文章编号:1000-0887(2014)01-0022-07

无限维 Hamilton 系统稳态解的保结构算法*

秦于越[1], 邓子辰[1,2], 胡伟鹏[1,2]

(1. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072;
2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(我刊编委邓子辰来稿)

摘要: 基于 Hamilton 变分原理和 Bridges 意义下的多辛积分理论,提出了保持无穷维 Hamilton 系统稳态解能流通量和动量通量的保结构分析方法.针对复杂的无穷维 Hamilton 系统的多辛对称形式,首先讨论了其稳态解所满足的对称形式的守恒律问题;随后,以一个典型的无穷维 Hamilton 系统——Zufiria 方程为例,采用 box 离散格式,模拟了其稳态解,并验证了算法的保结构性能.研究结果显示:采用保结构算法能够较好地模拟无穷维 Hamilton 系统的稳态解,并保持了无穷维 Hamilton 系统稳态解的能流通量和动量通量两个重要力学参量.这一研究结果将为复杂无穷维 Hamilton 系统稳态解的数值分析提供新的途径.

关 键 词: 无穷维 Hamilton 系统; 保结构; 稳态解; 动量通量
中图分类号: O175.24 **文献标志码:** A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.01.003

引 言

复杂无限维 Hamilton 系统的数值解一直是数学家和力学家关注的焦点问题之一,特别是冯康先生针对有限维 Hamilton 系统的数值求解,在 1984 年的双微国际会议上提出基于辛几何理论的辛算法[1],为 Hamilton 动力学系统的数值求解提出了更高要求,那就是“使得问题原型的基本特征在离散后尽可能地得到保持,即离散化应该尽可能在问题原型的同一形式框架中进行”,这就是近年来保结构算法的无穷生命力.鉴于辛算法在研究广义 Hamilton 系统在保结构算法构造方面的困难,张素英和邓子辰等提出了针对耗散广义 Hamilton 系统的几何积分理论框架[2],并应用于有限维 Hamilton 动力学系统的保结构分析,得到了某些有限维动力学系统的诸如混沌和分叉方面的诸多定性性质,完善了辛算法理论体系.

自辛算法提出之后,有限维 Hamilton 系统的保结构算法得到了飞速发展.为了解决保结构算法在研究无穷维 Hamilton 系统局部几何性质方面的难题,Bridges[3] 和 Marsden 等[4] 从不同

* **收稿日期:** 2013-10-15; **修订日期:** 2013-10-22
基金项目: 国家自然科学基金(11172239;11372252;11372253);高校博士点基金(20106102110019;20126102110023);大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金(GZ0802;GZ1312)
作者简介: 秦于越(1980—),女,重庆人,博士生(E-mail: 769482448@qq.com);
邓子辰(1964—),男,辽宁人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

角度创立了针对无穷维 Hamilton 系统的多辛算法理论体系，并证明了 box 离散格式、蛙跳离散格式等常见的数值离散格式均是多辛的.多辛理论体系的建立开辟了新的保结构理论研究领域，使得保结构研究能够深入到系统的局部，为 Hamilton 系统局部几何性质研究提供了途径.然而，能够采用多辛算法解决的无穷维 Hamilton 体系数值求解问题很有限，关键障碍在于很多无穷维 Hamilton 系统，特别是耗散系统，根本不存在严格的多辛对称形式.基于此，胡伟鹏和邓子辰等将应用于保守 Hamilton 系统的多辛算法推广至非保守情形，建立了广义多辛算法理论体系[5-6]，并已应用于大量耗散动力学问题的数值分析过程.

无论是多辛算法还是广义多辛算法，其关注的焦点是系统的解随着时间演化的过程以及该过程中系统固有几何特性的保持情况.然而，对于许多复杂的无限维 Hamilton 系统，如脉冲爆震发动机中的脉冲爆震起爆系统，由于在很短时间内系统就达到了稳态，此时再研究系统数值解随时间演化过程已经意义不大了，而系统能量等物理参量在空间的稳定分布情况成为了关注的焦点[7-8].基于这一背景，本文将主要研究无限维 Hamilton 系统稳态解的保结构分析方法.文章的内容安排如下：首先从无穷维 Hamilton 保守系统的多辛对称形式出发，研究稳态情形下无穷维 Hamilton 系统的守恒律；随后，以 Zufiria 方程为例，采用 box 离散格式研究 Zufiria 方程稳态解的性能，并分析稳态解动量通量的保持情况.

1　无限维 Hamilton 保守系统稳态情形下的对称形式及其守恒律

考虑如下无限维 Hamilton 保守系统的多辛对称形式[3]：

$$\boldsymbol{M}\partial_t \boldsymbol{z} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{K}_i \partial_{x_i} \boldsymbol{z} = \nabla_z S(\boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{z} \in R^d, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{K}_i \in R^{d\times d}$ 为反对称矩阵；$S: R^d \to \mathbf{R}$ 是光滑函数，为 Hamilton 函数，$\boldsymbol{z}$ 为状态变量.之所以将形式(1)称为多辛形式，是因为其存在以下的多辛守恒律：

$$\partial_t(\boldsymbol{\omega}) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(\boldsymbol{\kappa}_i) = 0, \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{M}U, V)$，$\boldsymbol{\kappa}_i = ((\boldsymbol{K}_i)U,\ V)\ (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$U$，$V$ 为与形式(1)相联系的变分方程的解[3].

多辛对称形式(1)受到广泛关注的一个重要原因是该对称形式能够用于探索无限维 Hamilton 系统的局部几何性质，其中最重要的局部几何性质包括系统局部能量和系统局部动量方面的性质.这两方面的局部几何性质以局部能量守恒律和局部动量守恒律表述.

对多辛形式(1)两边与 $\partial_t \boldsymbol{z}$ 求内积，得到局部能量守恒律：

$$\partial_t e + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i = 0, \tag{3}$$

其中，能量密度为 $e = S(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \partial_x \boldsymbol{z}/2$，能流通量 $f_i = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_i \partial_t \boldsymbol{z}/2\ (i = 1,2,\cdots,n)$.

类似地，对多辛形式(1)两边与 $\partial_{x_m} \boldsymbol{z}$ 求内积，得到 $x_m (m = 1,2,\cdots,n)$ 方向的局部动量守恒律：

$$\partial_t(h_m) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} g_{mi} = 0, \tag{4}$$

其中，动量密度为 $h_m = \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \partial_{x_m} \boldsymbol{z}/2$，动量通量

$$g_{mm} = S(\boldsymbol{z}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \partial_t \boldsymbol{z} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m-1} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_i \partial_{x_i} \boldsymbol{z} - \frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{n} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}_i \partial_{x_i} \boldsymbol{z},$$

$$g_{mi}=\frac{1}{2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_i\partial_{x_m}\boldsymbol{z}\qquad(i=1,2,\cdots,m-1,m+1,m+2,\cdots,n).$$

系统达到稳态后,即

$$\partial_t\boldsymbol{z}=0,\tag{5}$$

则,多辛形式简化为

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{K}_i\partial_{x_i}\boldsymbol{z}=\nabla_z S(\boldsymbol{z}),\qquad \boldsymbol{z}\in R^d.\tag{6}$$

此时的系统局部能量和局部动量分布稳定,并遵循如下的局部能流通量和动量通量守恒律:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}f_i=0,\\ \sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}g_{mi}=0.\end{cases}\tag{7}$$

在分析无限维 Hamilton 保守系统稳态解过程中,保持局部能流通量和局部动量通量守恒律成为判断数值结果有效性的重要方面.

2 稳态 Zufiria 系统的对称形式及其 box 离散

在研究浅水波 Boussinesq 型方程的过程中,Zufiria 提出了 Zufiria 方程模型描述某些水波色散[9-10]:

$$\begin{cases}\partial_t h+u\partial_x h+h\partial_x u+\frac{1}{3}\partial_{xxx}u+\frac{2}{15}\partial_{xxxxx}u=0,\\ \partial_t u+u\partial_x u+\partial_x h=0,\end{cases}\tag{8}$$

式中, h 和 u 为波函数.Zufiria 方程系统是一个不包含耗散的无限维 Hamilton 系统, 其稳态解满足

$$\begin{cases}uh+h\partial_x u+\frac{1}{3}\partial_{xx}u+\frac{2}{15}\partial_{xxxx}u=q,\ \partial_x q=0,\\ \frac{1}{2}u^2+h=r,\ \partial_x r=0.\end{cases}\tag{9}$$

方程组(9)是一个典型的高阶系统,通过引入状态变量: $\boldsymbol{z}=(\gamma,\phi,w_1,u,r,q,v,w_2)^{\mathrm{T}}$, 其中,中间变量定义为

$$\partial_x\phi=u,\ \partial_x\gamma=r-\frac{1}{2}u^2,\ v=\partial_x u,\ w_1=-\frac{2}{15}\partial_x v,\ w_2=-\frac{1}{3}v-\frac{2}{15}\partial_{xx}v.\tag{10}$$

则稳态解所满足的方程(9)就被降阶为如下形式:

$$\begin{cases}-\partial_x r=\partial S/\partial\gamma=0,\ \partial_x\gamma=\partial S/\partial r=r-\frac{1}{2}u^2,\\ -\partial_x q=\partial S/\partial\phi=0,\ \partial_x\phi=\partial S/\partial q=u,\\ -\partial_x v=\partial S/\partial w_1=\frac{15}{2}w_1,\ \partial_x w_1=\partial S/\partial v=w_2+\frac{1}{3}v,\\ -\partial_x w_2=\partial S/\partial u=q-ru+\frac{1}{2}u^3,\ \partial_x u=\partial S/\partial w_2=v,\end{cases}\tag{11}$$

其中 S 为 Hamilton 函数

$$S(z)=\frac{1}{2}r^2+qu+\frac{15}{4}w_1^2+w_2v+\frac{1}{6}v^2-\frac{1}{2}ru^2+\frac{1}{8}u^4. \tag{12}$$

至此,稳态解所满足的方程(9)就被写成了对称形式[8]:

$$\boldsymbol{K}\partial_x \boldsymbol{z}=\nabla S(\boldsymbol{z}),\qquad \boldsymbol{z}\in R^8, \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

对称形式满足的能流通量守恒律为

$$\partial_x(r\partial_t\gamma+q\partial_t\phi+v\partial_t w_1+w_2\partial_t u-\gamma\partial_t r-\phi\partial_t q-w_1\partial_t v-u\partial_t w_2)=0. \tag{14}$$

以及动量通量守恒律为

$$\partial_x\left(r^2+qu+\frac{15}{2}w_1^2+w_2v+\frac{1}{3}v^2-ru^2+\frac{1}{4}u^4-r\partial_t\gamma-q\partial_t\phi-\right.$$
$$\left.v\partial_t w_1-w_2\partial_t u+\gamma\partial_t r+\phi\partial_t q+w_1\partial_t v+u\partial_t w_2\right)=0. \tag{15}$$

值得注意的是:以上两个守恒律中包含了状态变量对时间的偏导数,由于本文考虑的是稳态情形,因此,状态变量对时间的偏导数都为0.基于这一结果,能流通量守恒律在实际数值计算过程中是自然满足的,而动量通量守恒律在实际数值计算过程中简化为

$$\Delta_m=\partial_x\left(r^2+qu+\frac{15}{2}w_1^2+w_2v+\frac{1}{3}v^2-ru^2+\frac{1}{4}u^4\right)=0. \tag{16}$$

采用简单的 box 离散方法离散对称形式(13),该离散方法已经被证明是保结构离散方法[3,5],得到对称形式(13)的离散形式:

$$\boldsymbol{K}_+\delta_x^+\boldsymbol{z}_j+\boldsymbol{K}_-\delta_x^-\boldsymbol{z}_j=\nabla S(\boldsymbol{z}_j), \tag{17}$$

其中,δ_x^+ 和 δ_x^- 分别是一阶前向差分和一阶后向差分,系数矩阵满足对称关系 $\boldsymbol{K}_+^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{K}_-$,依据此关系,得到系数矩阵分别为

$$\boldsymbol{K}_+=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{K}_-=\begin{bmatrix}0&0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

3　数值实验

本部分将进行相关的数值实验验证构造的差分格式是否能够模拟 Zufiria 方程系统的稳

态解，同时验证该格式是否能够保持动量通量守恒律。取模拟步长 $\Delta x=0.05$，在$[-20,20]$范围内模拟 Zufiria 方程系统的稳态解，边值取为周期性边界：

$$u\big|_{x=\pm 20}=1,\ h\big|_{x=\pm 20}=-1, \tag{18}$$

得到 Zufiria 方程系统的稳态解如图 1 所示。如果取相同的边值条件，该稳态解与 Zufiria 教授得到的解析解[9-10]在稳态条件下的值吻合较好，本文得到的数值稳态解与解析解相对误差见表 1。

表 1　数值解与解析解的相对误差

Table 1　Relative error between the numerical solution and the analytical solution

x		−20	−15	−10	−5	0	5	10	15	20
relative error	$u/(\%)$	0	0.017 1	0.001 1	0.008 0	0.000 5	0.003 2	0.002 6	0.000 9	0
	$h/(\%)$	0	0.009 5	0.000 2	0.001 8	0.003 7	0.000 2	0.008 9	0.000 3	0

为了进一步验证算法的保结构性能，在实验过程中记录每一步的 Δ_m 值，得到 Δ_m 的空间分布情况如图 2 所示，图中$(\Delta_m)_j$ 为第 j 空间步的动量通量误差值。

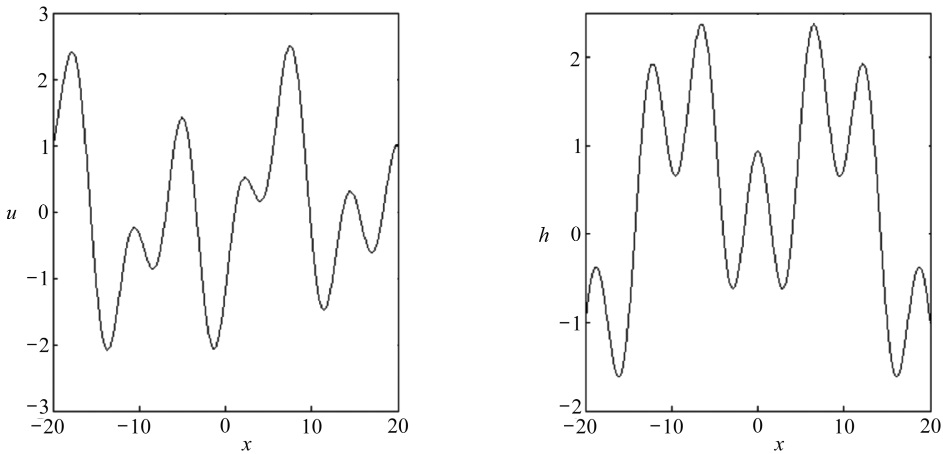

图 1　Zufiria 意义下的 Boussinesq 方程稳态解模拟结果

Fig.1　Simulation results of the steady-state solution to Zufiria's Boussinesq type equations

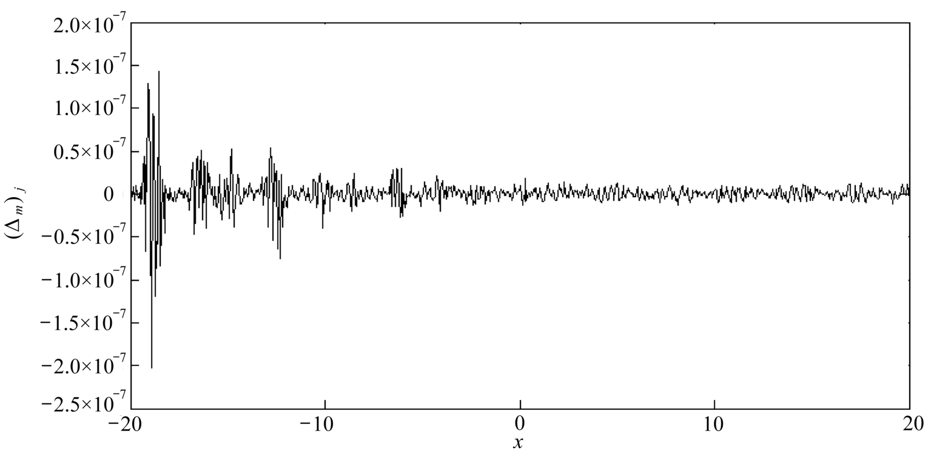

图 2　Zufiria 意义下的 Boussinesq 方程稳态解动量通量保持情况

Fig.2　Error of momentum flux in numerical simulation of the steady-state solution to Zufiria's Boussinesq type equations

由图 2 可知:在整个模拟区间,稳态解的动量通量守恒律在每一空间网格处的误差均在 10^{-7} 数量级,这说明本文构造的 box 格式能够很好地保持稳态解的动量通量守恒律,即在解到达稳态之后,系统动量在空间上分布也达到稳态,不再出现动量交换和传递,这与稳态解的几何性质相符.

4 结　　论

针对无限维 Hamilton 保守系统的稳态解,本文提出了一种基于多辛理论的保结构分析方法.在推导 Zufiria 方程系统稳态解所满足的高阶偏微分方程系统的对称形式及其守恒律的基础上,通过构造其 box 差分格式模拟 Zufiria 方程系统的稳态解.稳态解的模拟结果与 Zufiria 教授得到的理论解(如果取相同的边值条件)吻合较好,同时稳态解的动量通量守恒律得到了很好地保持,这充分表现了所构造格式的保结构性能.

参考文献(References):

[1] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[C]//*Proceeding of the* 1984 *Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*. Beijing: Science Press, 1985: 42-58.

[2] ZHANG Su-ying, DENG Zi-chen, LI Wen-cheng. A precise Runge-Kutta integration and its application for solving nonlinear dynamical systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, **184**(2): 496-502.

[3] Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1997, **121**(1): 147-190.

[4] Marsden J E, Shkoller S. Multisymplectic geometry, covariant Hamiltonians, and water waves [J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1999, **125**(3): 553-575.

[5] HU Wei-peng, DENG Zi-chen, HAN Song-mei, ZHANG Wen-rong. Generalized multi-symplectic integrators for a class of Hamiltonian nonlinear wave PDEs[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, **235**: 394-406.

[6] HU Wei-peng, DENG Zi-chen, HAN Song-mei. An implicit difference scheme focusing on the local conservation properties for Burgers equation[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2012, **9**(2): 1240028.

[7] Bridges T J, Donaldson N M. Secondary criticality of water waves—part 2: unsteadiness and the Benjamin-Feir instability from the viewpoint of hydraulics[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, **565**: 419-439.

[8] Bridges T J, Donaldson N M. Secondary criticality of water waves—part 1: definition, bifurcation and solitary waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2006, **565**: 381-417.

[9] Zufiria J A. Weakly nonlinear nonsymmetrical gravity waves on water of finite depth[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, **180**: 371-385.

[10] Zufiria J A. Symmetry breaking in periodic and solitary gravity-capillary waves on water of finite depth[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1987, **184**: 183-206.

Structure-Preserving Algorithm for Steady-State Solution to the Infinite Dimensional Hamilton System

QIN Yu-yue[1], DENG Zi-chen[1,2], HU Wei-peng[1,2]

(1. *Department of Engineering Mechanics*, *Northwestern Polythechnical University*, *Xi'an* 710072, *P.R.China*;

2. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment*, *Dalian University of Technology*, *Dalian*, *Liaoning* 116024, *P.R.China*)

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Based on Hamilton variational principle and Bridges' multi-symplectic integration theory, a new structure-preserving algorithm was proposed to simulate the steady-state solution to the complex infinite dimensional Hamilton system. With Zufiria's Boussinesq-type equations as an example, the high-order partial differential equation describing the steady-state solution to the Zufiria model was rewritten into a symmetric form under the energy flux conservation law and momentum flux conservation law firstly; then the box scheme for the symmetric form was constructed to simulate the steady-state solution to the Zufiria model. The numerical results show that the box scheme can well simulate the steady-state solution to the Zufiria model while properly preserving the momentum flux conservation law.

Key words: infinite dimensional Hamilton system; structure-preserving; steady-state solution; momentum flux

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11172239; 11372252; 11372253)