta S(t)I(t-\tau)/(1+\alpha I(t-\tau))$[7] 和 $f(S)g(I(t-\tau))$[8] 的媒介传染病模型被建立和研究.在文献[6-8]中,均假定潜伏期 τ 是确定的,但在现实中假定 τ 是一个具有上界的分布参数则更为合理,即存在一个正数 h,使得潜伏期 τ 在区间[0, h]上随机分布.于是,相应于双线性发生率 $\beta S(t)I(t-\tau)$,可引入形如具有分布时滞的双线性发生率:

$$\beta S(t)\int_0^h \varphi(\tau)I(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

其中,$\varphi(\tau)$ 表示媒介种群在被感染 τ 时间后能传播疾病的概率密度.显然,$\varphi(\tau)$ 是一个在[0, h]上平方可积的非负函数,且满足

$$\int_0^h \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1,\ \int_0^h \tau\,\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau < +\infty,$$

其中,$\int_0^h \tau\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 是媒介被感染后成为传染者的平均潜伏时间[9].文献[9-11]研究了发生率为形式(1)的媒介传染病模型.进一步,对应于非线性发生率 $\beta S\,g(I(t-\tau))$,Enatsu 等讨论了一类具有非线性发生率 $\beta S(t)\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau$ 的 SIRS 传染病模型的全局稳定性[12].

本文将研究一类具有非线性发生率 $f(S(t))\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau$ 的 SIR 媒介传染病模型,该发生率的特殊形式为非线性发生率 $f(S)g(I(t-\tau))$.对于该模型,给出了决定疾病一直持续存在的基本再生数,讨论了无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性,并通过构造适当的 Lyapunov 泛函给出了地方病平衡点全局稳定的充分条件.

1 模型的建立

本文考虑的媒介传染病模型是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = A - \mu S - f(S)\displaystyle\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = f(S)\displaystyle\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau - (\mu_1+\gamma)I,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - \mu_2 R,\end{cases} \tag{2}$$

其中 $S=S(t)$,$I=I(t)$ 和 $R=R(t)$ 分别是易感者、感染者和移除者在 t 时刻的数量;A 是易感者的输入率;μ,μ_1 和 μ_2 分别是易感者、感染者和移除者的死亡率,其中 $\mu\leqslant\min\{\mu_1,\mu_2\}$,该不等式意味着疾病会引起感染者和移除者的额外死亡;γ 是感染者的移除率.对于具有分布时滞和非线性发生率

$$f(S)\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau,$$

假设 $f(S)$ 和 $g(I)$ 在 $\mathbf{R}_{+0}$ 上是可微的,且满足以下条件:

(H1) $f(0)=0$,对于 $\forall S>0$ 有 $f(S)>0$ 和 $f'(S)>0$ 成立;

(H2) $g(0)=0$,$g'(0)=1$,对于 $\forall I>0$ 有 $g(I)>0$ 和 $[g(I)/I]'\leqslant 0$ 成立.

条件 $f(0)=0$ 和 $g(0)=0$ 的生物意义是显而易见的.$f'(S)>0$ 表明发生率随易感者数量的增加而增加.$[g(I)/I]'\leqslant 0$ 表明单个感染者在单位时间内所传染的个体数量随着被感染者数量的增多而减少,它反映了被感染者增多时,易感者的保护措施得到加强这一客观事实.条

件 $g'(0)=1$ 可以通过选取相应的系数来实现.注意到条件 $g'(0)=1$ 和$[g(I)/I]'\leqslant 0$ 意味着对于 $\forall I>0$ 都有

$$\frac{g(I)}{I}<1.$$

由于变量 R 在系统(2)的前两个方程中没有出现,所以只需考虑该系统的子系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-\mu S-f(S)\displaystyle\int_0^h\varphi(\tau)g(I(t-\tau))\mathrm{d}\tau,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=f(S)\displaystyle\int_0^h\varphi(\tau)g(I(t-\tau))\mathrm{d}\tau-(\mu_1+\gamma)I.\end{cases}\tag{3}$$

根据系统(3)的实际背景,假设其初始条件为

$$S(\tau)=\Phi_1(\tau),\ I(\tau)=\Phi_2(\tau),\qquad \tau\in[-h,0],\tag{4}$$

其中 $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)\in C_{+0}\times C_{+0}$,满足 $\Phi_i(\tau)\geqslant 0\ (i=1,2)$ 对 $\forall\tau\in[0,h]$ 均成立,且 $\Phi_i(0)>0(i=1,2)$.此处,C 表示 Banach 空间 $C([-h,0],\mathbf{R})$,它是由区间$[-h,0]$到 $\mathbf{R}$ 上的连续映射取上确界范数所构成的,C 的非负锥记为 $C_{+0}=C([-h,0],\mathbf{R}_{+0})$.

对于系统(3)有

$$\frac{\mathrm{d}(S+I)}{\mathrm{d}t}=A-\mu A-(\mu_1+\gamma)I\leqslant A-\mu(S+I).$$

这里用到 $\mu\leqslant\mu_1$,因此有 $\limsup_{t\to+\infty}(S+I)\leqslant A/\mu$.故仅需在闭集

$$D=\left\{(S(t),I(t))\in C_{+0}\times C_{+0}:S(t)+I(t)\leqslant\frac{A}{\mu}\right\}$$

上讨论系统(3)的动力学性态.易知 D 是系统(3)的正不变集.由文献[13]中的时滞微分方程理论,可知满足初始条件(4)的系统(3)有惟一连续的解.进一步,由 $f(S)$ 和 $g(I)$ 所满足的条件可知系统(3)的基本再生数为

$$R_0=\frac{f(A/\mu)}{\mu_1+\gamma}.$$

2 模型分析

易知系统(3)总有无病平衡点 $E_0(S_0,I_0)$ $(S_0=A/\mu,I_0=0)$.其地方病平衡点 $E^*(S^*,I^*)$ (满足 $S^*>0$, $I^*>0$) 是由方程组

$$\begin{cases}A-\mu S-f(S)g(I)=0,\\ f(S)g(I)-(\mu_1+\gamma)I=0\end{cases}\tag{5}$$

来确定的.

将方程组(5)中两个方程相加,可得 $\mu S+(\mu_1+\gamma)I=A$, 即

$$S=\frac{A-(\mu_1+\gamma)I}{\mu}.\tag{6}$$

因此,对于地方平衡点 E^*,要使 $S^*>0$,则必须有 $I^*<A/(\mu_1+\gamma)$.

当 $I\neq 0$ 时,将式(6)代入到方程组(5)的第 2 个方程得

$$H(I):=f\left(\frac{A-(\mu_1+\gamma)I}{\mu}\right)-(\mu_1+\gamma)\frac{I}{g(I)}=0.$$

所以方程 $H(I)=0$ 在区间$(0,A/(\mu_1+\gamma))$ 内的解即是地方病平衡点 E^* 坐标中的 I^*.

由条件 $f'(S) > 0$ 和 $[g(I)/I]' \leqslant 0$ 知,对任意的 $I \in (0, A/(\mu_1+\gamma))$ 都有 $H'(I) < 0$. 进一步由 $g'(0) = 1$ 和 $f(0) = 0$ 可得

$$\lim_{I\to 0^+} H(I) = f\left(\frac{A}{\mu}\right) - (\mu_1+\gamma) = (\mu_1+\gamma)(R_0 - 1)$$

和

$$\lim_{I\to A/(\mu_1+\gamma)} H(I) = -(\mu_1+\gamma)\left[\frac{I}{g(I)}\right]_{I=A/(\mu_1+\gamma)} < 0.$$

因此,当 $R_0 \leqslant 1$ 时,方程 $H(I) = 0$ 在区间 $(0, A/(\mu_1+\gamma))$ 内没有解;当 $R_0 > 1$ 时,方程 $H(I) = 0$ 在该区间上存在惟一的根.综上所述,关于系统(3)的平衡点的存在性有:

定理 1 在条件(H1)和(H2)下,当 $R_0 \leqslant 1$ 时,系统(3) 只有惟一的无病平衡点 $E_0(S_0, 0)$;当 $R_0 > 1$ 时,系统(3) 除了无病平衡点 E_0 外,还有惟一的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*)$, 其中

$$S_0 = \frac{A}{\mu},\ S^* = \frac{A - (\mu_1+\gamma)I^*}{\mu},$$

且 I^* 是方程 $H(I) = 0$ 在区间 $(0, A/(\mu_1+\gamma))$ 上的正根.

下面,讨论无病平衡点 E_0 和地方病平衡点 E^* 在集 D 上的稳定性.

定理 2 在条件(H1)和(H2)下,系统(3)的无病平衡点 E_0 当 $R_0 \leqslant 1$ 时在集 D 上是全局稳定的,当 $R_0 > 1$ 时是不稳定的.并且当 $R_0 > 1$ 时,疾病一致持续存在于种群之中.

证明 定义 Lyapunov 泛函

$$V_0 = I + f\left(\frac{A}{\mu}\right)\int_0^h \varphi(\tau)\int_{t-\tau}^t g(I(\theta))\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\tau,$$

则 V_0 沿系统(3)的解的全导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t} &= \left[f(S) - f\left(\frac{A}{\mu}\right)\right]\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau + f\left(\frac{A}{\mu}\right)g(I) - (\mu_1+\gamma)I = \\ &\left[f(S) - f\left(\frac{A}{\mu}\right)\right]\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau + I\left[f\left(\frac{A}{\mu}\right)\frac{g(I)}{I} - (\mu_1+\gamma)\right].\end{aligned}$$

由于 $g(I)/I < 1$ 对于 $\forall I > 0$ 都成立,于是有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_0}{\mathrm{d}t} &\leqslant \left[f(S) - f\left(\frac{A}{\mu}\right)\right]\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau + I\left[f\left(\frac{A}{\mu}\right) - (\mu_1+\gamma)\right] = \\ &\left[f(S) - f\left(\frac{A}{\mu}\right)\right]\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau + (\mu_1+\gamma)(R_0-1)I.\end{aligned}$$

又 $S \leqslant A/\mu$ 对于 $\forall (S, I) \in D$ 都成立, 并且 $f'(S) > 0$, 所以 $\forall (S, I) \in D$ 有 $f(S) - f(A/\mu) \leqslant 0$.因此,当 $R_0 \leqslant 1$ 时,在 D 上 $V_0' \leqslant 0$.易见,当 $R_0 \leqslant 1$ 时,系统(3) 在 $\{(S(t), I(t)) : V_0' = 0\}$ 上的最大不变集是单点集 $\{E_0\}$, 故由 Lyapunov-LaSalle 不变集原理[13],系统(3)的无病平衡点 E_0 在集 D 上是全局稳定的.

另一方面,系统(3)在无病平衡点 E_0 的线性化系统为

$$\begin{cases} u' = -\mu u - f\left(\frac{A}{\mu}\right)\int_0^h \varphi(\tau)v(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \\ v' = f\left(\frac{A}{\mu}\right)\int_0^h \varphi(\tau)v(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau - (\mu_1+\gamma)v, \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\begin{cases} u = S - S_0, \\ v = I - I_0. \end{cases} \tag{8}$$

系统(7)的特征方程是

$$(\lambda + \mu)\left[\lambda + \mu_1 + \gamma - f\left(\frac{A}{\mu}\right)\int_0^h \varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau\right] = 0.$$

显然，$\lambda = -\mu$ 是系统(7)的一个特征根，它的另一个特征根由方程

$$H_1(\lambda) := \lambda + \mu_1 + \gamma - f\left(\frac{A}{\mu}\right)\int_0^h \varphi(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau = 0$$

来确定.注意到当 $R_0 > 1$ 时，

$$H_1(0) = (\mu_1 + \gamma) - f(A/\mu) = (\mu_1 + \gamma)(1 - R_0) < 0,$$

而 $H_1(+\infty) = +\infty$，因此，当 $R_0 > 1$ 时，方程 $H_1(\lambda) = 0$ 有正根存在，所以当 $R_0 > 1$ 时，系统(3)的无病平衡点 E_0 是不稳定的.

由于系统(3)在正不变集 D 上有惟一的边界平衡点，即无病平衡点 E_0，所以要证明疾病的一致持续性，只需证明存在 E_0 的充分小去心邻域，使得系统(3)从该邻域内出发的解均跑出该邻域.

当 $R_0 > 1$，即 $f(A/\mu) > \mu_1 + \gamma$ 时，根据对函数 $f(S)$ 和 $g(I)$ 的假设，存在充分小的正数 ε 满足

$$f\left(\frac{A}{\mu} - \varepsilon\right)\frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon} > \mu_1 + \gamma. \tag{9}$$

对于满足式(9)的 ε，取 E_0 在 D 内的去心邻域

$$N(E_0) = \{(S, I) \in D: I > 0, (S - A/\mu)^2 + I^2 < \varepsilon^2\},$$

则对于 $\forall (S, I) \in N(E_0)$ 总有 $S > A/\mu - \varepsilon$ 和 $I < \varepsilon$ 成立.根据函数 $f(S)$ 和 $g(I)$ 的单调性有对于 $\forall (S, I) \in N(E_0)$，有

$$f(S) > f\left(\frac{A}{\mu} - \varepsilon\right), \quad \frac{g(I)}{I} > \frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

成立.因此，当 $(S, I) \in N(E_0)$ 时，有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = I\left[f(S)\frac{g(I)}{I} - (\mu_1 + \gamma)\right] > I\left[f\left(\frac{A}{\mu} - \varepsilon\right)\frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon} - (\mu_1 + \gamma)\right] > 0.$$

这意味着系统(3)初始值在 $N(E_0)$ 内的解均在有限时间内跑出邻域 $N(E_0)$，所以当 $R_0 > 1$ 时，疾病一致持续存在于种群之中. □

进一步，关于地方病平衡点 E^* 的全局稳定性，可证得如下定理.

定理 3 在条件(H1)和(H2)下，当 $R_0 > 1$ 时，若对于 $\forall I > 0$ 且 $I \neq I^*$ 有 $(I - I^*)[g(I) - g(I^*)] > 0$ 成立，则系统(3)的地方病平衡点 E^* 在集 D 内是全局稳定的.

为了简化系统(3)地方病平衡点 E^* 全局稳定性的证明过程，引入文献[14]中一个结论作为引理.

引理 1 对于任意 n 个正数 $c_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，不等式

$$n - c_1 - c_2 - \cdots - c_n + \ln(c_1 c_2 \cdots c_n) \leqslant 0$$

总成立，当且仅当 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$ 时等号成立.

定理 3 的证明 对于系统(3)在初始条件(4)下的任意解 $(S(t), I(t))$，定义函数

$$V_1(S)=\int_{S^*}^{S}\frac{f(\theta)-f(S^*)}{f(\theta)}\mathrm{d}\theta \text{ 和 } V_2(I)=\int_{I^*}^{I}\frac{\theta-I^*}{\theta}\mathrm{d}\theta .$$

易知在条件(H1)下,函数 $V_1(S)$ 和 $V_2(I)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是正定的.它们沿系统(3)的解的全导数分别为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=&-\left[1-\frac{f(S^*)}{f(S)}\right]\Big\{\mu(S-S^*)+\\&\left[f(S)\int_0^h\varphi(\tau)g(I(t-\tau))\mathrm{d}\tau-f(S^*)g(I^*)\right]\Big\}=\\&-\left[1-\frac{f(S^*)}{f(S)}\right]\Big\{\mu S^*\left(\frac{S}{S^*}-1\right)+\\&f(S^*)g(I^*)\left[\frac{f(S)}{f(S^*)}\int_0^h\varphi(\tau)\frac{g(I(t-\tau))}{g(I^*)}\mathrm{d}\tau-1\right]\Big\}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}=&\left(1-\frac{I^*}{I}\right)\left[f(S)\int_0^h\varphi(\tau)g(I(t-\tau))\mathrm{d}\tau-\frac{f(S^*)g(I^*)}{I^*}I\right]=\\&f(S^*)g(I^*)\left(1-\frac{I^*}{I}\right)\left[\frac{f(S)}{f(S^*)}\int_0^h\varphi(\tau)\frac{g(I(t-\tau))}{g(I^*)}\mathrm{d}\tau-\frac{I}{I^*}\right],\end{aligned}$$

其中用到了等式 $A=\mu S^*+f(S^*)g(I^*)$ 和 $f(S^*)g(I^*)=(\mu_1+\gamma)I^*$.

进而,定义泛函

$$V_3(t)=f(S^*)g(I^*)\int_0^h\varphi(\tau)\int_{t-\tau}^{t}\left[\frac{g(I(\theta))}{g(I^*)}-1-\ln\frac{g(I(\theta))}{g(I^*)}\right]\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\tau .$$

由于不等式 $x-1-\ln x>0$ 对 $\forall x>0$ 且 $x\neq 1$ 都成立,故 V_3 是非负的,当且仅当 $I(\theta)=I^*$ 时 $V_3=0$ 成立.函数 $g(I)$ 和系统(3)解的连续性保证了 V_3 在 $\mathbf{R}_{+0}$ 上是可微的,所以 V_3 关于 t 的导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}t}=&f(S^*)g(I^*)\int_0^h\varphi(\tau)\left[\frac{g(I(t))}{g(I^*)}-\right.\\&\left.\ln\frac{g(I(t))}{g(I^*)}-\frac{g(I(t-\tau))}{g(I^*)}+\ln\frac{g(I(t-\tau))}{g(I^*)}\right]\mathrm{d}\tau=\\&f(S^*)g(I^*)\int_0^h\varphi(\tau)\left[\frac{g(I(t))}{g(I^*)}-\frac{g(I(t-\tau))}{g(I^*)}+\ln\frac{g(I(t-\tau))}{g(I(t))}\right]\mathrm{d}\tau .\end{aligned}$$

为使表达式简单,记

$$x=\frac{S(t)}{S^*},\ y=\frac{I(t)}{I^*},\ u=\frac{f(S(t))}{f(S^*)},\ v=\frac{g(I(t))}{g(I^*)},\ w=\frac{g(I(t-\tau))}{g(I^*)}.$$

令 $V=V_1+V_2+V_3$,则 V 沿系统(3)的解的全导数为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=&-\mu S^*\left(1-\frac{1}{u}\right)(x-1)+\\&f(S^*)g(I^*)\left[2-y-\frac{1}{u}-\frac{u}{y}\int_0^h\varphi(\tau)w\mathrm{d}\tau+\int_0^h\varphi(\tau)\left(v+\ln\frac{w}{v}\right)\mathrm{d}\tau\right].\end{aligned}$$

由已知条件 $\int_0^h\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau=1$, 有

$$2-y-\frac{1}{u}-\frac{u}{y}\int_0^h\varphi(\tau)w\mathrm{d}\tau+\int_0^h\varphi(\tau)\left(v+\ln\frac{w}{v}\right)\mathrm{d}\tau=$$
$$\int_0^h\varphi(\tau)\left[2-y-\frac{1}{u}-\frac{uw}{y}+v+\ln\frac{w}{v}\right]\mathrm{d}\tau=$$
$$\int_0^h\varphi(\tau)\left[(v-y)\left(1-\frac{1}{v}\right)+\left(3-\frac{uw}{y}-\frac{1}{u}-\frac{y}{v}+\ln\frac{w}{v}\right)\right]\mathrm{d}\tau=$$
$$(v-y)\left(1-\frac{1}{v}\right)+\int_0^h\varphi(\tau)\left(3-\frac{uw}{y}-\frac{1}{u}-\frac{y}{v}+\ln\frac{w}{v}\right)\mathrm{d}\tau,$$

故

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\mu S^*\left(1-\frac{1}{u}\right)(x-1)+f(S^*)g(I^*)(v-y)\left(1-\frac{1}{v}\right)+$$
$$f(S^*)g(I^*)\int_0^h\varphi(\tau)\left(3-\frac{uw}{y}-\frac{1}{u}-\frac{y}{v}+\ln\frac{w}{v}\right)\mathrm{d}\tau.$$

注意到

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)(x-1)=\left[1-\frac{f(S^*)}{f(S)}\right]\left(\frac{S}{S^*}-1\right),$$

则 $f'(S)>0$ 蕴涵着对 $\forall S>0$ 有不等式 $(1-1/u)(x-1)\geqslant 0$ 成立，当且仅当 $S=S^*$ 时等式成立.

又因为

$$(v-y)\left(1-\frac{1}{v}\right)=\left[\frac{g(I)}{g(I^*)}-\frac{I}{I^*}\right]\left[1-\frac{g(I^*)}{g(I)}\right]=$$
$$\frac{I}{g(I^*)g(I)}\left[\frac{g(I)}{I}-\frac{g(I^*)}{I^*}\right][g(I)-g(I^*)],$$

并且 $[g(I)/I]'\leqslant 0$ 意味着

$$\left[\frac{g(I)}{I}-\frac{g(I^*)}{I^*}\right][I-I^*]\leqslant 0,$$

于是由条件：对 $\forall I\neq I^*$ 有 $(I-I^*)[g(I)-g(I^*)]>0$，得

$$\left[\frac{g(I)}{I}-\frac{g(I^*)}{I^*}\right][g(I)-g(I^*)]\leqslant 0,\text{即 }(v-y)\left(1-\frac{1}{v}\right)\leqslant 0.$$

同时根据引理 1 有

$$3-\frac{uw}{y}-\frac{1}{u}-\frac{y}{v}+\ln\frac{w}{v}\leqslant 0,$$

因此，当 $I>0$ 且 $I\neq I^*$ 时，在条件(H1)，(H2)和 $(I-I^*)[g(I)-g(I^*)]>0$ 下，有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\leqslant 0$，并且当且仅当 $S=S^*$，$I=I^*$ 时等式成立.故由 Lyapunov-LaSalle 不变集原理[13]，当 $R_0>1$ 时，系统(3) 的地方病平衡点 E^* 在集 D 内是全局稳定的. □

在文献[5,8,12]中，都假设函数 $g(I)$ 是严格单调递增的.这一假设可以替代定理 3 中的条件 $(I-I^*)[g(I)-g(I^*)]>0$ 对 $I>0$ 且 $I\neq I^*$ 成立，即有下面的推论.

推论 1 在条件(H1)和(H2)下，如果函数 $g(I)$ 是严格单调递增的，则当 $R_0>1$ 时，系统(3) 的地方病平衡点 E^* 在集 D 内是全局稳定的.

3 讨论

本文主要研究了带有分布时滞和非线性传染率$f(S)\int_0^h \varphi(\tau)g(I(t-\tau))\mathrm{d}\tau$的媒介传播传染病动力学模型,得到了其基本再生数和平衡点全局稳定的条件.分析结果显示:当基本再生数不大于1时,疾病最终灭绝;当基本再生数大于1时,疾病一致持续存在,并且在一定条件下地方病平衡点是全局稳定的.

由于本文考虑的潜伏期时滞是具有一般性的分布时滞,该系统在地方病平衡点处的特征方程是一个积分方程,所以难以得到其局部稳定的结果.但通过构造 Lyapunov 泛函,得到了地方病平衡点全局稳定的充分条件.如果进一步限制函数$g(I)$是单调递增的,则地方病平衡点只要存在就是全局稳定的.

在证明地方病平衡点的全局稳定性时,用到的 Lyapunov 泛函为$V_2=\int_{I^*}^{I}(\theta-I^*)/\theta\mathrm{d}\theta$.事实上,这一函数也可由函数$\bar{V}_2=\int_{I^*}^{I}[g(\theta)-g(I^*)]/g(\theta)\mathrm{d}\theta$来取代.利用$\bar{V}_2$时,证明地方病平衡点全局稳定的条件是相同的.因此可适用的 Lyapunov 泛函是不惟一的.再有,$g(I)$单调递增这一条件明显强于条件$(I-I^*)[g(I)-g(I^*)]\geqslant 0$,因此推论1的结论是合乎情理的.但在假设$[g(I)/I]'\leqslant 0$下,没有得到地方病平衡点全局稳定的充要条件,甚至局部渐近稳定的充要条件也难以得到.这一问题有待于进一步研究.

参考文献(References):

[1] Ma Z E, Li J. *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*[M]. World Scientific, 2009.

[2] Capasso V, Serio G. A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model[J]. *Mathematical Biosciences*, 1978, **42**(1/2): 43-61.

[3] Liu W M, Levin S A, Iwasa Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1986, **23**(2): 187-204.

[4] Gao S J, Chen L S, Nieto J J, Torres A. Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence[J]. *Vaccine*, 2006, **24**(35/36): 6037-6045.

[5] Korobeinikov A, Maini P K. Nonlinear incidence and stability of infectious disease models[J]. *Mathematical Medicine and Biology*, 2005, **22**(2): 113-128.

[6] Cooke K L. Stability analysis for a vector disease model[J]. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1979, **9**(1): 31-42.

[7] Xu R, Ma Z E. Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. *Chaos Solutions and Fractals*, 2009, **41**(5): 2319-2325.

[8] Huang G, Takeuchi Y, Ma W B, Wei D J. Global stability for delay SIR and SEIR epidemic models with nonlinear incidence rate[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2010, **72**(5): 1192-1207.

[9] Beretta E, Takeuchi Y. Convergence results in SIR epidemic models with varying population size[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Method and Applications*, 1997, **28**(12): 1909-1921.

[10] Takeuchi Y, Ma W B, Beretta E. Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2000, **42**(6): 931-947.

[11] Nakata Y, Enatsu Y, Muroya Y. On the global stability of an SIRS epidemic model with dis-

tributed delays[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2011(Supp): 1119-1128.

[12] Enatsu Y, Nakata Y, Muroya Y. Lyapunov functional techniques for the global stability analysis of a delayed SIRS epidemic model[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, **13**(5): 2120-2133.

[13] Kuang Y. *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*[M]. San Diego: Academic Press, 1993.

[14] Li J Q, Song X C, Gao F Y. Global stability of a viral infection model with delays and two types of target cells[J]. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2012, **2**(3): 281-292.

Global Stability of a Vector-Borne Epidemic Model With Distributed Delay and Nonlinear Incidence

YANG Ya-li[1,2], LI Jian-quan[2], LIU Wan-meng[2], TANG San-yi[1]

(1. *College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710062, *P.R.China*;

2. *Science College, Air Force Engineering University, Xi'an* 710051, *P.R.China*)

(Contributed by TANG San-yi, M. AMM Editorial Board)

Abstract: An SIR vector-borne epidemic model with distributed delay and nonlinear incidence was established, the basic reproduction number determining the uniform persistence of the disease was found. When the basic reproduction number was not greater than 1, the disease died out finally; when the basic reproduction number was greater than 1, the model had a unique endemic equilibrium, and the disease uniformly persisted in the population. By constructing Lyapunov functional, it was proved that, under certain conditions, the endemic equilibrium was globally stable in the feasible region only when it existed. In addition, the non-uniqueness of the suitable Lyapunov functionals was shown for proving the global stability of the endemic equilibrium.

Key words: vector-borne epidemic model; the basic reproduction number; uniform persistence; equilibrium; global stability

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11071256; 11171267; 11301320; 11371369); China Postdoctoral Science Foundation (2013M532016)