

# 基于声子晶体理论的弹性地基梁的 振动特性研究\*

陈启勇<sup>1</sup>, 胡少伟<sup>1,2</sup>, 张子明<sup>1</sup>

(1. 河海大学 力学与材料学院, 南京 210098;  
2. 南京水利科学研究院 材料结构所, 南京 210029)

(本刊编委胡少伟来稿)

**摘要:** 荷载影响结构的振动特性,引起抗振性能的变化.借助声子晶体理论,研究弹性地基梁的带隙特性,建立了轴向力作用时 Winkler 地基上声子晶体 Euler 梁弯曲振动模型,采用改进的传递矩阵法,计算出梁的能带结构,判断出能带结构的变化趋势.研究表明,轴力改变能带结构,带隙范围发生变化.拉力提升带隙,但地基带隙保持不变;压力降低带隙频率,地基带隙随着压力的增加而减小.同时,进行 Euler 模型的数值模拟,仿真的结果与理论值基本吻合.通过轴力可以调节带隙的频率范围,达到抗振、减振的效果.

**关键词:** 声子晶体; 弹性地基梁; 带隙

**中图分类号:** O422.6      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.01.004

## 引 言

荷载作用会引起结构稳定性、抗振性能的变化.实际工程中的荷载的形式多种多样,轴向荷载作为常见的荷载形式之一,具有重要的研究价值.例如:埋设于地下的输水管道、输水渠,由于存在较大的轴向拉力,其横向振动特性产生变化,受到影响.目前轴向荷载引起结构振动特性变化的主要研究有:Banerjee<sup>[1]</sup>讨论了轴向载荷对复合材料梁弯扭耦合振动特性的影响;郁殿龙等<sup>[2-3]</sup>分析了轴向载荷变化对周期结构梁的弯曲振动带隙特性的影响,以及基于带隙理论的管路系统振动特性的研究<sup>[4-5]</sup>.当弹性波在周期性弹性复合介质中传播时,受周期结构的作用,形成带隙<sup>[6-7]</sup>.带隙频率范围的弹性波传播被抑制,而其他频率范围(通带)的弹性波将在色散关系的作用下无损耗地传播<sup>[8]</sup>.

本文运用声子晶体<sup>[9]</sup>理论研究弹性地基梁的弯曲振动特性,主要研究外力作用下的声子晶体带隙的变化,分析外力作用下的带隙的变化规律.建立 Winkler 地基<sup>[10]</sup>上轴向力作用,声子晶体 Euler 梁的弯曲振动模型,采用改进的传递矩阵法<sup>[11-12]</sup>计算出无限周期长梁的能带结构,描述出结构的带隙范围;并进行有限长度梁传输特性的数值模拟,将传输特性的带隙范围

\* 收稿日期: 2013-08-26; 修订日期: 2013-09-03

作者简介: 陈启勇(1986—),男,南京人,博士生(E-mail: chenqiyong@outlook.com);  
胡少伟(1969—),男,河南杞县人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: hushaowei@nhri.cn).

结果与能带结构的带隙范围进行比较,利用带隙特性抑制梁的弯曲振动,给出地基梁在动态荷载作用下的振动变化趋势,可以为弹性地基梁的减振设计提供一种全新的技术参考。

## 1 声子晶体 Euler 梁弯曲振动模型的建立

如图 1 所示,声子晶体 Euler 梁的弯曲振动模型,将梁的各截面的形心连成的直线取作  $x$  轴,与  $x$  轴垂直的方向取作  $y$  轴;材料 A 与材料 B 周期性交替排列,长度分别为  $l_A$  以及  $l_B$ ,单个周期的长度为  $a = l_A + l_B$ 。

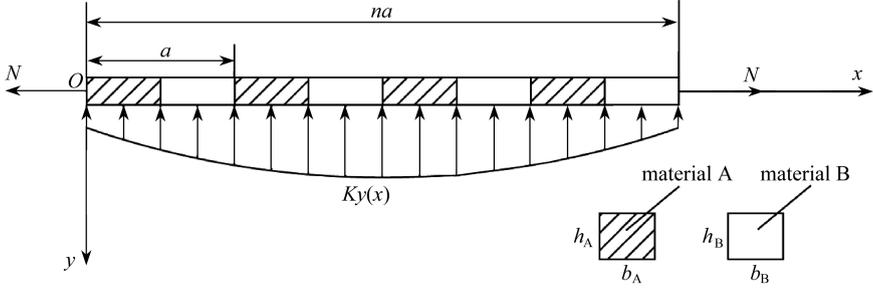


图 1 Winkler 地基上 Euler 梁弯曲振动模型

Fig.1 Flexural vibration model of an Euler beam on Winkler foundation

### 1.1 无限周期 Euler 梁的弯曲振动方程

根据文献[13],取图 1 所示的模型中长度为  $dx$  的梁微段(见图 2)进行受力分析。

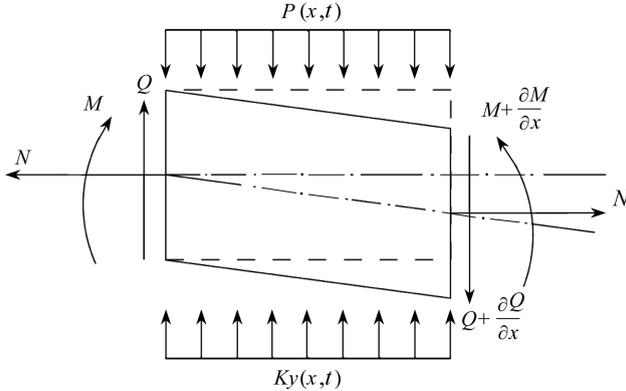


图 2 Winkler 地基上等截面 Euler 梁的微段

Fig.2 A micro segment of the Euler beam on Winkler foundation

通过竖向力平衡以及力矩平衡条件可以得到轴力和 Winkler 地基同时作用时,变截面、非均质 Euler 梁的弯曲振动方程:

$$m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = P(x,t) - Ky(x,t), \quad (1)$$

式中,  $\rho$  为密度,  $E$  为弹性模量,  $A$  为梁的横截面面积,  $I$  为截面二次矩,  $y(x,t)$  为梁的横向位移。

对于长度范围为  $na \leq x \leq na + l_A$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 时,此时视为材料 A 的等截面均质梁,弯曲振动方程(1)可以简化成

$$m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = P(x,t) - Ky(x,t). \quad (2)$$

对于长度范围为  $na + l_A < x \leq (n + 1)a$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 时, 视为材料 B 的等截面均质梁, 且横截面尺寸不变, 其弯曲振动方程与材料 A 的形式一致, 只需将描述材料 A 的参数换成表示材料 B 的参数。

### 1.2 弯曲振动方程的求解

式(2)求解时, 按图 1 建立模型, 不考虑其它竖向的外力, 只考虑梁在  $y$  坐标轴方向上受到的地基作用。因此, 式(2)中  $P(x, t) = 0$ 。采用分离变量法<sup>[14]</sup>, 设位移  $y(x, t) = y(x)e^{i\omega t}$ ,  $\omega$  为振动圆频率,  $y(x, t)$  为位移振幅。根据式(2), 位移振幅  $y(x, t)$  满足微分方程:

$$EIy(x)^{(4)} - Ny(x)'' + (K - \omega^2 m)y(x) = 0. \quad (3)$$

该方程是四阶常系数微分方程。该方程对应的特征方程为

$$EIr^4 - Nr^2 + (K - \omega^2 m) = 0. \quad (4)$$

其通解的形式需要根据系数的正负以及方程  $\Delta = N^2 - 4EI \cdot (K - \omega^2 m)$  的正负进行确定。其通解的形式可表示为

$$y(x) = C_1 \text{sh } \xi x + C_2 \text{ch } \xi x + C_3 \cos(\eta x) + C_4 \sin(\eta x), \quad (5)$$

式中,  $C_1, C_2, C_3, C_4$  为 4 个任意常数。

### 1.3 能带结构计算

改进的传递矩阵法<sup>[12]</sup>进行能带结构的计算时, 与传统的传递矩阵法不同, 用截面的初始参数值构造出传递矩阵。用梁截面  $x = 0$  处的 4 个初始参数  $(y_0, \theta_0, M_0, Q_0)$  来表示 4 个积分常数  $(C_1, C_2, C_3, C_4)$ , 并将表示两者的相互关系矩阵称为传递矩阵。式(2)及式(5)中描述的是材料 A 的振动方程及方程通解, 故用  $U_A$  表示。

假设梁的  $x$  处的状态变量:

$$\mathbf{Z}(x) = (y \quad \theta \quad M \quad Q)^T. \quad (6)$$

梁的弯曲振动方程可以得到位移函数  $y(x)$ , 再由 Euler 梁的转角  $\theta = y'(x)$ , 弯矩  $M = -EIy''(x)$  以及剪力  $Q = -EIy'''(x)$  可以得出状态函数  $\mathbf{Z}(x)$ :

$$\mathbf{Z}(x) = \begin{Bmatrix} y \\ \theta \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

式中,  $u_{ij}$  表示位移  $y(x)$ , 转角  $\theta = y'(x)$ , 弯矩  $M = -EIy''(x)$  以及剪力  $Q = -EIy'''(x)$  表达式积分常数  $C_i$  前的系数。

当  $x = 0$  时

$$\mathbf{Z}(0) = \begin{Bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

式中,  $a_{ij}$  表示位移  $y(0)$ , 转角  $\theta = y'(0)$ , 弯矩  $M = -EIy''(0)$  以及剪力  $Q = -EIy'''(0)$  表达式中任意常数  $C_i$  前的系数。

由式(7)和式(8)可得

$$\mathbf{Z}(x) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{U}_A \begin{Bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{U}_A$  为传递矩阵。

$$\mathbf{U}_A = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (10)$$

同理可以得到材料 B 的传递矩阵  $\mathbf{U}_B$ 。

构造出每种材料的传递矩阵,考虑整体,  $x = (n + 1)a$  时,由传递矩阵法<sup>[15]</sup>可知

$$\mathbf{Z}[(n + 1)a] = \mathbf{U}_B \mathbf{U}_A \mathbf{Z}(na) = \mathbf{U} \mathbf{Z}(na). \quad (11)$$

由 Bloch 定理

$$\mathbf{Z}[(n + 1)a] = e^{ika} \mathbf{Z}(na). \quad (12)$$

由式(11)及(12)可得

$$(\mathbf{U} - e^{ika} \mathbf{I}) \mathbf{Z}(na) = \mathbf{0}, \quad (13)$$

式(13)有非零解的充要条件是方程组系数行列式为 0,既矩阵特征值问题

$$|\mathbf{U} - e^{ika} \mathbf{I}| = 0. \quad (14)$$

通过求解特征值问题,对于给定的圆频率  $\omega$ ,可以由式(14)解出波矢  $k$ ,进而求解出无限周期梁的能带结构图.实际工程中用的频率  $f = \omega/2\pi$ ,本文后面计算的结果均采用频率  $f$ 。

#### 1.4 带隙计算结果

计算模型以铝和环氧树脂这两种材料为例.模型所采用的材料属性以及截面属性如表 1 所示。

表 1 模型材料和截面属性

Table 1 Properties & parameters of model materials

material	elastic modulus $E/\text{Pa}$	Poisson's ratio $\nu$	density $\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	section width $b/\text{m}$	section height $h/\text{m}$	length $l/\text{m}$
aluminum	$7.756 \times 10^{10}$	0.352	2 730	0.01	0.01	0.075
epoxy	$0.435 \times 10^{10}$	0.368	1 180	0.01	0.01	0.075

##### 1) 轴向拉力对弹性地基梁的影响

采用的 Winkler 地基的基床系数保持不变,  $K = 2.5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ , 轴力的取值分别为 0, 500 N, 1 000 N, 1 500 N, 1 888 N.计算结果图 3 所示。

在 0~2 000 Hz 这个范围内出现了 2 个带隙,在 0~180 Hz 这个范围,因 Winkler 地基的作用出现带隙,而且带隙的起始截止值,不随轴力的增加发生变化,称为地基带隙.在 400~700 Hz 这个频率范围出现的第一带隙,带隙的起始值、截止值随着轴力的增加而增大,但是带隙范围大小在缩小,在轴力为  $N = 500 \text{ N}$  时,第一带隙的频率范围为 140.7 Hz,当轴力  $N = 1 888 \text{ N}$  时,第二带隙的频率范围为 98.3 Hz.总体上,地基带隙不发生变化,能带曲线随轴向力增大变得越来“陡峭”。

##### 2) 轴向压力对弹性地基梁的影响

Winkler 地基的基床系数  $K = 2.5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ , 轴力的取值分别为 0, -500 N, -1 000 N, -1 500 N, -1 888 N. 计算结果图 4 所示.

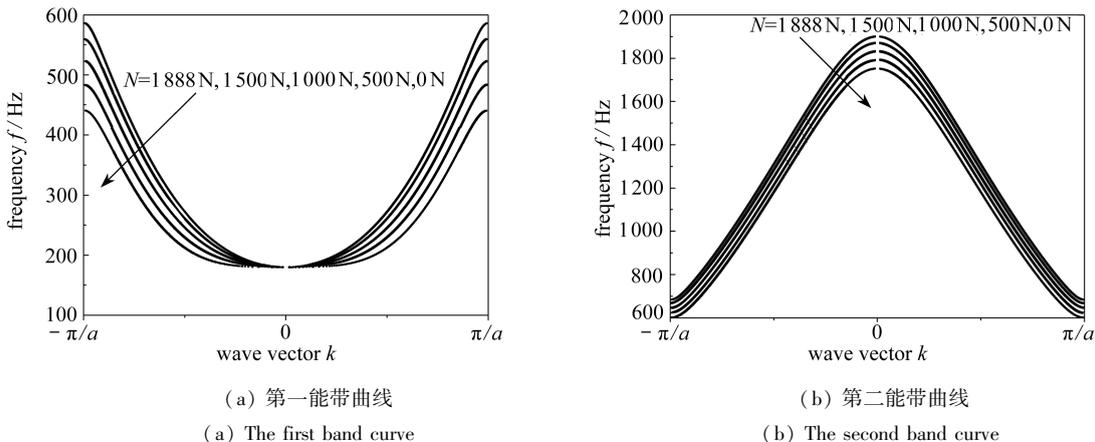


图 3 轴向拉力与地基作用时 Euler 梁的能带曲线

Fig.3 Band structure of the Euler beam under actions of axial tensile force and elastic foundation

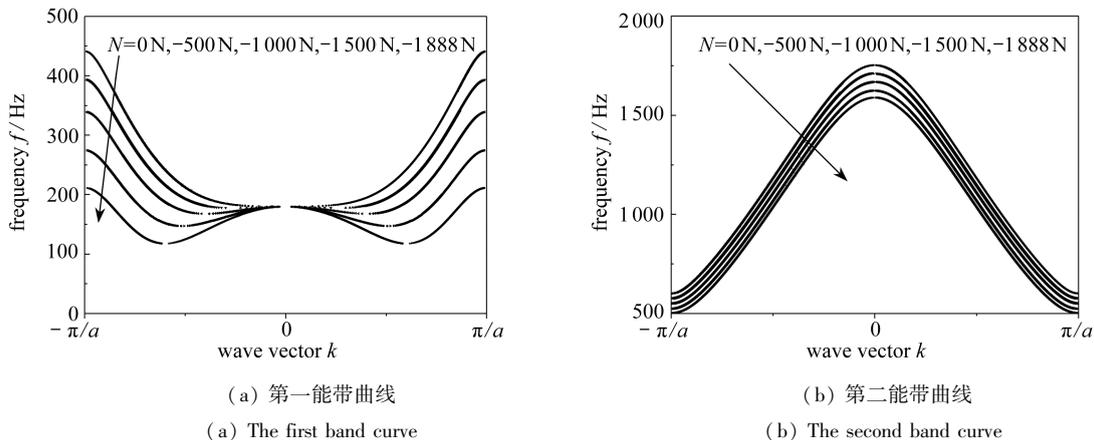


图 4 轴向压力与地基作用时 Euler 梁的能带曲线

Fig.4 Band structure of the Euler beam under actions of axial compressive force and elastic foundation

在 0~2 000 Hz 这个范围内出现了 2 个带隙,0~180 Hz 这个范围内出现的地基带隙,其带隙频率的截止值,随轴力的增加而减小,与拉力和 Winkler 地基共同作用时不随轴力增加发生变化,截然不同.在 400~700 Hz 这个频率范围出现的带隙,起始值、截止值随着压力的增加而减小,但是带隙范围增大,幅度很明显,在轴力为  $N = -500 \text{ N}$  时,频率范围为 183.3 Hz,当轴力  $N = -1 888 \text{ N}$  时,频率范围为 290.9 Hz.总体上,能带曲线随着轴力的增加向低频移动,地基带隙范围减小,能带结构图出现变化,即(0,0)点不是曲线极小值点.这是因为不考虑地基荷载,只有轴向压力作用时,压力降低 Euler 梁的刚度,带隙频率降低<sup>[2]</sup>,其能带曲线向低频移动,带隙的起始值发生变化,不再是(0,0)点.

## 2 有限周期声子晶体 Euler 梁的带隙分布

有限周期的声子晶体 Euler 梁采用有限元进行模拟计算,图 5 是仿真计算示意图.采用梁单元结构,单元性质定义为 Euler 梁单元,采用预应力作用下的线性摄动响应分析,通过频率

响应函数来表示 Euler 梁的振动状态<sup>[16-17]</sup>。

频率响应函数为  $H = 20 \lg(|V_{out}/V_{in}|)$  ( $V_{out}$  为输出量,  $V_{in}$  为输入量), 文中采用的激励为竖向位移, 当频率响应函数值为 0 时, 表示振动的输出量与输入量相同; 当频率响应函数值为负数时, 输出量比输入量小, 振动发生衰减; 当频率响应函数值为正数时, 输出量比输入量大, 振动发生加强. 振动衰减区域对应的频率范围就是带隙的范围<sup>[18]</sup>。

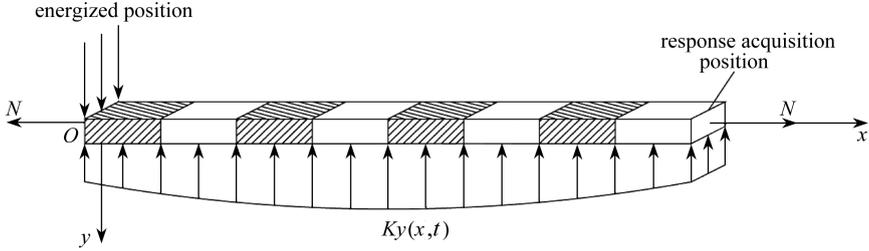


图5 Winkler 地基上 Euler 梁振动传输特性仿真示意图

Fig.5 Flexural vibration properties simulation diagram of the Euler beam on Winkler foundation

## 2.1 轴向拉力弹性地基梁传输特性的影响

考虑轴向拉力对弹性地基梁传输特性的影响, 轴向拉力的取值分别为 0, 500 N, 1 000 N, 1 500 N, 1 888 N. 这里采用 20 个周期时有限长度 Euler 梁的结构进行分析计算, 结果如图 6 和表 2、3 所示。

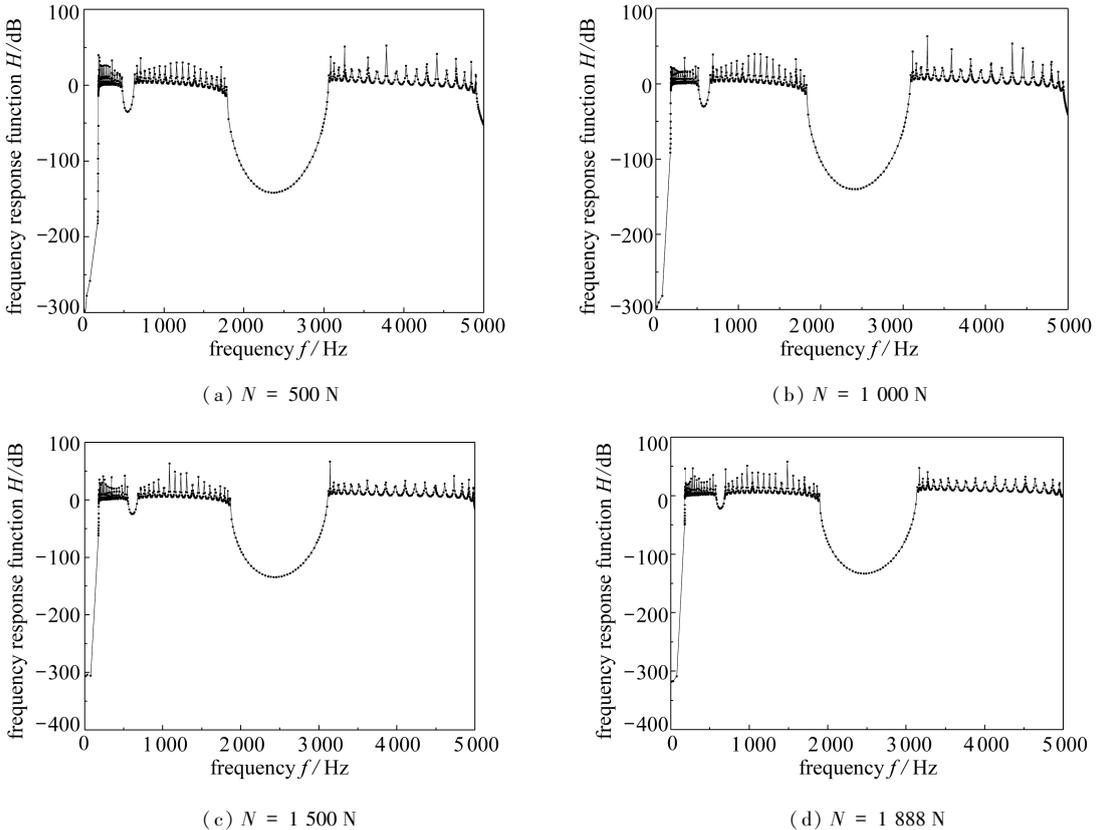


图6 不同拉力作用时 Euler 梁的传输特性图

Fig.6 Propagation properties of Euler beam under actions of different axial tensile forces

表2 Winkler地基、轴力共同作用梁的振动衰减区域、带隙范围  
Table 2 Vibration damping area & band gap range of the Euler beam under actions of elastic foundation and different axial tensile forces

axial force <i>N/N</i>	band gap of finite periodic structures <i>f/Hz</i>			band gap of infinite periodic structures <i>f/Hz</i>		
	foundation	first band	second band	foundation	first band	second band
0	0~180.1	434.1~596.7	1 744.2~3 023.6	0~180.0	440.0~601.0	1 752.5~3 023.3
500	0~180.7	476.8~626.1	1 785.9~3 056.1	0~180.0	483.7~624.4	1 792.6~3 053.7
1 000	0~180.3	515.9~651.5	1 825.3~3 090.3	0~180.0	522.8~646.6	1 832.4~3 083.3
1 500	0~180.5	552.6~674.1	1 865.9~3 111.1	0~180.0	559.4~668.3	1 871.2~3 112.6
1 888	0~180.7	579.5~691.9	1 894.8~3 133.1	0~180.0	586.2~684.5	1 900.5~3 134.9

Winkler地基的基床系数  $K = 2.5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ 。轴向拉力的作用效果使得带隙、振动衰减区域都有向高频移动的趋势,带隙范围受压缩。在0~180 Hz这个范围内的衰减区域,振动衰减区域的大小不随轴力的增加变化,但振动衰减幅值随轴力增加而增大。

表3 误差分析

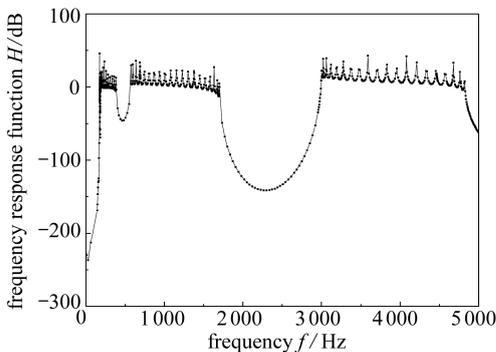
Table 3 Error analysis

axial force <i>N/N</i>	foundation band gap error		first band gap error			second band gap error		
	$\varepsilon_1 / (\%)$		$\varepsilon_2 / (\%)$			$\varepsilon_3 / (\%)$		
	cut-off value	band gap width	starting value	cut-off value	band gap width	starting value	cut-off value	band gap width
0	0.0	0.0	1.3	0.7	1.0	0.5	0.0	0.7
500	0.4	0.4	1.4	0.3	6.1	6.7	2.4	0.7
1 000	0.2	0.2	1.3	0.7	9.5	0.4	0.2	1.1
1 500	0.3	0.3	1.2	0.9	11.5	0.8	0.0	1.0
1 888	0.4	0.4	1.1	1.1	14.2	0.3	0.0	0.3

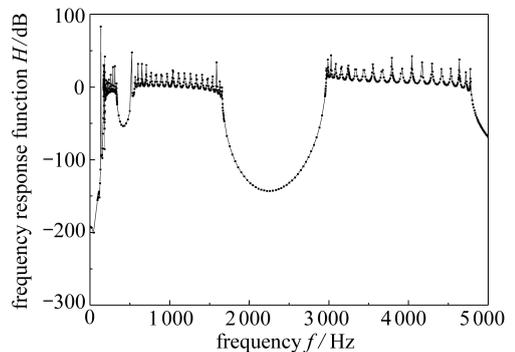
表2及表3中,地基带隙基本一致。第一、第二带隙的起始频率相差的较大,差别在16 Hz左右。第一带隙的频率范围误差在15%以内,随着轴力的增加而增大。第二带隙的宽度较大,频率范围误差相对较小。总体上,有限周期与无限周期的带隙范围相接近,有限周期的带隙范围偏大。

### 2.2 轴向压力弹性地基梁传输特性的影响

轴向压力的取值分别为0, -500 N, -1000 N, -1500 N, -1888 N。采用20个周期时有限长度 Euler梁的结构进行分析计算结果如图7及表4、5所示。



(a)  $N = -500 \text{ N}$



(b)  $N = -1000 \text{ N}$

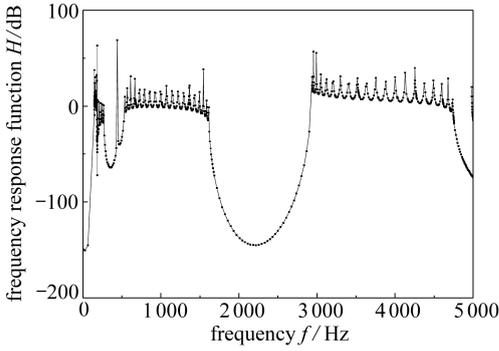
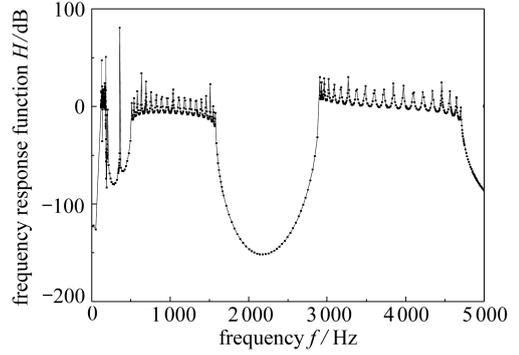
(c)  $N = -1500\text{ N}$ (d)  $N = -1888\text{ N}$ 

图7 不同压力作用时 Euler 梁的传输特性图

Fig.7 Propagation properties of the Euler beam under actions of different axial compressive forces

表4 Winkler 地基、压力共同作用梁的振动衰减区域、带隙范围

Table 4 Vibration damping area &amp; band gap range of the Euler beam under actions of elastic foundation and different axial compressive forces

axial force $N/N$	band gap of finite periodic structures $f/\text{Hz}$			band gap of infinite periodic structures $f/\text{Hz}$		
	foundation	first band	second band	foundation	first band	second band
0	0~180.1	434.1~596.7	1 744.2~3 023.6	0~180.0	440.0~601.0	1 752.5~3 023.3
-500	0~177.6	386.6~562.5	1 701.5~2 992.2	0~177.8	393.3~576.6	1 710.4~2 993.2
-1 000	0~168.5	331.6~559.3	1 658.0~2 960.5	0~167.9	339.2~550.8	1 667.8~2 962.4
-1 500	0~148.1	267.2~533.1	1 613.2~2 915.1	0~147.2	274.5~524.1	1 623.9~2 931.2
-1 888	0~118.8	203.4~511.9	1 577.4~2 892.5	0~117.9	211.2~502.1	1 588.8~2 906.3

Winkler 地基的基床系数  $K = 2.5 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ 。轴向压力降低梁的刚度,带隙频率降低,向低频移动,带隙宽度略有增加。在  $0 \sim 180 \text{ Hz}$  这个范围内的衰减区域,随轴力的增加而减小,且振动衰减幅值随着轴向压力的增加而减小,与轴向拉力作用时截然不同。

表5 误差分析

Table 5 Error analysis

axial force $N/N$	foundation band gap error		first band gap error			second band gap error		
	$\varepsilon_1 / (\%)$		$\varepsilon_2 / (\%)$			$\varepsilon_3 / (\%)$		
	cut-off value	band gap width	starting value	cut-off value	band gap width	starting value	cut-off value	band gap width
0	0.0	0.0	1.3	0.7	1.0	0.5	0.0	0.7
-500	1.7	1.7	1.7	2.4	4.0	0.5	0.0	0.6
-1 000	0.2	0.2	2.2	1.5	7.6	0.6	0.0	0.6
-1 500	0.3	0.3	2.6	1.7	6.5	0.6	0.5	0.4
-1 888	0.4	0.4	3.6	1.9	3.7	1.9	6.0	0.7

表4及表5中,地基带隙基本一致。第一、第二带隙的起始频率相差在  $10 \text{ Hz}$  左右。随着轴力的增加,带隙的范围略有增加,带隙的误差范围在  $9\%$  以内,表明,周期数为  $20$  时,其传输特性的带隙范围与无限周期的结果基本吻合。

### 3 结 论

本文运用改进的传递矩阵法讨论了轴力作用时弹性地基梁的弯曲振动特性。研究表明:轴向拉力作用时,地基带隙不发生变化,拉力增加,带隙有向高频移动的趋势,低频内的带隙范围

压缩;轴向压力作用时,地基带隙随轴力的增加而减小,能带结构图发生变化,极值点不出现在(0,0)点,可以通过调节压力的大小,实现0~150 Hz 低频范围内的带隙控制.同时,通过数值模拟发现,当周期数为20时,其结果与无限周期的带隙结果基本吻合.

通过改变轴向载荷作用改变了弹性地基梁的带隙分布以及传输特性,为弹性地基梁的抗振性提供一定的指导,在实际工程中,可以根据实际情况进行带隙分布的调节,以能更好地达到减振隔振的效果.

## 参考文献(References):

- [1] Banerjee J R. Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method[J]. *Computers and Structures*, 1998, **69**(2): 197-208.
- [2] 郁殿龙, 温激鸿, 陈圣兵, 方剑宇, 温熙森. 轴向载荷周期结构梁的弯曲振动带隙特性[J]. 振动与冲击, 2010, **29**(3): 85-88. (YU Dian-long, WEN Ji-hong, CHEN Sheng-bing, FANG Jian-yu, WEN Xi-sen. Flexural vibration band gaps in axially loaded periodic beam structure[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, **29**(3): 85-88. (in Chinese))
- [3] 郁殿龙, 温激鸿, 刘耀宗, 邱静, 温熙森. 充液周期管路的轴向振动带隙特性[J]. 机械工程学报, 2009, **45**(9): 36-40. (YU Dian-long, WEN Ji-hong, LIU Yao-zong, QIU Jing, WEN Xi-sen. Axial vibration property of periodic pipe system conveying fluid[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2009, **45**(9): 36-40. (in Chinese))
- [4] YU Dian-long, WEN Ji-hong, ZHAO Hong-gang, LIU Yao-zong, WEN Xi-sen. Vibration reduction by using the idea of phononic crystals in a pipe-conveying fluid[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **318**(1/2): 193-205.
- [5] YU Dian-long, WEN Ji-hong, ZHAO Hong-gang, LIU Yao-zong, WEN Xi-sen. Flexural vibration band gap in a periodic fluid-conveying pipe system based on the Timoshenko beam theory [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2011, **133**(1): 014502.
- [6] Sigalas M M, Economou E N. Elastic and acoustic wave band structure[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, **158**(2): 377-382.
- [7] Kushwaha M S, Halevi P, Mart I, Martínez G, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B. Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites[J]. *Physical Review B*, 1994, **49**(4): 2313-2322.
- [8] Martínez-Sala R, Sancho J, Sánchez J V, Gómez V, Llinares J, Meseguer F. Sound attenuation by sculpture[J]. *Nature*, 1995, **378**(6554): 241-245.
- [9] Kushwaha M S, Halevi P, Dobrzynski L, Djafari-Rouhani B. Acoustic band structure of periodic elastic composites[J]. *Physical Review Letters*, 1993, **71**(13): 2022-2025.
- [10] YU Dian-long, WEN Ji-hong, SHEN Hui-jie, XIAO Yong, WEN Xi-sen. Propagation of flexural wave in periodic beam on elastic foundations[J]. *Physics Letters A*, 2012, **376**(4): 626-630.
- [11] ZHANG Yan, HAN Lin, JIANG Lin-hua. Transverse vibration bandgaps in phononic-crystal Euler beams on a Winkler foundation studied by a modified transfer matrix method[J]. *Physica B*, 2013, **250**(7): 1439-1444.
- [12] HAN Lin, ZHANG Yan, NI Zhi-qiang, ZHANG Zi-ming, JIANG Lin-hua. A modified transfer matrix method for the study of the bending vibration band structure in phononic crystal Euler beams[J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2012, **407**(23): 4579-4583.
- [13] Clough R W, Penzien J. *Dynamics of Structures*[M]. Berkeley: Computers & Structures Inc, 1995.

- [14] WANG Gang, YU Dian-long, WEN Ji-hong, LIU Yao-zong, WEN Xi-sen. One-dimensional phononic crystals with locally resonant structures[J]. *Physics Letters A*, 2004, **327**(5/6): 512-521.
- [15] WANG Yong, HUANG Qi-bai, ZHOU Ming-gang, XU Zhi-sheng. Transfer matrix approach of vibration isolation analysis of periodic composite structure[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2007, **77**(7): 461-471.
- [16] HU Shao-wei, WANG Hong-xia. Study on 3D finite bodies containing cracks using the finite element method of lines[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2003, **19**(4): 1-12.
- [17] HU Shao-wei. Study on the elastic-plastic interface and large deformation of axisymmetric disks under rotating status[J]. *Applied Clay Science*, 2013, **79**(6): 41-48.
- [18] ZHANG Yan, HAN Lin, JIANG Lin-hua. Comment on "Propagation of flexural wave in periodic beam on elastic foundations"[J]. *Physics Letters A*, 2013, **377**(6): 496-498.

## Research on the Vibration Property of the Beam on Elastic Foundation Based on the PCs Theory

CHEN Qi-yong<sup>1</sup>, HU Shao-wei<sup>1,2</sup>, ZHANG Zi-ming<sup>1</sup>

(1. *College of Mechanics & Materials, Hohai University, Nanjing 210098, P.R. China;*

2. *Department of Materials & Structure Engineering, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210029, P.R. China)*

(Contributed by HU Shao-wei, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Axial loads imposed on the structure influence the vibration properties and cause the change of vibration resistance functions. Theory about the band gap properties of phononic crystals (PCs) were used to study the flexural vibration band gaps of an Euler beam on elastic foundation. A flexural vibration model of the infinite periodic PCs Euler beam was established, which was under the actions of axial force and Winkler foundation. A modified transfer matrix (MTM) method was applied to calculate the band structure of the beam. The change tendency of the band structure were estimated on the basis of the band structure. Results show that axial loads influence the band gaps and band frequency ranges. Axial tensile loads elevate the band gap frequencies, but the base band gaps remain unchanged; axial compressive loads lower the band gap frequencies, and the base band gap frequencies drop when the amplitudes of the compressive loads increase. Meanwhile, the Euler beam model was numerically simulated, and the results were matched with the analytical ones. Through adjusting the magnitude of the axial loads, different band frequency ranges and effects of vibration reduction could be achieved.

**Key words:** phononic crystal; beam on elastic foundation; band gap