

# 新三维非线性系统的动力学分析\*

张转周<sup>1</sup>, 陕振沛<sup>2</sup>, 刘衍民<sup>1</sup>

(1. 遵义师范学院 数学与计算机科学学院, 贵州 遵义 563002;

2. 六盘水师范学院 数学系, 贵州 六盘水 553004)

**摘要:** 通过代数方法,构造出来一个具有复杂混沌吸引子的非线性混沌自治三维系统.从理论和数值两方面对吸引子进行了分析和仿真,得到了系统在平衡点处不稳定的参数范围.通过分岔图和 Lyapunov 指数谱进一步揭示了系统丰富的动力学行为.

**关键词:** 稳定性; 相图; 分岔; Lyapunov 指数

**中图分类号:** O193      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.12.011

## 引言

早在 1903 年,法国学者 Poincaré 在《科学与方法》一书中明确指出了三体问题解的随机性,成为世界上第一位预见到混沌现象的人.1963 年 Lorenz 得到第一个混沌系统之后,许多新的混沌系统也陆续提出,并且得到了广泛地应用<sup>[1-4]</sup>.1999 年,陈关荣利用反控制的方法发现了一个与 Lorenz 系统不同的混沌系统称为 Chen 系统.文献<sup>[5-6]</sup>中提出并实现了两个特殊的吸引子,即多涡旋混沌吸引子和 Lyapunov 指数恒为常数的吸引子.2010 年, Liu 提出了一个新的类 Lorenz 混沌系统<sup>[7]</sup>.这些典型混沌系统的出现极大推动了非线性科学的发展.

本文构造了一个新的类 Lorenz 混沌系统,通过理论推导和数值仿真对其基本动力学特性进行研究,并且利用分岔图、Lyapunov 指数图和时域图等发现系统在取定特定参数和初值时会发生 Hopf 分岔现象,揭示了系统丰富的动力学行为,为现实应用提供了重要依据.

## 1 数学模型及动力学特性

### 1.1 数学模型的提出

在 Lorenz 系统模型的基础上,设计了一个新的三维自治混沌系统,下面对其进行介绍和分析.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = xz - y, \\ \dot{z} = b - xy - (a + c)z, \end{cases} \quad (1)$$

\* 收稿日期: 2013-04-27; 修订日期: 2013-10-24

基金项目: 贵州省科学技术基金交叉学科资助项目(黔科合 J 字 LKLS[2013]32 号)

作者简介: 张转周(1984—),男,甘肃静宁人,硕士(通讯作者. E-mail: zzz19841001@163.com);

陕振沛(1984—),男,湖北公安人,讲师,硕士( E-mail: shanzhenpeiboshi@126.com);

刘衍民(1978—),男,黑龙江海林人,教授,博士( E-mail: yanmin7813@gmail.com).

其中,  $(x, y, z)^T \in R^3$ , 为状态变量,  $a, b, c$  为实参数, 且  $a > 0, b > 0, a > -c$ , 系统(1) 中仅含有两个非线性项  $xz, xy$ . 可通过数学证明系统(1) 与 Lorenz 系统族中的任意一个都不拓扑等价, 是一个新的混沌系统.

## 1.2 基本性质

### 1) 对称性和不变形

注意到原系统在  $T: (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  的变换下保持不变, 所以系统(1) 关于  $z$  轴对称, 即若  $\alpha$  是系统的解, 则在  $T\alpha$  下的解也满足系统(1), 显然  $z$  轴也是系统中的一条解轨迹, 因此对于  $t \rightarrow 0$ , 轴上所有的解轨迹都趋近于原点.

### 2) 吸引子的存在性

系统(1) 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ z & -1 & x \\ -y & -x & -x - (a + c) \end{bmatrix}.$$

根据 Liouville 定理, 向量场散度为

$$\nabla v = \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial z} = -(2a + c + 1) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i,$$

其中,  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  为矩阵  $J$  的特征根.

由于  $2a + c + 1 > 0$ , 所以系统(1) 是耗散的, 且以指数形式  $v(t) = v(0)e^{-(2a+c+1)t}$  收敛. 因此, 系统(1) 的轨线都会被限制在一个体积为 0 的集合上, 并且动力学行为被限制(或固定)在一个吸引子上, 故吸引子是存在的.

## 1.3 平衡点的稳定性分析

通过计算, 得到系统(1) 的 3 个平衡点分别为

$$O\left(0, 0, \frac{b}{a+c}\right), P_+(\sqrt{b-a-c}, \sqrt{b-a-c}, 1), \\ P_-( -\sqrt{b-a-c}, -\sqrt{b-a-c}, 1).$$

根据系统 Jacobi 矩阵可得特征方程为

$$\lambda^3 + (2a + c + 1)\lambda^2 + (2a + c + a^2 + ac - az + x^2)\lambda + a^2 + ac + axy - a(a + c)z + ax^2 = 0, \quad (2)$$

其中,  $\lambda$  为特征根.

将平衡点  $O(0, 0, b/(a+c))$  代入特征方程得

$$\lambda^3 + (2a + c + 1)\lambda^2 + \left(2a + c + a^2 + ac - \frac{ab}{a+c}\right)\lambda + a^2 + ac - ab = 0.$$

当  $a^2 + ac - ab < 0$  时, 由 Routh-Hurwitz 定理知平衡点  $O$  是不稳定的, 由于  $P_+, P_-$  具有对称性, 这里只对  $P_+$  进行讨论.

将  $P_+(\sqrt{b-a-c}, \sqrt{b-a-c}, 1)$ , 代入特征方程中有

$$\lambda^3 + (2a + c + 1)\lambda^2 + (a^2 + ac + b)\lambda + 2a(b - a - c) = 0,$$

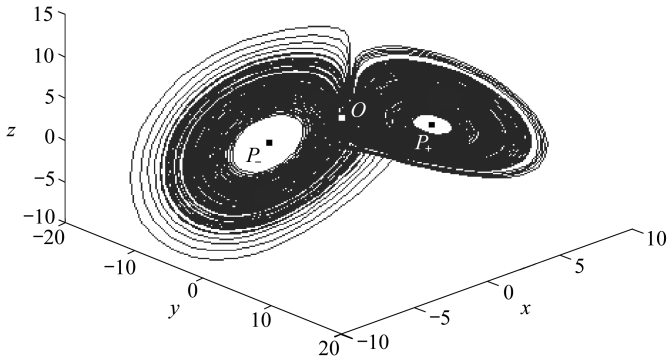
则平衡点  $P_+$  不稳定的参数条件为

$$b < \frac{(a^2 + ac)(2a + c + 3)}{c + 1}. \quad (3)$$

### 1.4 吸引子数值仿真

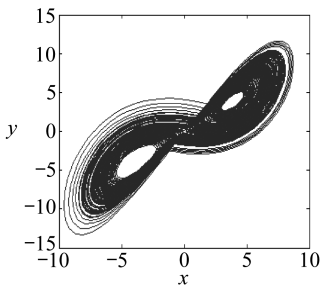
当参数  $a = 5, c = -4$  时,由参数条件(3)可知系统(1)在  $b > 15$  时处于不稳定状态,这里取  $b = 16$ .这时  $-(2a + c + 1) = -7 < 0$ , 则系统是耗散的,平衡点为

$$O(0,0,16), P_+(\sqrt{15}, \sqrt{15}, 1), P_-( -\sqrt{15}, -\sqrt{15}, 1). \quad (4)$$



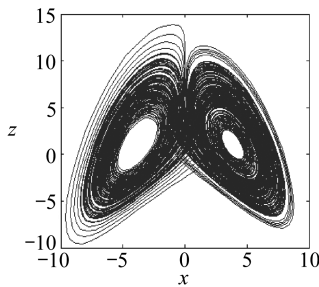
(a) 三维空间吸引子

(a) Attractors in the three dimensional space



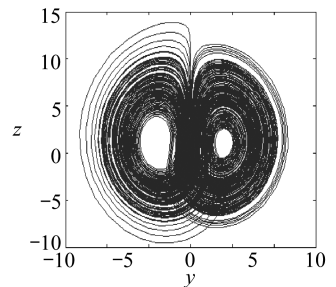
(b) x-y 投影

(b) x-y projection



(c) x-z 投影

(c) x-z projection

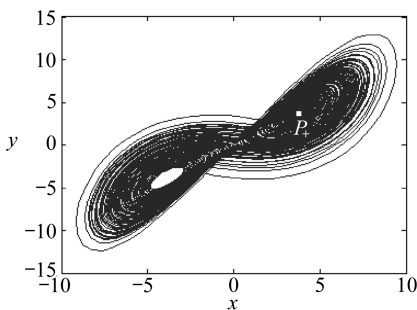


(d) y-z 投影

(d) y-z projection

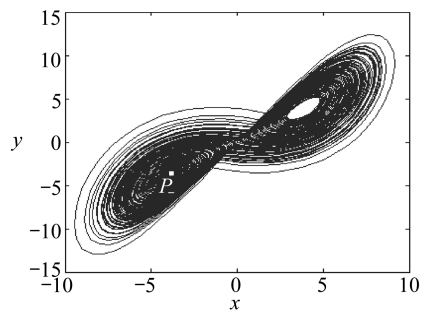
图 1 系统(1)的一个混沌吸引子数值仿真

Fig.1 Numerical simulation of chaotic attractors for system (1)



(a) 初值(3.87, 3.87, 1)

(a) Initial value (3.87, 3.87, 1)



(b) 初值(-3.87, -3.87, 1)

(b) Initial value (-3.87, -3.87, 1)

图 2 参数  $a = 5, b = 16, c = -4$  时,系统(1)不同初值下的混沌吸引子

Fig.2 When parameters  $a = 5, b = 16, c = -4$ , chaotic attractors for system (1) under different initial values

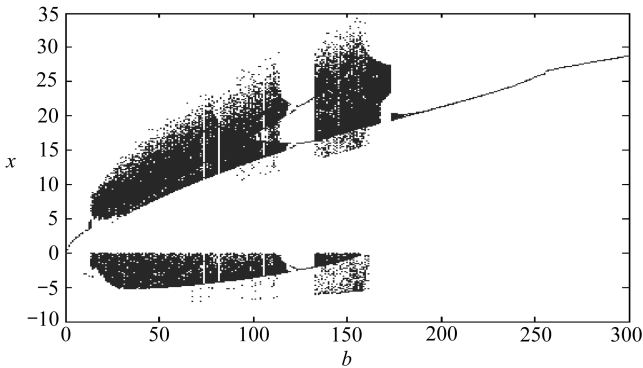
由式(2)可得平衡点  $O$  的特征值:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3 + 2\sqrt{21}, \lambda_3 = -3 - 2\sqrt{21}.$$

因此,平衡点  $O$  是不稳定的,同理可知,  $P_+$ ,  $P_-$  都是稳定的.这里给定参数  $a = 5$ ,  $b = 16$ ,  $c = -4$ ,系统初值为  $(0.1, 0.1, 0.1)$ ,可以得到原系统的一个混沌吸引子的 Matlab 仿真相图,如图 1 所示.为了观察平衡点的特性,这里保持参数  $a, b, c$  的取值不变,分别取系统初值为  $(3.87, 3.87, 1)$  和  $(-3.87, -3.87, 1)$ ,可以得到系统(1)在不同初值下的混沌吸引子,如图 2 所示.通过图 2 发现当系统所取初值接近平衡点时,混沌吸引子的形态有所改变,即形成吸引子的同时也围绕稳定的平衡点  $P_+$  和  $P_-$  做不规则的环绕运动,使相轨迹在平衡点的某个邻域内变得十分密集.

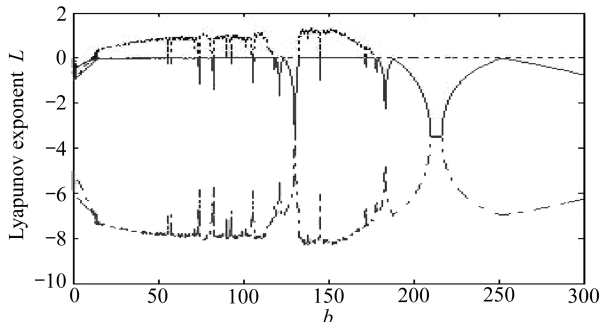
## 2 动力学行为分析

固定  $a = 5, c = -4$ ,参数  $b \in [0, 300]$ ,初值  $(0.1, 0.1, 0.1)$  系统的分岔图及 Lyapunov 指数如图 3 所示.随着  $b$  的增大,系统由不动点进入一个较大的含有多个周期窗口的混沌区域,在每个周期窗口都有逆、倍周期分岔现象,都是周期混沌的阵发过渡.由 Kaplan-Yorke 猜想公式,确定系统吸引子的分数维很低,这与 Lorenz 系统类似.值得注意的是,取初值  $(0.1, 0.1, 0.1)$  和



(a) 分岔图

(a) Bifurcation diagram



(b) Lyapunov 指数图

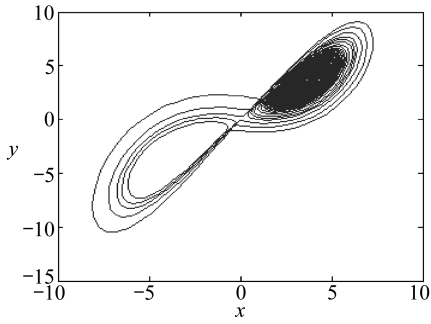
(b) Lyapunov exponent graph

图 3 关于参数  $b$  的分岔图和 Lyapunov 指数图

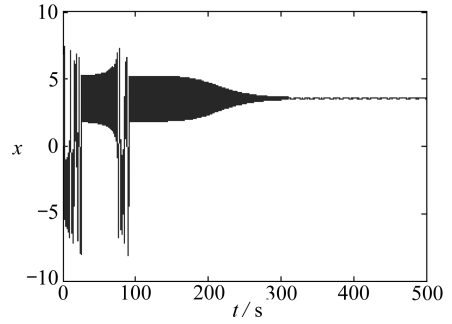
Fig.3 The bifurcation diagram and Lyapunov exponent graph vs. parameter  $b$

$(3.87, 3.87, 1)$  时,系统表现出不同的态.当  $b = 13.73$  时,在初值  $(0.1, 0.1, 0.1)$  下表现为混沌态,而当初值为  $(3.87, 3.87, 1)$  时则出现周期运动的极限环,发生了超临界的 Hopf 分岔现象,

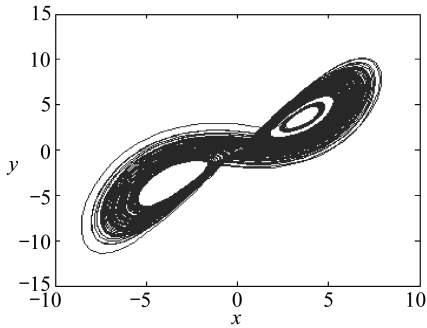
如图 4 所示。



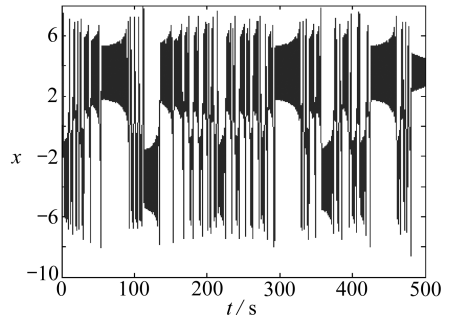
(a)  $b = 13.72$ , 初值(0.1,0.1,0.1)的相图  
(a)  $b = 13.72$ , the phase diagram at initial value (0.1,0.1,0.1)



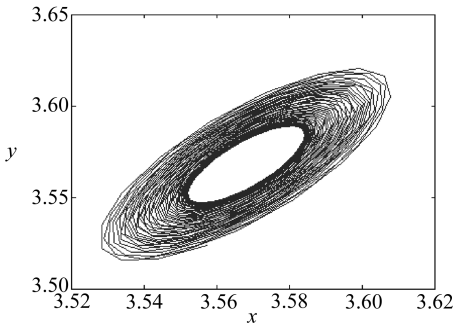
(b)  $b = 13.72$ , 初值(0.1,0.1,0.1)的时域图  
(b)  $b = 13.72$ , the time domain chart at initial value (0.1,0.1,0.1)



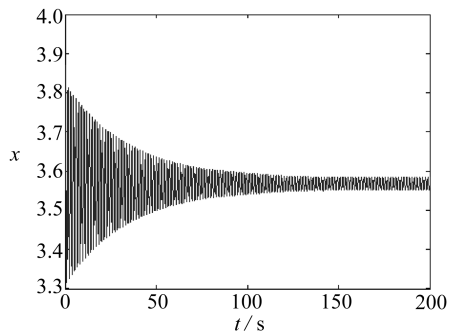
(c)  $b = 13.73$ , 初值(0.1,0.1,0.1)的相图  
(c)  $b = 13.73$ , the phase diagram at initial value (0.1,0.1,0.1)



(d)  $b = 13.73$ , 初值(0.1,0.1,0.1)的时域图  
(d)  $b = 13.73$ , the time domain chart at initial value (0.1,0.1,0.1)



(e)  $b = 13.73$ , 初值(3.87,3.87,1)的相图  
(e)  $b = 13.73$ , the phase diagram at initial value (3.87,3.87,1)



(f)  $b = 13.73$ , 初值(3.87,3.87,1)的时域图  
(f)  $b = 13.73$ , the time domain chart at initial value (3.87,3.87,1)

图 4 参数  $a = 5, c = -4$  时系统的相图和时域图

Fig.4 When parameters  $a = 5, c = -4$ , the system phase diagram and time domain chart

### 3 结 论

本文构造了一个新的三维自治系统,根据 Routh-Hurwitz 定理得到系统不稳定的参数取值

范围.通过数值仿真得到系统的混沌吸引子.最后,通过分析系统的相图、时域图、分岔图以及 Lyapunov 指数谱图发现了系统具有 Hopf 分岔、混沌等丰富的动力学行为,为现实应用提供了重要依据.然而,系统的动力学研究还没有结束,分岔和混沌形成的机理依然是研究的难点.因此,继续对系统进行研究依然显得很有意义.

### 参考文献(References):

- [1] 周平, 危丽佳, 程雪峰. 只有一个非线性项的超混沌系统[J]. 物理学报, 2009, **58**(8): 5201-5208. (ZHOU Ping, WEI Li-jia, CHENG Xue-feng. A hyperchaos system with only one nonlinear term[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(8): 5201-5208. (in Chinese))
- [2] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 11-19. (CHEN Guan-rong, LÜ Jin-hu. *Lorenz System Family Dynamics Analysis, Control and Synchronization*[M]. Beijing: Science Press, 2005: 11-19. (in Chinese))
- [3] 刘凌, 苏燕辰, 刘崇新. 一个新混沌系统及其电路仿真实验[J]. 物理学报, 2006, **55**(8): 3933-3937. (LIU Ling, SU Yan-chen, LIU Chong-xin. A new chaotic system and its circuit emulation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2006, **55**(8): 3933-3937. (in Chinese))
- [4] LI Xiang-feng, CHU Yan-dong, ZHANG Jian-gang. Nonlinear dynamics and circuit implementation for a new Lorenz-like attractor[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, **41**(5): 2360-2370.
- [5] LÜ Jin-hu, Murali K, Sinha S, Leung H, Aziz-Alaoui M A. Generating multi-scroll chaotic attractors by thresholding[J]. *Physics Letters A*, 2008, **372**(18): 3234-3239.
- [6] LI Chun-biao, WANG De-chun. An attractor with invariable Lyapunov exponent spectrum and its Jerk circuit implementation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2009, **58**(2): 764-770.
- [7] LIU Yong-jiang, YANG Qi-gui. Dynamics of a new Lorenz-like chaotic system[J]. *Nonlinear Anal: Real World Applications*, 2010, **11**(4): 2563-2572.

## Dynamics Analysis for a New 3-Dimensional Nonlinear System

ZHANG Zhuan-zhou<sup>1</sup>, SHAN Zhen-pei<sup>2</sup>, LIU Yan-min<sup>1</sup>

(1. College of Mathematics and Computer Science, Zunyi Normal University,

Zunyi, Guizhou 563002, P.R.China;

2. Department of Mathematics, Liupanshui Normal University,

Liupanshui, Guizhou 553004, P.R.China)

**Abstract:** The nonlinear chaotic autonomous 3-dimensional system is algebraically simple but could generate complex chaotic attractors. The chaotic system was demonstrated through theoretical analysis and numerical simulation, and the range of the parameters which could induce the system to be unstable was analyzed. The dynamic characteristics of the system are revealed with bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum.

**Key words:** stability; phase diagram; bifurcation diagram; Lyapunov-exponent spectrum