

带有双噪声的随机 SI 传染病模型的稳定性与分岔*

赵金庆, 刘茂省, 马扬军, 王弯弯

(中北大学 理学院, 太原 030051)

摘要: 建立一个带有双噪声的随机 SI 传染病模型,运用随机平均法及非线性动力学理论对模型进行化简.通过 Lyapunov 指数和奇异边界理论,得到模型的局部随机稳定性和全局随机稳定性的条件.根据不变测度的 Lyapunov 指数和平稳概率密度,分析模型的随机分岔.结果表明,系统在随机因素作用下变得更敏感、更不稳定.

关键词: 随机平均法; Lyapunov 指数; 不变测度; 随机稳定; 随机分岔

中图分类号: O29; O175.13 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.009

引 言

近年来,国际上传染病动力学的研究进展迅速,大量的传染病模型被用于分析各种传染病问题^[1-4].在建立传染病动力学模型时,通常建立的是确定性模型,很少考虑随机因素的影响.事实上,在传染病传播的过程中,不可避免的会受到一些随机因素的影响.因此,随机传染病模型更符合现实情况.

非线性系统在 Gauss 白噪声激励下的响应是扩散的 Markov 过程.系统运动的微分方程可模型化为 Itô 随机微分方程或 Stratonovich 随机微分方程.在随机传染病模型的研究中, Jiang 等^[5-8], Tornatore 等^[9] 建立随机动力系统 (Itô 意义下的), 通过构造 Lyapunov 函数的方法证明了随机传染病模型的稳定性.在 Itô 意义下, Gauss 白噪声被看成理想的白噪声,而在 Stratonovich 意义下, Gauss 白噪声被看成平稳白噪声在相关时间趋近于 0 时的极限过程,它在某一时刻上的值与它在此时刻之前的那些时刻上的值以及在这些时刻上该过程产生的响应相关.由于理想白噪声具有无限大的“功率”,因此现实中并不存在,现实中的白噪声往往是具有相关时间极短的平稳 Gauss 过程的一个理想化模型.白噪声对系统的作用包括乘性随机激励和加性随机激励,从现象学的观点,乘性噪声和加性噪声表现出不同的特点.因此,本文构造一个包含乘性噪声和加性噪声双噪声的随机传染病模型 (Stratonovich 意义下的随机微分方程).

本文主要分成 4 个部分:第 1 部分构造了一个双噪声的随机传染病模型 (Stratonovich 意

* 收稿日期: 2013-05-27; 修订日期: 2013-08-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10901145); 山西省自然科学基金资助项目 (2012011002-1); 山西省高等学校优秀青年学术带头人资助项目

作者简介: 赵金庆 (1988—), 男, 山东淄博人, 硕士生 (E-mail: qing630086824@126.com); 刘茂省 (1978—), 男, 山东济宁人, 副教授, 博士 (通讯作者. E-mail: liumxsx@gmail.com).

义下)并运用随机平均法及非线性动力学理论对模型进行化简;第2部分通过 Lyapunov 指数和奇异边界理论,得到该模型局部随机稳定和全局随机稳定的条件;第3部分根据不变测度和平稳概率密度分析了模型随机动态分岔(D-分岔)和随机唯象分岔(P-分岔);第4部分给出了本文的结论.

1 模型的建立和简化

把人群分为两类:易感者 S ,染病者 I .选取简单的 SI 模型^[10-11],建立双噪声随机 SI 模型

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \beta SI - \mu S + \alpha_1 S\xi(t) + \beta_1 \eta(t), \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I + \alpha_2 I\xi(t) + \beta_2 \eta(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中, A 表示人口的出生率, β 表示染病者对易感者传染率, μ 是自然死亡率, $\xi(t)$ 为易感者和染病者受到的乘性随机激励(与环境及人自身等内在因素相关), $\eta(t)$ 为加性随机激励(易感者和染病者受到的直接影响其数量变化的外界随机激励,如突发自然灾害), $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 是噪声强度.为了便于研究,假设 $\xi(t)$ 与 $\eta(t)$ 为独立的具有零均值和标准方差的 Gauss 白噪声.即

$$E[\xi(t)] = E[\eta(t)] = 0,$$

$$E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = \delta(\tau), \quad E[\xi(t)\eta(t+\tau)] = 0.$$

系统(1)为物理意义下的随机动力系统(Stratonovich 意义下的随机微分方程), $\delta(\tau)$ 为 Dirac 函数,系统(1)各项系数皆非负.

当随机系统(1)未受到随机激励时,即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ 时,系统有两个平衡点: $E_1(A/\mu, 0)$, $E_2(\mu/\beta, (\beta A - \mu^2)/\mu\beta)$.当 $R_0 = \beta A/\mu^2 \leq 1$ 时,系统的无病平衡点 E_1 全局渐近稳定;当 $R_0 = \beta A/\mu^2 > 1$ 时,系统的正平衡点 E_2 全局渐近稳定.在非线性的随机动力系统(1)中,随机项的作用使平衡点的稳定性发生改变,即随机系统的稳态解会产生不同的稳定性和分岔.这里选取具有代表性的平衡点 E_2 ,且在满足条件 $R_0 = \beta A/\mu^2 > 1$ 下,分析系统(1)在其平衡点 E_2 附近的随机稳定性与随机分岔.

令

$$y_1 = S - \frac{\mu}{\beta}, \quad y_2 = I - \frac{\beta A - \mu^2}{\mu\beta}, \quad \mathbf{Y} = [y_1, y_2]^T.$$

将上式代入式(1),得

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{f}(\mathbf{Y}, \xi(t), \eta(t)), \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta A}{\mu} & -\mu \\ \frac{\beta A - \mu^2}{\mu} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{Y}, \xi(t), \eta(t)) = \left\{ -\beta y_1 y_2 + \alpha_1 \left(y_1 + \frac{\mu}{\beta} \xi(t) \right) + \beta_1 \eta(t), \right.$$

$$\left. \beta y_1 y_2 + \alpha_2 \left(y_2 + \frac{\beta A - \mu^2}{\mu\beta} \xi(t) \right) + \beta_2 \eta(t) \right\}^T.$$

讨论系统(2)在平衡点(0,0)处的稳定性,等价于讨论系统(1)在平衡点 E_2 的稳定性.令

$$Y = PX, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \frac{\beta A}{\mu^2} & -1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

把方程(3)代入系统(2),得到

$$\dot{X} = P^{-1}BPX + P^{-1}f(PX, \xi(t), \eta(t)). \quad (4)$$

把系统(4)写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + (k_{10} + k_{11} x_1 + k_{12} x_2) \xi(t) + \gamma_1 \eta(t), \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 + a_{21} x_1^2 + a_{22} x_1 x_2 + a_{23} x_2^2 + (k_{20} + k_{21} x_1 + k_{22} x_2) \xi(t) + \gamma_2 \eta(t). \end{cases} \quad (5)$$

系统(5)中各系数如下:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\mu, a_2 = \frac{\mu^2 - \beta A}{\mu}, D = \beta A - 2\mu^2, \gamma_1 = -\frac{\mu^2}{D}(\beta_1 + \beta_2), \\ \gamma_2 &= \frac{1}{D}(\beta_1(\beta A - \mu^2) + \beta_2 \mu^2), a_{21} = \frac{\beta}{D} \left(2\mu^2 - 3\beta A + \frac{A^2 \beta^2}{\mu^2} \right), \\ a_{22} &= \frac{\beta}{D} \left(\frac{A^2 \beta^2}{\mu^2} - 2A\beta \right), a_{23} = \frac{\beta}{D}(\beta A - 2\mu^2), \\ k_{10} &= -\frac{\mu^2}{D} \left(\alpha_1 \frac{\mu}{\beta} + \alpha_2 \frac{\beta A - \mu^2}{\mu \beta} \right), k_{11} = -\frac{\mu^2}{D} \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{\mu^2 - \beta A}{\mu^2} \right), \\ k_{12} &= -\frac{\mu^2}{D}(\alpha_1 - \alpha_2), k_{20} = \frac{\mu}{D\beta}(\beta A - \mu^2)(\alpha_1 + \alpha_2), \\ k_{21} &= \frac{1}{D}(\beta A - \mu^2)(\alpha_1 - \alpha_2), k_{22} = \frac{1}{D}(\alpha_1 \beta A - \mu^2(\alpha_1 + \alpha_2)). \end{aligned}$$

作如下坐标变换: $x_1 = a \cos \theta, x_2 = a \sin \theta$, 则系统(5)化为

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = a^2(a_{21} \cos^2 \theta \sin \theta + a_{22} \cos \theta \sin^2 \theta + a_{23} \sin^3 \theta) + a(a_1 \cos^2 \theta + a_2 \sin^2 \theta) + \\ \quad [k_{10} \cos \theta + k_{20} \sin \theta + a(k_{11} \cos^2 \theta + (k_{12} + k_{21}) \cos \theta \sin \theta) + \\ \quad k_{22} \sin^2 \theta] \xi(t) + (\gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \sin \theta) \eta(t), \\ \frac{d\theta}{dt} = (a_2 - a_1) \cos \theta \sin \theta + a(a_{21} \cos^3 \theta + a_{22} \cos^2 \theta \sin \theta + a_{23} \sin^3 \theta) + \\ \quad [k_{21} \cos^2 \theta + (k_{22} - k_{11}) \cos \theta \sin \theta - k_{12} \sin^2 \theta + \\ \quad \frac{1}{a}(k_{20} \cos \theta - k_{10} \sin \theta)] \xi(t) + \frac{1}{a}(\gamma_2 \cos \theta - \gamma_1 \sin \theta) \eta(t). \end{cases} \quad (6)$$

对系统(6),很难计算出其精确解.根据 Khasminskii 极限定理^[12]可知,在系统所受到的随机激励白噪声过程的强度较小时(即 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 充分小),响应过程 $\{a(t), \theta(t)\}$ 弱收敛于一个二维的 Markov 扩散过程^[12-13].应用随机平均法^[14]可得到该扩散过程(Itô 随机微分方程):

$$\begin{cases} da = m_a dt + \sigma_{11} dW_a + \sigma_{12} dW_\theta, \\ d\theta = m_\theta dt + \sigma_{21} dW_a + \sigma_{22} dW_\theta. \end{cases} \quad (7)$$

系统(7)中, $\begin{bmatrix} m_a \\ m_\theta \end{bmatrix}$ 为漂移系数向量, $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ 是扩散系数矩阵, $W_a(t), W_\theta(t)$ 为相互独立的 Wiener 过程.

将系统(7)写为

$$\begin{cases} da = \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_3}{a} \right] dt + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right)^{1/2} dW_a + (a\mu_5)^{1/2} dW_\theta, \\ d\theta = (a\mu_5)^{1/2} dW_a + \left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{8} \right)^{1/2} dW_\theta. \end{cases} \quad (8)$$

式(8)中

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \mu_2 = 5k_{11}^2 + 5k_{22}^2 + 3k_{12}^2 + 3k_{21}^2 + 6k_{12}k_{21} - 2k_{11}k_{22}, \\ \mu_3 &= \frac{1}{2}(k_{10}^2 + k_{20}^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2), \mu_4 = 3k_{11}^2 + 3k_{22}^2 + k_{12}^2 + k_{21}^2 + 2k_{12}k_{21} + 2k_{11}k_{22}, \\ \mu_5 &= \frac{1}{4}(k_{11} + k_{22})(k_{21} - k_{12}), \mu_6 = k_{11}^2 + k_{22}^2 + 3k_{12}^2 + 3k_{21}^2 - 2k_{12}k_{21} - 2k_{11}k_{22}. \end{aligned}$$

当 $\sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = 0$ 时, 即 $k_{11} + k_{22} = 0$ 或 $k_{21} - k_{12} = 0$ 时, 平均振幅 $a(t)$ 为一个一维 Markov 扩散过程:

$$da = \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_3}{a} \right] dt + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right)^{1/2} dW_a. \quad (9)$$

2 随机稳定性

2.1 局部随机稳定性

判定模型的局部随机稳定性, 最常用的方法是计算该系统的最大 Lyapunov 指数. 定义如下的 Lyapunov 指数:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \| X(t, x_0) \|.$$

考虑线性 Itô 随机微分方程的稳定性. 令 $\mu_3 = 0$, 将方程(9)线性化, 得到

$$da = \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a dt + \left(\frac{\mu_4}{8} a^2 \right)^{1/2} dW_a. \quad (10)$$

利用线性 Itô 随机微分方程的解, 得到方程(10)的解

$$a(t) = a(0) \exp \left(\int_0^t \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} \right) ds + \int_0^t \left(\frac{\mu_4}{8} \right)^{1/2} dW_a(s) \right).$$

利用拟不可积 Hamilton 系统的理论, 定义一个新的范数: $\| a(t) \| = a^{1/2}(t, W_a)$, 于是线性 Itô 随机微分方程的 Lyapunov 指数近似为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln a^{1/2}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2t} \ln a(t) = \frac{1}{2} \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} \right).$$

当 $\mu_1 + \mu_2/8 - \mu_4/16 < 0$ 时, $\lambda < 0$, 该线性 Itô 随机微分方程的平凡解 $a = 0$ 以概率 1 渐近稳定. 由于线性 Itô 随机微分方程具有鲁棒性, 因此原非线性 Itô 随机微分方程(9)的平凡解也以概率 1 稳定, 即随机系统(1)的平衡点 E_2 在随机激励影响下, 以概率 1 稳定; 当 $\mu_1 + \mu_2/8 - \mu_4/16 > 0$ 时, $\lambda > 0$, 该线性 Itô 随机微分方程的平凡解 $a = 0$ 不稳定, 即随机系统(1)的平衡点 E_2 在随机激励影响下不稳定; 当 $\mu_1 + \mu_2/8 - \mu_4/16 = 0$ 时, $\lambda = 0$, 该系统将出现分岔, 具体结果将在下一节给出介绍.

2.2 全局随机稳定性

扩散过程在边界上的性态在很大程度上决定整个扩散过程的性质.如:一维扩散过程的概率渐近稳定与平稳概率密度的存在性完全由该过程在边界上的性态决定.迄今,只对一维扩散过程的边界有较清楚的了解.Lin 和 Cai 对一维扩散过程的边界分类做了很好的总结^[15].下面将通过奇异边界理论,得到模型全局随机稳定的条件.

2.2.1 $\mu_3 = 0$ 时,全局随机稳定性

当 $\mu_3 = 0$ 时,

$$da = \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a dt + \left(\frac{\mu_4}{8} a^2 \right)^{1/2} dW_a. \quad (11)$$

因此,当 $a = 0$ 时,有 $(\mu_4 a^2/8)^{1/2} = 0$,故 $a = 0$ 为系统(11)的第一类奇异边界;当 $a = +\infty$,有 $(\mu_1 + \mu_2/8)a = +\infty$,故 $a = +\infty$ 为系统(11)的第二类奇异边界.

根据奇异边界理论,计算边界 $a = 0$ 处的扩散指数 α_a ,漂移指数 β_a 和特征指数 c_a :

$$\alpha_a = 2, \beta_a = 1,$$

$$c_a = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{2(\mu_1 + \mu_2/8)a \cdot (a - 0)^{\alpha_a - \beta_a}}{((\mu_4 a^2/8)^{1/2})^2} = \frac{2(8\mu_1 + \mu_2)}{\mu_4}.$$

当 $c_a > 1$,即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 > 1/2$,边界 $a = 0$ 是排斥自然;

当 $c_a < 1$,即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 < 1/2$,边界 $a = 0$ 是吸引自然;

当 $c_a = 1$,即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 = 1/2$,边界 $a = 0$ 是严格自然.

计算边界 $a = +\infty$ 处的扩散指数 α_a ,漂移指数 β_a 和特征指数 c_a :

$$\alpha_a = 2, \beta_a = 1,$$

$$c_a = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2(\mu_1 + \mu_2/8)a \cdot (a)^{\alpha_a - \beta_a}}{((\mu_4 a^2/8)^{1/2})^2} = - \frac{2(8\mu_1 + \mu_2)}{\mu_4}.$$

当 $c_a > -1$,即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 < 1/2$,边界 $a = +\infty$ 是排斥自然;

当 $c_a < -1$,即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 > 1/2$,边界 $a = +\infty$ 是吸引自然;

当 $c_a = -1$,即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 = 1/2$,边界 $a = +\infty$ 是严格自然.

根据以上结果,得到如下结论:

1) 如果 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 < 1/2$,边界 $a = 0$ 是吸引自然,边界 $a = +\infty$ 是排斥自然,因此平衡点 E_2 是以概率渐近稳定的;

2) 如果 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 > 1/2$,边界 $a = 0$ 是排斥自然,边界 $a = +\infty$ 是吸引自然,因此平衡点 E_2 是不稳定的;

3) 如果 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 = 1/2$,边界 $a = 0$ 是严格自然,边界 $a = +\infty$ 是严格自然,这是临界情形,可能会发生分岔.

2.2.2 $\mu_3 \neq 0$ 时,全局随机稳定性

当 $\mu_3 \neq 0$ 时,

$$da = \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_3}{a} \right] dt + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right)^{1/2} dW_a. \quad (12)$$

当 $a = 0$ 时, $\mu_3 + (\mu_4 a^2/8)^{1/2} \neq 0$,故 $a = 0$ 不是系统(12)的奇异边界,通过计算可以得到 $a = 0$ 是系统(12)的规则边界.当 $a = +\infty$,有 $(\mu_3 + \mu_1 + \mu_2/8)a = +\infty$,故 $a = +\infty$ 为系统(12)的第二类奇异边界.

计算边界 $a = +\infty$ 处的扩散指数 α_a , 漂移指数 β_a 和特征指数 c_a :

$$\alpha_a = 2, \beta_a = 1,$$

$$c_a = -\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{[2(\mu_1 + \mu_2/8)a + \mu_3/a] \cdot a^{\alpha_a - \beta_a}}{((\mu_3 + \mu_4 a^2/8)^{1/2})^2} = -\frac{2(8\mu_1 + \mu_2)}{\mu_4}.$$

当 $c_a > -1$, 即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 < 1/2$, 边界 $a = +\infty$ 是排斥自然;

当 $c_a < -1$, 即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 > 1/2$, 边界 $a = +\infty$ 是吸引自然;

当 $c_a = -1$, 即 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 = 1/2$, 边界 $a = +\infty$ 是严格自然.

由于边界 $a = 0$ 是规则边界, 因此平衡点 E_2 是不稳定的.

2.2.3 小结

根据以上两种情况的讨论, 可以发现: 当 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 > 1/2$ 时, 边界 $a = +\infty$ 是吸引自然, 平衡点 E_2 是不稳定的; 当 $(8\mu_1 + \mu_2)/\mu_4 < 1/2$ 时, 边界 $a = +\infty$ 是排斥自然. 如果 $\mu_3 = 0$, 边界 $a = 0$ 是吸引自然, 平衡点 E_2 以概率渐近稳定; 如果 $\mu_3 \neq 0$, 边界 $a = 0$ 是规则边界, 平衡点 E_2 不稳定, 可能出现 Hopf 分岔.

3 随机分岔

随机分岔理论^[16]是研究随机动态系统的参数族的定性性态(平衡态、平稳运动及其他长时间渐进运动)随参数的变化而发生的变化. 随机分岔分为两类: 动态分岔(D-分岔)和唯象分岔(P-分岔). 计算不变测度的极值是研究一个非线性动力系统的最流行有效的方法. 不变测度是随机分岔的一个重要特征值.

3.1 D-分岔

考虑 $\mu_3 = 0$, 系统(9)化为

$$da = \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a dt + \left(\frac{\mu_4}{8} a^2 \right)^{1/2} dW_a. \quad (13)$$

当 $\mu_4 = 0$ 时, 系统(13)为确定系统, 且不存在分岔. 因此, 讨论 $\mu_4 \neq 0$ 的情况.

令

$$m(a) = (\mu_1 + \mu_2/8 - \mu_4/16)a, \quad \sigma(a) = (\mu_4/8)^{1/2}a.$$

由系统(13)生成的连续动态系统, 如下:

$$\varphi(t)x = x + \int_0^t m(\varphi(s)x) ds + \int_0^t \sigma(\varphi(s)x) \circ dW_a,$$

其中, $\circ dW_a$ 表示 Stratonovich 意义下的微分, 它是以 x 为初值的系统(13)的唯一强解. 这里 $m(0) = 0, \sigma(0) = 0$, 因此 0 为 φ 的一个固定点. 由于 $m(a)$ 有界, 且对任意的 $a \neq 0$, 满足椭圆型条件: $\sigma(a) \neq 0$, 这保证最多只有一个平稳概率密度. 求解与系统(13)相应的 FPK 方程:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a \right] p \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left\{ \left[\frac{\mu_4}{8} a^2 \right] p \right\}. \quad (14)$$

令 $\partial p / \partial t = 0$, 得到方程(14)的解:

$$p(a) = c | \sigma^{-1}(a) | \exp \left(\int_0^a \frac{2m(u)}{\sigma(u)} du \right). \quad (15)$$

上述动态系统有两种可能的平衡状态: 不动点和非平凡平稳运动. 前者的不变测度 δ_0 的密度为 δ_x , 后者的不变测度 ν 的密度为式(15). 研究 D-分岔, 需要计算这两个不变测度的 Lyapunov 指数.

根据线性 Itô 随机微分方程的解, 得到方程(13)的解为

$$a(t) = a(0) \exp\left(\int_0^t \left(m'(a) + \frac{\sigma(a)\sigma''(a)}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma'(a) dW_a(s)\right). \quad (16)$$

动态系统 φ 关于测度 μ 的 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda_\varphi(\mu) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|a(t)\|. \quad (17)$$

将式(16)代入式(17), 由于 $\sigma(0) = 0, \sigma''(a) = 0$, 得不动点 Lyapunov 指数:

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(\delta_0) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left[\ln a(0) + m'(0) \int_0^t ds + \sigma'(0) \int_0^t dW_a(s) \right] = \\ &= m'(0) + \sigma'(0) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_a(t)}{t} = \\ &= m'(0) = \mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16}. \end{aligned}$$

对于不变测度 ν , 计算 Lyapunov 指数:

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi(\nu) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (m'(a) + \sigma(a)\sigma''(a)) ds = \\ &= \int_{\mathbf{R}} \left(m'(a) + \frac{\sigma(a)\sigma''(a)}{2} \right) p(a) da = \\ &= -2 \int_{\mathbf{R}} \left[\frac{m(a)}{\sigma(a)} \right]^2 p(a) da = \\ &= -32\sqrt{2} \mu_4^{3/2} m'(a)^2 \exp\left[\frac{16}{\mu_4} m'(a)\right] = \\ &= -32\sqrt{2} \mu_4^{3/2} \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} \right)^2 \exp\left[\frac{16}{\mu_4} \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} \right)\right]. \end{aligned}$$

设 $\alpha = \mu_1 + \mu_2/8 - \mu_4/16$, 可知: 不动点不变测度在 $\alpha < 0$ 时稳定, 而非平凡平稳状态不变测度在 $\alpha > 0$ 时稳定, 所以 $\alpha = \alpha_D = 0$ 是一个 D-分岔点.

3.2 P-分岔

根据振幅 $a(t)$ 的 Itô 随机微分方程, 我们得到 $a(t)$ 的 FPK 方程:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_3}{a} \right] p \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left\{ \left[\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right] p \right\}. \quad (18)$$

初值为 $p(a, t | a_0, t_0) \rightarrow \delta(a - a_0), t \rightarrow t_0$, 其中 $p(a, t | a_0, t_0)$ 是扩散过程 $a(t)$ 的转移概率密度. 平稳概率密度 $p_{st}(a)$ 是 $a(t)$ 的不变测度, $p_{st}(a)$ 是下面退化系统的解:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial a} \left\{ \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_3}{a} \right] p \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left\{ \left[\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right] p \right\}. \quad (19)$$

经计算, 得到

$$p_{st}(a) = 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{-3\nu} \mu_3^{2-\nu} \left(\frac{\mu_4}{\mu_3} \right)^{3/2} \Gamma(2-\nu) \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right) \right)^{-1} a^2 (\mu_4 a^2 + 8\mu_3)^{\nu-2}, \quad (20)$$

其中 $\nu = (8\mu_1 + \mu_2)\mu_4^{-1}$, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

根据 Namachivaya 的理论, 不变测度的极值包含了非线性随机系统最重要的本质. 当噪声

强度趋于 0 时, $p_{st}(a)$ 的极值渐近表现出确定系统的行为. 如果扩散过程 $a(t)$ 是遍历的, 根据 Oseledec 遍历定理, $p_{st}(a)$ 可以看作是停留在 $a(t)$ 附近的时间尺度.

通过以上分析, 可知参数 $\mu_1 < 0, \mu_3 > 0, \mu_2 > \mu_4 > 0$. 如果 $p_{st}(a)$ 在 a^* 处有一个最大值, 样本轨迹将长时间停留在 a^* 的附近, 即 a^* 是以概率稳定的 (很大的概率). 如果 $p_{st}(a)$ 有一个最小值 (当 $p_{st}(a) = 0$ 时), 结果则相反.

下面计算系统 (9) 的振幅 a^* , 使得 $p_{st}(a)$ 在 a^* 处取得最大值. 因此 a^* 满足下列条件:

$$\left. \frac{dp_{st}(a)}{da} \right|_{a=a^*} = 0, \quad \left. \frac{d^2p_{st}(a)}{da^2} \right|_{a=a^*} < 0.$$

由 $dp_{st}(a)/da = 0$ 解得

$$a = 0 \text{ 或 } a = \bar{a} = \sqrt{-8\mu_3 / (8\mu_1 + \mu_2 - \mu_4)} \quad (\text{当 } (8\mu_1 + \mu_2) / \mu_4 < 1/2).$$

由于

$$\left. \frac{d^2p_{st}(a)}{da^2} \right|_{a=0} = 2^{7+3(8\mu_1+\mu_2-\mu_4)\mu_4^{-1}} \mu_3^{2+(8\mu_1+\mu_2-\mu_4)\mu_4^{-1}} > 0,$$

$$\left. \frac{d^2p_{st}(a)}{da^2} \right|_{a=\bar{a}} = \frac{(8\mu_3 - 8\mu_3\mu_4 / (8\mu_1 + \mu_2 - \mu_4))^{(8\mu_1 + \mu_2) / \mu_4}}{-16\mu_3^2} < 0.$$

因此 $a^* = \bar{a}$, 同时, 在 $a = 0$ 时, $p_{st}(a) = 0$ (最小值). 这表明系统受到随机激励时, 平衡点 ($a = 0$) 是不稳定的. 该结论与奇异边界理论获得的结果是一致的. 原始的非线性随机系统在 $a = \bar{a}$ 时发生随机 Hopf 分岔. 因此, $x_1^2 + x_2^2 = -8\mu_3 / (8\mu_1 + \mu_2 - \mu_4)$, 即 $a = \bar{a}$. 不同参数下发生 Hopf 分岔的概率和位置见表 1 和图 1.

表 1 系统 (9) 在不同参数条件下发生随机 Hopf 分岔的位置和概率

Table 1 Probabilities and positions of Hopf bifurcation occurrence of system (9) under different parameter conditions

condition	parameter	$a = \bar{a}$	$p_{st} = \bar{a}$
A	$\mu_1 = -0.7, \mu_2 = 2.5, \mu_3 = 0.1, \mu_4 = 2.7$	0.371 4	0.741 4
B	$\mu_1 = -0.7, \mu_2 = 3.5, \mu_3 = 0.1, \mu_4 = 2.7$	0.408 2	0.616 4
C	$\mu_1 = -0.7, \mu_2 = 4.5, \mu_3 = 0.1, \mu_4 = 2.7$	0.458 8	0.475 1
D	$\mu_1 = -0.7, \mu_2 = 3.5, \mu_3 = 0.3, \mu_4 = 2.7$	0.707 1	0.355 9
E	$\mu_1 = -0.7, \mu_2 = 3.5, \mu_3 = 0.5, \mu_4 = 2.7$	0.912 9	0.275 7

表 2 系统 (1) 在不同参数条件下发生随机 Hopf 分岔的位置和概率

Table 2 Probabilities and positions of Hopf bifurcation occurrence of system (1) under different parameter conditions

condition	parameter	$a = \bar{a}$	$p_{st} = \bar{a}$
A	$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.5, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.3$	0.509 5	0.703 5
B	$\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.3, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.3$	0.476 5	0.821 2
C	$\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.7, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.3$	0.552 2	0.572 6
D	$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.5, \beta_1 = 0.9, \beta_2 = 0.6$	0.638 9	0.561 1
E	$\alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.5, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.2$	0.403 2	0.889 0

根据原始系统的参数值计算 Hopf 分支具有重大意义. 假设原始系统 (1) 的参数值如下:

$$A = 1.7, \beta = 0.5, \mu = 0.3,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 见表 2. 原始系统在不同参数条件下发生 Hopf 分岔的概率和位置见表 2 和图 2. 在参数条件 A (表 2) 下, 原始系统的平稳概率密度函数 $p(x_1, x_2)$ 的图像如图 3 所示.

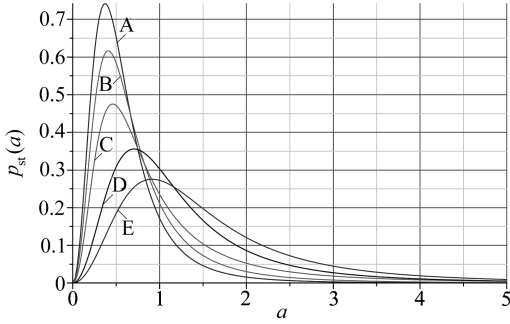


图1 表1中对应参数的平稳概率密度 $p_{st}(a)$ 和发生随机 Hopf 分岔的位置

Fig.1 Steady-state probability density $p_{st}(a)$ and position of stochastic Hopf bifurcation corresponding to the parameter values in table 1

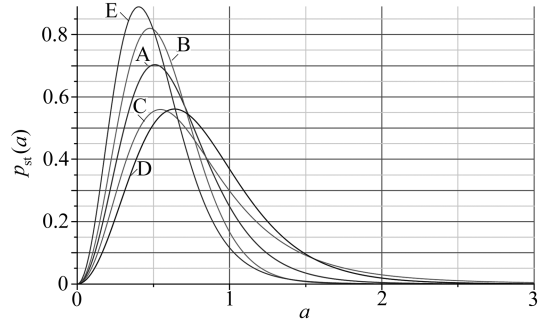


图2 表2中对应参数的平稳概率密度 $p_{st}(a)$ 和发生随机 Hopf 分岔的位置

Fig.2 Steady-state probability density $p_{st}(a)$ and position of stochastic Hopf bifurcation corresponding to the parameter values in table 2

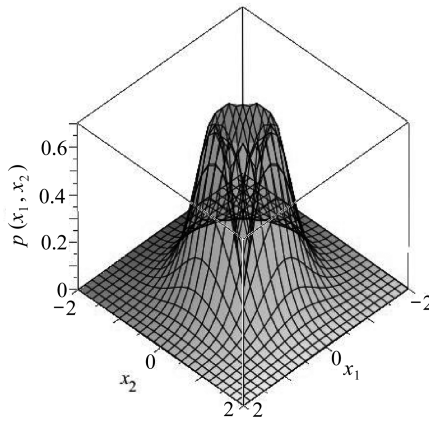


图3 在 $A = 1.7, \beta = 0.5, \mu = 0.3, \alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.5, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.3$ 条件下的平稳概率密度 $p(x_1, x_2)$

Fig.3 Steady-state probability density $p(x_1, x_2)$ at $A = 1.7, \beta = 0.5, \mu = 0.3, \alpha_1 = 0.6, \alpha_2 = 0.5, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.3$

4 结 论

本文讨论了一个带有双噪声的随机 SI 传染病模型。

与系统(1)相对应的确定性 SI 传染病模型中,当 $R_0 = \beta A / \mu^2 \leq 1$ 时,系统的无病平衡点 E_1 全局渐近稳定;当 $R_0 = \beta A / \mu^2 > 1$ 时,系统的正平衡点 E_2 全局渐近稳定.当系统(1)受到随机激励时,根据 Lyapunov 指数得到局部随机稳定的条件:当 $\mu_1 + \mu_2 / 8 - \mu_4 / 16 < 0$ 时,正平衡点 E_2 以概率 1 稳定;通过奇异边界理论得到全局随机稳定的条件:当 $(8\mu_1 + \mu_2) / \mu_4 < 1/2, \mu_3 = 0$ 时,平衡点 E_2 以概率渐近稳定.

可以看出,由于随机因素的影响,使得原确定性系统的稳定性条件发生了改变.利用动态系统不变测度的 Lyapunov 指数和平稳概率密度分析了模型的随机分岔行为:当 $\alpha = \mu_1 + \mu_2 / 8 - \mu_4 / 16 = 0$ 时,随机系统(1)发生 D-分岔;分析了不同参数条件下发生随机 Hopf 分岔的位置和概率,并进行数值模拟.由于随机扰动是不可避免的,因此研究随机动力系统在平衡点处的

Hopf 分岔比确定性系统在平衡点处的稳定性更有意义. 由于在系统的平衡点处发生随机 Hopf 分岔, 系统的轨线有很大概率停留在平衡点邻域内的某个极限环上, 即疾病有很大概率会呈现出周期性爆发的现象. 根据表 1, μ_3 可以作为影响随机 Hopf 分岔的主要参数: 当 μ_3 增大时, 发生随机 Hopf 分岔的位置变大 (即极限环跟平衡点的距离增大), 而发生随机 Hopf 分岔的概率变小.

根据数值模拟的结果, 可以看出: 在加性随机激励不变时, 改变乘性随机激励的强度, 主要影响发生随机 Hopf 分岔发生的概率, 对发生随机 Hopf 位置影响较小; 而在乘性随机激励不变时, 改变加性随机激励的强度, 对发生随机 Hopf 分岔的位置和概率都有很大影响.

参考文献 (References):

- [1] Capasso V. Global solution for a diffusive nonlinear deterministic epidemic model[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1978, **35**(2): 274-284.
- [2] XIAO Dong-mei, RUAN Shi-gui. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate[J]. *Mathematical Biosciences*, 2007, **208**(2): 129-419.
- [3] ZHANG Tai-lei, TENG Zhi-dong. Global behavior and permanence of SIRS epidemic model with time delay[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, **9**(4): 1409-1424.
- [4] LI Jian-quan, MA Zhi-en, Brauer F. Global analysis of discrete-time SI and SIS epidemic models[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2007, **4**(4): 699-710.
- [5] JIANG Da-qing, SHI Ning-zhong, LI Xiao-yue. Global stability and stochastic permanence of a non-autonomous logistic equation with random perturbation[J]. *Mathematical Analysis and Applications*, 2008, **340**(1): 588-597.
- [6] JIANG Da-qing, YU Jia-jia, JI Chun-yan, SHI Ning-zhong. Asymptotic behavior of global positive solution to a stochastic SIR model[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, **54**(1/2): 221-232.
- [7] YUAN Cheng-jun, JIANG Da-qing, O' Regan D, Agarwal R P. Stochastically asymptotically stability of the multi-group SEIR and SIR models with random perturbation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, **17**(6): 2501-2516.
- [8] LIU Hong, YANG Qing-shan, JIANG Da-qing. The asymptotic behavior of stochastically perturbed DI SIR epidemic models with saturated incidences[J]. *Automatica*, 2012, **48**(5): 820-825.
- [9] Tornatore E, Buccellato S M, Vetro P. Stability of a stochastic SIR system[J]. *Physica A*, 2005, **354**: 111-126.
- [10] Hethcote H W. Qualitative analyses of communicable disease models[J]. *Mathematical Biosciences*, 1976, **28**: 335-356.
- [11] Hethcote H W. The mathematics of infectious diseases[J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2000, **42**(4): 599-653.
- [12] Khasminskii R. On the principle of averaging for Itô's stochastic differential equations[J]. *Kybernetika (Prague)*, 1968, **4**: 260-279.
- [13] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制——Hamilton 理论系统框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (ZHU Wei-qiu. *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control: Hamilton Theory System Frame* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))
- [14] 朱位秋. 随机平均法及其应用[J]. 力学进展, 1987, **17**(3): 342-352. (ZHU Wei-qiu. Stochastic averaging methods and their applications[J]. *Advances in Mechanics*, 1987, **17**(3): 342-352.

(in Chinese))

- [15] Lin Y K, Cai G Q. *Probabilistic Structural Dynamics, Advanced Theory and Applications* [M]. New York: McGraw-Hill, 1995.
- [16] Arnold L. *Random Dynamical Systems*[M]. New York: Springer, 1998.

Stochastic Stability and Bifurcation of an SI Epidemic Model With Double Noises

ZHAO Jin-qing, LIU Mao-xing, MA Yang-jun, WANG Wan-wan

(*Department of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, P.R.China*)

Abstract: A stochastic SI epidemic model was proposed with double noises. With the stochastic averaging method and nonlinear dynamic theory, the SI epidemic model was simplified. According to the Lyapunov exponent and singular boundary theory, some new criteria ensuring the model's local and global stochastic stability were obtained. By dint of the Lyapunov exponent of invariant measure and the stationary probability density, the stochastic bifurcation of the model was explored. Results show that the system under the effect of random factors becomes more sensitive and more unstable.

Key words: stochastic averaging method; Lyapunov exponent; invariant measure; stochastic stability; stochastic bifurcation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(10901145)