

# 结构动力学方程的辛 RK 方法\*

郭 静<sup>1,2</sup>, 邢誉峰<sup>2</sup>

(1. 北京强度环境研究所 可靠性与环境工程技术重点实验室, 北京 100076;  
2. 北京航空航天大学 固体力学研究所, 北京 100191)

**摘要:** 针对有阻尼和外载荷的线性动力学常微分方程, 给出了  $s$  级  $2s$  阶隐式 Gauss-Legendre 辛 RK (Gauss-Legendre symplectic Runge-Kutta, GLSRK) 方法的一种显式高效的执行格式, 首次给出了 Gauss-Legendre 辛 RK 方法和经典 RK 方法 (classical RK, CRK) 的谱半径和单步相位误差的显式表达式, 并将两者进行了比较. 线性多自由度系统和非线性 Rayleigh 系统数值算例表明, 对结构动力学系统而言, 辛 RK 方法远比经典 RK 方法优越, 在运动学特性和长时间数值模拟方面尤为明显.

**关键词:** 辛; RK 方法; 谱半径; 人工阻尼; 相位误差

**中图分类号:** O342; TU311.3 **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.01.002

## 引 言

辛性是 Hamilton 系统的一种典型特性, 因此, 学者们很自然地寻求具有该特性的数值方法. 有关辛算法的先驱工作归功于 Vogelaere<sup>[1]</sup>, Ruth<sup>[2]</sup> 和冯康<sup>[3]</sup> 等. 关于辛算法的代表性著作由 Sanz-Serna 和 Calvo<sup>[4]</sup> 完成. 辛算法严格保持 Hamilton 系统的辛结构, 在长时间数值稳定性方面, 辛算法具有独特的优越性.

作为辛算法一种的辛 RK (symplectic Runge-Kutta, SRK) 方法的系统研究大约起始于 1988 年, 其完备特性由 Lasagni<sup>[5]</sup> 采用生成函数法独立发现, 有关其代数稳定性则由 Sanz-Serna<sup>[6]</sup> 和 Suris<sup>[7]</sup> 基于 Burrage 等<sup>[8]</sup> 和 Crouzeix<sup>[9]</sup> 经典文献中的思想共同发现.

值得一提的是 Sanz-Serna<sup>[6]</sup> 的优秀工作. 该工作表明所有的 Gauss-Legendre 方法都是规范的, 或对偶的, 并且揭示了线性 Hamilton 系统能够通过 Gauss-Legendre 型 RK 方法进行数值积分, 通过该方法求解时, Hamilton 系统的能量和辛结构均能够精确地保持, 且存在任意高阶的 SRK 方法. 对非线性情形, 辛结构仍然可能得到保持, 但却不保系统的能量. 紧随 1988 年之后, 许多文献关注于不同级数和阶数的 SRK 方法的构造和阶数条件, 但对于其实际应用却较少关注, 对结构动力学尤为如此. 主要关于 SRK 方法构造的文献可分类如下: 其中有 SRK 方法<sup>[5-7, 10-11]</sup>, SPRK (symplectic partitioned RK) 方法<sup>[12-15]</sup>, SRKN (symplectic Runge-Kutta-Nyström)

\* 收稿日期: 2013-07-15; 修订日期: 2013-10-21

基金项目: 国家自然科学基金(11172046; 11172028; 11372021)

作者简介: 郭静(1983—), 女, 石家庄人, 工程师, 博士(通讯作者. Tel: +86-10-68384847; E-mail: guojing2662632@126.com);  
邢誉峰(1964—), 男, 教授, 博士生导师(Tel: +86-10-82339964; E-mail: xingyf@buaa.edu.cn).

方法<sup>[16-20]</sup>,带实数特征值的高效 SRK 方法<sup>[21-23]</sup>和 SEFRK(symplectic exponentially-fitted RK)方法<sup>[24-27]</sup>等.

SRK 方法已成功用于数值求解天体力学<sup>[28-29]</sup>、量子力学<sup>[30]</sup>、等离子物理<sup>[31]</sup>、加速器物理学和光学<sup>[32]</sup>、混沌<sup>[33]</sup>等领域的多种问题,但是,除了文献[34]之外,鲜有文献研究利用 SRK 方法求解结构动力学的问题,这正是激发作者来研究题目所指出的问题的原因所在.

## 1 隐式 Gauss-Legendre 型辛 RK 方法执行

考虑如下结构动力学方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{R}, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{M} = [M_{ij}]_{n \times n}$ ,  $\mathbf{C} = [C_{ij}]_{n \times n}$ ,  $\mathbf{K} = [K_{ij}]_{n \times n}$  分别为质量、阻尼和刚度矩阵,  $n$  为系统的维数或自由度数.上标点表示关于时间的导数. $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{R}(t)$  分别为位移和载荷列向量.本节中采用隐式 Gauss-Legendre 型 SRK(GLSRK)方法求解非 Hamilton 系统(1),为达到这一目标,方程(1)必须转化为一阶格式.令

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}, \quad (2)$$

那么方程(1)可以转换为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}, \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R} - \mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{K}\mathbf{x}. \end{cases} \quad (3)$$

如果  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  且  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ , 式(3)即是 Hamilton 正则形式.令  $\mathbf{z}^T = [\mathbf{x}^T \quad \mathbf{y}^T]$ , 那么可以将式(3)重新写为如下形式:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}), \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{D}\mathbf{z}, \quad (5)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

如果阻尼矩阵  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{D}$  为 Hamilton 矩阵,满足  $\mathbf{D}^T = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}$  是反对称单位辛矩阵.不论方程(4)是否为 Hamilton 系统,其单步  $s$  级含时间的 SRK 方法的一般形式如下:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{f}(t_k + c_i h, \mathbf{Z}_i), \quad (7a)$$

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(t_k + c_j h, \mathbf{Z}_j), \quad (7b)$$

其中,  $s$  为 SRK 方法的级,  $a_{ij}$  和  $b_i$  为系数,可以用 Butcher 表表示如下:

$$\begin{array}{c|cccc} & c_1 & \cdots & c_s & \\ \mathbf{A} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ \mathbf{b}^T & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array}, \quad \mathbf{c}_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}, \quad \sum_{i=1}^s b_i = 1. \quad (8)$$

由定理和定义可知,如果  $\mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{B} - \mathbf{b}\mathbf{b}^T = \mathbf{0}$ , 方程(7)为辛格式,其中  $\mathbf{B} = \text{diag}[b_1, b_2, \dots, b_s]$ .通常情况下,如果对于  $j \geq i, a_{ij} = 0$ , 算法(7)为显式,否则为隐式.当  $s = 2$  时,有  $2s$  阶隐式 GLSRK 格式:

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 - \sqrt{3}/6 & 1/4 & 1/4 - \sqrt{3}/6 \\ \hline 1/2 + \sqrt{3}/6 & 1/4 + \sqrt{3}/6 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \cdot \quad (9)$$

显然,由 Butcher 表(9)可知,条件  $\mathbf{BA} + \mathbf{A}^T \mathbf{B} - \mathbf{bb}^T = \mathbf{0}$  是满足的.本节中假定  $s = 2$ ,但本节方法可以直接扩展到任意  $s$  级的 SRK 方法.

把式(9)作为系数的 GLSRK 方法为隐式算法,为了便于把 GLSRK 方法应用到动力学系统(1),本节中给出方程(4)的 GLSRK 方法的直接求解公式,由式(7)的第二个矩阵代数方程可得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_k \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{F}_1 & a_{12} \mathbf{F}_2 \\ a_{21} \mathbf{F}_1 & a_{22} \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \right\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}_{2 \times 2} \otimes \mathbf{I}_{2n \times 2n} - h\mathbf{A} \otimes \mathbf{D}, \quad (11)$$

其中,符号  $\otimes$  表示 Kronecker 积,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(t_k + c_1 h)$ ,  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}(t_k + c_2 h)$ , 由式(7)的第一个矩阵代数方程可得隐式 GLSRK 方法的递推关系如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} = & \mathbf{z}_k + h\mathbf{b}^T \otimes \mathbf{D} \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{z}_k + \\ & \left\{ h(b_1 \mathbf{F}_1 + b_2 \mathbf{F}_2) + h^2 \mathbf{b}^T \otimes \mathbf{D} \left( \mathbf{H}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{F}_1 + a_{12} \mathbf{F}_2 \\ a_{21} \mathbf{F}_1 + a_{22} \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\partial \mathbf{z}_{k+1} / \partial \mathbf{z}_k$  为辛矩阵,如果  $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ,不论外载荷  $\mathbf{R}(t)$  为何种形式,均满足

$$(\partial \mathbf{z}_{k+1} / \partial \mathbf{z}_k)^T \mathbf{S} \cdot (\partial \mathbf{z}_{k+1} / \partial \mathbf{z}_k) = \mathbf{S}.$$

式(12)为隐式 GLSRK 方法的精确显式形式,且便于应用.对于非线性系统,可以从非线性方程(7b)中求得  $\mathbf{Z}_i$ ,然后将求得的  $\mathbf{Z}_i$  带入方程(7a),最终求得  $\mathbf{z}_{k+1}$ .

## 2 RK 方法的谱半径和相位误差

当研究一个递推解法的效率时,必须考虑其稳定性和精度<sup>[35-36]</sup>.这里采用谱方法来检验 GLSRK 方法和 CRK(classical RK)方法的稳定性和精度.这里 CRK 方法指的是显式 4 级 4 阶 CRK 方法,其含时间的格式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{z}_k + h \sum_{i=1}^4 b_i \mathbf{f}(t_k + c_i h, \mathbf{Z}_i), \\ \mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_k + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{f}(t_k + c_j h, \mathbf{Z}_j), \end{cases} \quad (13)$$

其中系数矩阵为

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

该格式的系数亦满足如下关系:

$$c_i = \sum_{j=1}^4 a_{ij}, \quad \sum_{i=1}^4 b_i = 1, \quad (14)$$

但其不满足条件  $\mathbf{BA} + \mathbf{A}^T \mathbf{B} - \mathbf{bb}^T = \mathbf{0}$ .

在稳定性分析时,为方便起见,研究如下单自由度系统:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (15)$$

对式(15)应用 GLSRK 和 CRK 方法,有如下递推关系:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\text{GLSRK}} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\text{CRK}} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}. \quad (17)$$

两个 Jacobi 矩阵有如下形式:

$$\mathbf{J}_{\text{GLSRK}} = \frac{1}{\tau^4 + 12\tau^2 + 144} \begin{bmatrix} \tau^4 - 60\tau^2 + 144 & 12h(12 - \tau^2) \\ -12\tau\omega(12 - \tau^2) & \tau^4 - 60\tau^2 + 144 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{J}_{\text{CRK}} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} \tau^4 - 12\tau^2 + 24 & 4h(6 - \tau^2) \\ -4\tau\omega(6 - \tau^2) & \tau^4 - 12\tau^2 + 24 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

其中,  $\tau = \omega h$  指的是一个时间步内简谐振动的解析相位角. Jacobi 矩阵  $\mathbf{J}$  的特征值可写为

$$\lambda_{1,2} = a \pm bi = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \pm i \sin \theta), \quad (20)$$

其中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $b \neq 0$ ,  $\theta$  为 RK 方法的单步相位角,其定义为

$$\theta = \arctan(b/a), \quad (21)$$

其中,  $a$  和  $b$  为

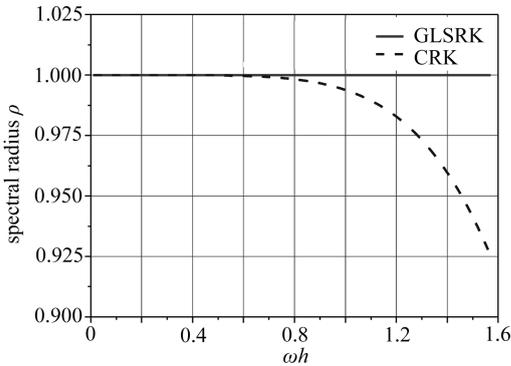
$$a_{\text{GLSRK}} = \frac{\tau^4 - 60\tau^2 + 144}{\tau^4 + 12\tau^2 + 144}, \quad b_{\text{GLSRK}} = \frac{12\tau(12 - \tau^2)}{\tau^4 + 12\tau^2 + 144}, \quad (22)$$

$$a_{\text{CRK}} = \frac{\tau^4 - 12\tau^2 + 24}{24}, \quad b_{\text{CRK}} = \frac{\tau(6 - \tau^2)}{6}; \quad (23)$$

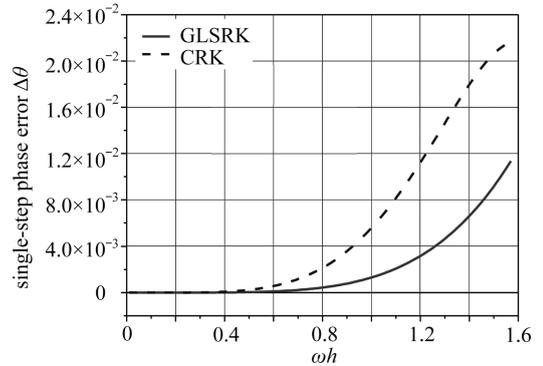
谱半径为

$$\rho_{\text{GLSRK}} = \max_i |\lambda_i| = 1, \quad (24)$$

$$\rho_{\text{CRK}} = \max_i |\lambda_i| = \sqrt{1 + \frac{\tau^6(\tau^2 - 8)}{576}}. \quad (25)$$



(a) 谱半径  
(a) Spectral radii



(b) 相位误差  
(b) Phase errors

图 1 GLSRK 方法和 CRK 方法的谱半径和单步相位误差

Fig.1 Spectral radii and single-step phase errors of GLSRK and CRK methods

这表明对于任意  $\omega h$ , 谱半径  $\rho_{\text{GLSRK}} = 1$ , 意即 GLSRK 方法是绝对稳定的;  $\rho_{\text{CRK}}$  小于、大于或等于 1, 意即广泛采用的 4 级 4 阶 CRK 方法为条件稳定, 且其稳定区间为

$$\omega h \leq 2\sqrt{2}.$$

单步相位误差,作为直接积分方法数值弥散的一个量度,为  $\Delta\theta = \tau - \theta$ ,对本节中两种 RK 方法,分别为

$$\Delta\theta_{\text{GLSRK}} = \tau - \arctan \frac{12\tau(12 - \tau^2)}{\tau^4 - 60\tau^2 + 144}, \quad (26)$$

$$\Delta\theta_{\text{CRK}} = \tau - \arctan \frac{4\tau(6 - \tau^2)}{\tau^4 - 12\tau^2 + 24}. \quad (27)$$

图 1 给出了两种类型 RK 方法谱半径和相位误差的数值比较,从图中可以看出,尽管 GLSRK 方法和 CRK 方法的阶数相同,但是当  $\omega h > 0.5$  时,不论对幅值还是相位,GLSRK 方法明显比 CRK 方法更精确.

### 3 数值算例

本节旨在通过将 GLSRK 方法和 CRK 方法的数值结果与精确解进行比较,验证这两种 RK 方法的数值耗散和数值弥散性质.本部分分析明确地揭示了两种 RK 方法的一些数值性质.

**算例 1** 考虑一固支-自由均匀杆,如图 2 所示.其物理性质为:弹性模量  $E = 1.25 \times 10^{11}$  Pa,密度  $\rho = 8\,980$  kg/m<sup>3</sup>,直径  $d = 0.1$  m,长度  $l = 1$  m.将杆离散为  $N = 10$  个均匀线性单元,并采用模态叠加法得到该离散系统的精确解.计算采用的时间步长为  $T_{\min}/10$ ,其中  $T_{\min} = 2\pi/\omega_{10}$ ,为该离散系统的最小周期, $\omega_{10}$  为该离散系统的最高阶频率.

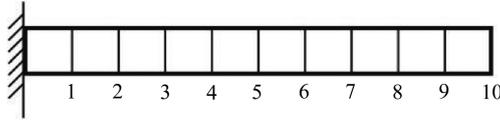


图 2 杆的草图及结点号

Fig.2 The sketch of a rod and node numbers

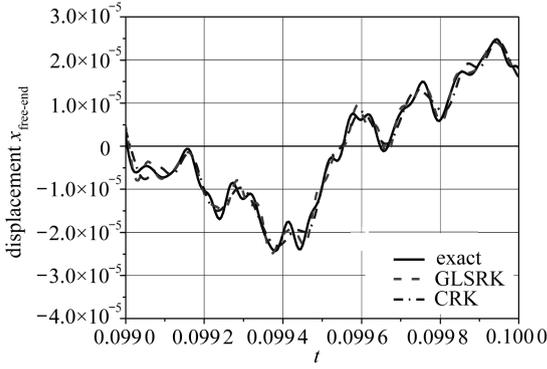
**情况 1** 考虑该离散杆系统的自由振动,初始条件为:杆自由端的初始位移和初始速度分别为 0 和 1 m/s,其余各结点的初始位移和初始速度均为 0.

图 3 给出了该离散杆系统自由振动时,杆自由端的位移和总机械能曲线,从图中可以看出,正如 Sanz-Serna<sup>[6]</sup> 指出的那样,GLSRK 方法精确保持系统的机械能,然而,CRK 方法是耗散算法,经过一段时间之后,系统的能量将被耗尽,且系统的响应将趋近于 0.冯康<sup>[3]</sup> 等阐明了 CRK 方法存在所谓的人工阻尼的物理机理.

**情况 2** 为了进一步研究两种 RK 方法的性质,考虑杆自由端受一简谐激励  $100\sin 50\,000 t$ ,所有结点的初始位移和初始速度均为 0.图 4 给出了该离散杆系统受简谐激励时,杆自由端的位移和总机械能曲线,从图中可以看出,在这种情况下,无论在能量性质还是相位跟随性上,GLSRK 方法的精度也远远高于 CRK 方法.值得注意的是,利用直接积分方法求得的系统的稳态解中并不存在相位误差的累积<sup>[34]</sup>,但是在本算例情况下,由简谐外载荷引起的动态响应不仅包含稳态振动,而且包含伴随自由振动,因此尤其对于 CRK 方法来讲,其相位误差累积尤为明显.

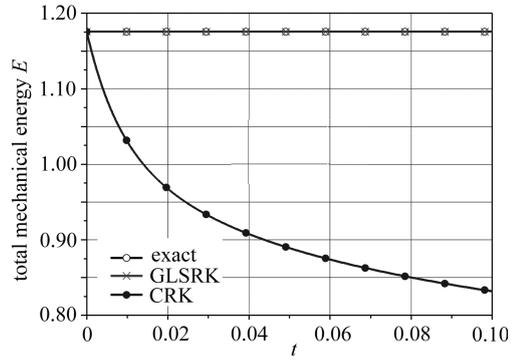
**算例 2** 为了进一步研究两种 RK 方法应用到非线性系统时的算法性质,考虑如下 Rayleigh 方程:

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x}(\dot{x}^2 - 1) + \omega_0^2 x = 0. \quad (28)$$



(a) 杆自由端位移

(a) Displacement at the free end of the rod

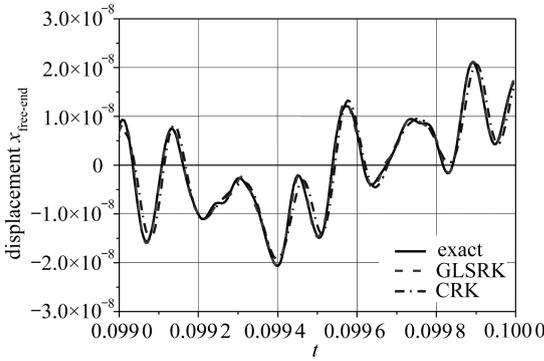


(b) 总机械能

(b) Total mechanical energy

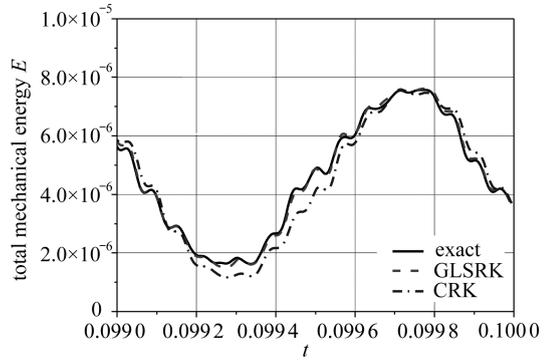
图3 杆自由端位移和总机械能

Fig.3 Free vibration of the rod



(a) 杆自由端位移

(a) Displacement at the free end of the rod



(b) 总机械能

(b) Total mechanical energy

图4 受简谐激励杆自由端位移和总机械能

Fig.4 Forced vibration of the rod

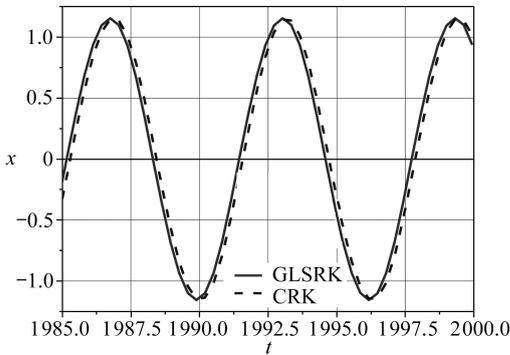
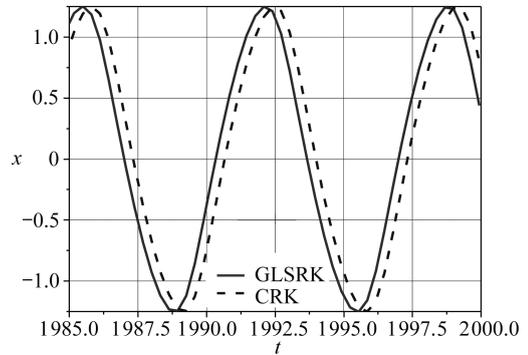
(a)  $\varepsilon = 0.1, h = T/20$ (b)  $\varepsilon = 1, h = T/20$ 

图5 不同参数时系统的位移

Fig.5 Dynamic system displacements with different parameters

假定  $\omega_0 = 1, x(0) = 1$ , 且  $\dot{x}(0) = 0, T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi$  是派生系统的周期. 下面针对一些给定的摄动参数  $\varepsilon$  的取值研究了算法的动力学特性. 众所周知, 自激系统 (28) 的相图是一个极限

环,其与初始条件无关且对应一个周期振动.通常情况下,其正确的轨道能够通过直接积分方法采用足够小的时间步长  $h$  得到.图 5 和图 6 给出了弱非线性和强非线性情况下, Rayleigh 系统的位移响应曲线,针对强非线性情况,图 6 同时给出了 Rayleigh 系统的速度响应曲线及其相图.从图 5 可以看出,若采用相同时间步长  $h$ , CRK 方法的相位误差随着摄动参数  $\varepsilon$  的增大而增大.当  $\varepsilon = 10$  (代表强非线性系统) 时,尽管采用了很小的时间步长  $h = T/60$ , 利用 CRK 方法仍不能求得该系统的正确轨道(参见图 6),但是通过 GLSRK 方法却可求得正确解.如果要利用 CRK 方法求得系统正确的相图,必须采用比  $h = T/60$  更小的时间步长.

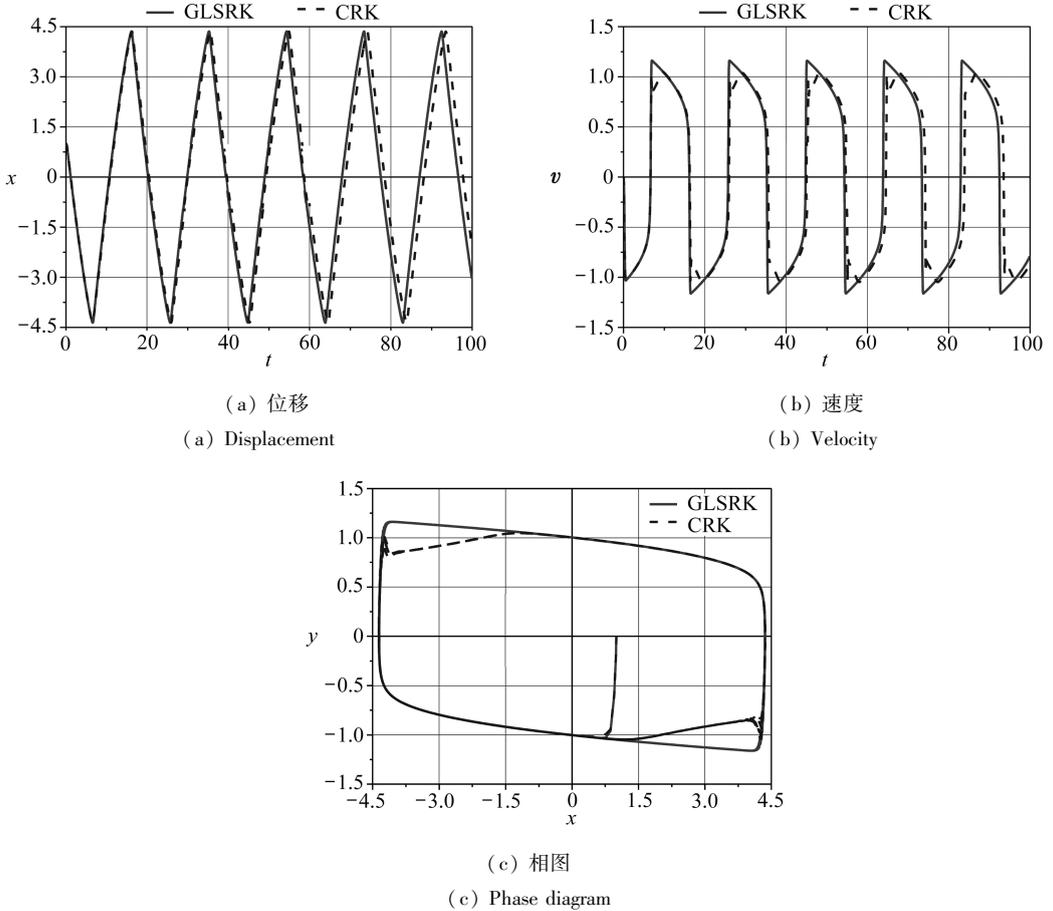


图 6 Rayleigh 系统的振动 ( $\varepsilon = 10$ ,  $h = T/60$ )

Fig.6 Vibration of a Rayleigh system,  $\varepsilon = 10$ ,  $h = T/60$

## 4 结 论

本文给出了  $s$  级  $2s$  阶隐式 GLSRK 方法的一种显式高效的执行格式,并采用 2 级 4 阶 GLSRK 方法求解了有阻尼和外载荷的多自由度结构线性和非线性动力学系统.此外,给出了 GLSRK 方法和 CRK 方法的谱半径和单步相位误差的显式表达式,并将两者进行了比较.

本文采用的研究方法能够容易地扩展到各种其他类型的 SRK 方法.线性多自由度系统和非线性 Rayleigh 系统的数值算例表明,对结构动力学系统而言,SRK 方法远比 CRK 方法优越,在运动学特性和长时间数值模拟方面尤为明显.

## 参考文献(References):

- [1] de Vogelaere R. Methods of integration which preserve the contact transformation property of the Hamiltonian equations[R]. Notre Dame: Department of Mathematics, University of Notre Dame, Report No 4, N7-ONR-43906, 1956.
- [2] Ruth R. A canonical integration technique[J]. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 1983, **30**(4): 2669-2671.
- [3] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[C]//*Proceedings of the 5th International Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*. Beijing, 1984: 42-58.
- [4] Sanz-Serna J M, Calvo M P. *Numerical Hamiltonian Problems*[M]. London: Chapman and Hall Press, 1994.
- [5] Lasagni F M. Canonical Runge-Kutta methods[J]. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 1988, **39**(6): 952-953.
- [6] Sanz-Serna J M. Runge-Kutta schemes for Hamiltonian systems[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1988, **28**(4): 877-883.
- [7] Suris Y B. On the conservation of the symplectic structure in the numerical solution of Hamiltonian systems[C]//Filippov S S ed. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics, USSR Academy of Sciences, 1988: 148-160. (in Russian)
- [8] Burrage K, Butcher J C. Stability criteria for implicit Runge-Kutta methods[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1979, **16**(1): 46-57.
- [9] Crouzeix M. Sur la B-stabilité des méthodes de Runge-Kutta[J]. *Numerische Mathematik*, 1979, **32**(1): 75-82.
- [10] Saito S, Sugiura H, Mitsui T. Family of symplectic implicit Runge-Kutta formulae[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1992, **32**(3): 539-543.
- [11] Sanz-Serna J M, Abia L. Order conditions for canonical Runge-Kutta schemes[J]. *SIMA Journal on Numerical Analysis*, 1991, **28**(4): 1081-1096.
- [12] Abia L, Sanz-Serna J M. Partitioned Runge-Kutta methods for separable Hamiltonian problems [J]. *Mathematics of Computation*, 1993, **60**(202): 617-634.
- [13] Sun G. A simple way constructing symplectic Runge-Kutta methods[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2000, **18**(1): 61-68.
- [14] Grimm V, Scherer R. A generalized W-transformation for constructing symplectic partitioned Runge-Kutta methods[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2003, **43**(1): 57-66.
- [15] Monovasilis T, Kalogiratou Z, Simos T E. Symplectic partitioned Runge-Kutta methods with minimal phase-lag[J]. *Computer Physics Communications*, 2010, **181**(7): 1251-1254.
- [16] Suris Y B. On the canonicity of mappings that can be generated by methods of Runge-Kutta type for integrating system  $\dot{x} = \partial U / \partial x$  [J]. *Zhurnal Vychislitel' noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 1989, **29**(2): 202-211, 317. (in Russian)
- [17] Okunbor D, Skeel R D. An explicit Runge-Kutta-Nyström method in canonical if and only if its adjoint is explicit[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, **29**(2): 521-527.
- [18] Ramaswami G. Perturbed collocation and symplectic RKN methods[J]. *Advances in Compu-*

- tational Mathematics*, 1995, **3**(1/2): 23-40.
- [19] Tsitouras C H. A tenth order symplectic Runge-Kutta-Nyström method[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1999, **74**(4): 223-230.
- [20] Van de Vyver H. A symplectic Runge-Kutta-Nyström method with minimal phase lag[J]. *Physics Letters A*, 2007, **367**(1/2): 16-24.
- [21] Iserles A. Efficient Runge-Kutta methods for Hamiltonian equations[J]. *Bulletin Greek Mathematical Society*, 1991, **32**: 3-20.
- [22] Sun G. Construction of high order symplectic Runge-Kutta methods[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 1993, **11**(3): 250-260.
- [23] Hairer E, Wanner G. Scientific notes: symplectic Runge-Kutta methods with real eigenvalues [J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1994, **34**(2): 310-312.
- [24] Simos T E, Vigo-Aguiar J. Exponentially fitted symplectic integrator[J]. *Physical Review E*, 2003, **67**(1): 016701.
- [25] Monovasilis T, Kalogiratou Z, Simos T E. Exponentially fitted symplectic methods for the numerical integration of the Schrödinger equation [J]. *Journal of Mathematical Chemistry*, 2005, **37**(3): 263-270.
- [26] Tocino A, Vigo-Aguiar J. Symplectic conditions for exponential fitting Runge-Kutta-Nyström methods[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2005, **42**(7/8): 873-876.
- [27] Van de Vyver H. A fourth order symplectic exponentially fitted integrator[J]. *Computer Physics Communications*, 2006, **174**(4): 255-262.
- [28] Gladman B, Duncan M, Candy J. Symplectic integrators for long-term integrations in celestial mechanics[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1991, **52**(3): 221-240.
- [29] Kinoshita H, Yoshida H, Nakai H. Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1991, **50**(1): 59-71.
- [30] Gray S, Manolopoulos D E. Symplectic integrators tailored to the time-dependent Schrödinger equation[J]. *Journal of Chemical Physics*, 1996, **104**(18): 7099-7112.
- [31] Cary J R, Doxas J. An explicit symplectic integration scheme for plasma simulations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **107**(1): 98-104.
- [32] Dragt A J. Computation of maps for particle and light optics by scaling, splitting and squaring [J]. *Physical Review Letters*, 1995, **75**(10): 1946-1948.
- [33] Channell P J, Scovel C. Symplectic integration of Hamiltonian systems [J]. *Nonlinearity*, 1990, **3**(2): 231-259.
- [34] 邢誉峰, 杨蓉. 动力学平衡方程的 Euler 中点辛差分求解格式[J]. 力学学报, 2007, **39**(1): 100-105. (XING Yu-feng, YANG Rong. Application of Euler midpoint symplectic integration method for the solution of dynamic equilibrium equations[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, **39**(1): 100-105. (in Chinese))
- [35] Bathe K J, Wilson E L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*[M]. New Jersey, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- [36] Hughes T J R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*[M]. New Jersey, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.

# Symplectic Runge-Kutta Method for Structural Dynamics

GUO Jing<sup>1,2</sup>, XING Yu-feng<sup>2</sup>

- (1. *Science and Technology on Reliability and Environment Engineering Laboratory,  
Beijing Institute of Structure and Environment Engineering,  
Beijing 100076, P.R.China;*
2. *The Solid Mechanics Research Center, Beihang University,  
Beijing 100191, P.R.China*)

**Abstract:** An explicit and efficient implementation of the symplectic implicit Gauss-Legendre Runge-Kutta (RK) method of stage  $s$  and order  $2s$ , was presented for solution of the dynamical ordinary differential equation with physical damping and external loads. The analytical explicit spectral radii and single-step phase errors of the implicit Gauss-Legendre RK method were given and compared with those of the explicit classical RK method of stage 4 and order 4. Numerical comparisons through the dynamical solution of a linear multi-degree-of-freedom (MDOF) system and a nonlinear Rayleigh system were made to validate the present study and showed the advantages of the symplectic RK method over the classical RK method with numerical dissipation, especially in aspects of the kinematic properties and long time numerical simulation.

**Key words:** symplectic; Runge-Kutta method; spectral radii; artificial damping; phase error

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (11172046; 11172028; 11372021)