文章编号:1000-0887(2014)01-0039-11

ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

# 存在内共振的覆冰四分裂 导线的非线性舞动<sup>\*</sup>

严波', 刘小会', 赵 莉', 周林抒'

(1. 重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044;

2. 重庆交通大学 土木建筑学院, 重庆 400074)

(我刊编委严波来稿)

摘要: 采用非线性有限元方法模拟研究存在内共振的覆冰四分裂导线的非线性舞动。通过稳定风场和随机风场中典型覆冰四分裂线路舞动过程的数值模拟,研究当覆冰四分裂导线的对称面内模态频率与面外模态频率之比接近于 2:1,即存在内共振条件时,导线的舞动特征。结果表明,存在内共振的覆冰四分裂导线在舞动过程中,其能量在竖直面内运动和横向水平面外运动之间不断交换,与不存在内共振线路的舞动特征差别明显。研究结果对舞动耦合机理的理解具有重要的理论意义。

**关 键 词:** 覆冰四分裂导线; 舞动; 内共振; 非线性中图分类号: TM752; V211; O322 **文献标志码**: A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.01.005

# 引 言

自从首次观察到覆冰导线的舞动现象以来,在理论、试验和数值模拟研究等方面已有不少成果<sup>[1]</sup>。在研究覆冰导线舞动时,尽管其非线性已经受到重视,但对非线性舞动的耦合机理尚缺乏深刻的认识。当导线相对于档中点的对称面内模态的固有频率与反对称面内模态的频率相等时,即出现交叉点时,对称面内模态和反对称面内模态以及面外模态存在内共振,此时,导线的舞动由于可能存在模态之间的能量交换而变得更加复杂。

对于非线性系统,如果其两个或多个线性固有频率是公度的,或近似公度的,基于系统的非线性程度,这些频率的公度关系可能导致对应模态的强烈耦合<sup>[2]</sup>.Lee 和 Perkins<sup>[3]</sup>采用二自由度简化模型研究了悬索的内共振响应,该悬索的一阶对称面内模态与一阶面外模态近似为公度的,即其对应的频率比近似为2:1.他们指出,在内共振条件下悬索的运动可能出现饱和现象和跳跃现象。当索的一阶对称面内模态对应的频率处于第一个交叉点时,悬索的一阶对称面内模态与面内和面外一阶反对称模态存在1:1的内共振条件,同时一阶对称面内模态与一阶对称面外模态存在2:1内共振,即存在多内共振.Rega等<sup>[4]</sup>以及 Nayfeh 和 Arafat<sup>[5]</sup>分别研究了在这些多内共振条件下,悬索受主共振简谐激励下的响应。他们的研究表明,当存在内共振条

\* 收稿日期: 2013-10-17;修订日期: 2013-11-27

基金项目: 国家自然科学基金(51277186; 51308570)

作者简介: 严波(1965 —),男,重庆人,教授,博士(通讯作者. E-mail: boyan@cqu.edu.cn).

件时,悬索的面内运动和面外运动之间可能存在强烈的耦合。

当覆冰导线存在内共振时,其舞动过程中面内运动和面外运动之间也可能存在强烈的耦合。Luongo 和 Piccardo<sup>[6]</sup>利用二自由度简化模型,研究了当覆冰导线的面内和面外振动固有频率比为 2:1 时的非线性舞动。Luongo 等<sup>[7]</sup>利用弯曲索-梁模型,研究了存在多内共振(1:1 和 2:1) 索的非线性舞动失稳,指出内共振的存在会导致模态之间的相互作用。本文作者<sup>[8]</sup>利用建立的非线性有限元方法模拟了覆冰单导线在对称面内模态和对称面外模态对应频率比近似为 2:1 时的舞动,揭示了内共振条件下一种新的舞动模式,该模式即为非线性系统的饱和现象。

目前,存在内共振的覆冰导线非线性舞动的研究成果还非常有限,尚未见到存在内共振的覆冰分裂导线非线性舞动特征的研究。本文拟采用非线性数值方法模拟研究存在内共振的覆冰四分裂导线的舞动。在舞动数值模拟研究方面,Desai等<sup>[9]</sup>采用有限元方法研究了覆冰单导线的舞动,但在求解运动方程时利用振型叠加技术进行了线性化处理。Zhang 和 Popplewell等<sup>[10]</sup>通过建立混合模型,将分裂导线等效为一根等效导线模拟舞动,忽略了上风子导线尾流对下风子导线气动特性的影响。本文作者<sup>[11-12]</sup>给出了覆冰分裂导线舞动非线性数值模拟方法,考虑了各子导线气动系数的不同。

本文利用已获得的模拟覆冰导线舞动的非线性有限元方法[11],数值模拟在稳定风场和随机风场中典型线路的舞动,研究存在内共振条件时覆冰四分裂导线的舞动特征,对输电线路舞动耦合机理的理解和防舞技术进一步地研究具有重要意义。

## 1 覆冰四分裂导线模型及其线性动力特性

## 1.1 典型线路段有限元模型

以档距分别为300 m 和400 m 的单档覆冰四分裂导线为研究对象,导线型号为4XLGJ-

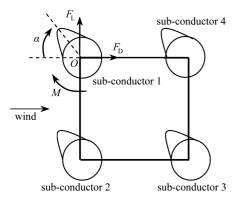


图 1 新月形覆冰模型

Fig.1 Crescent-shaped ice model

400/50,物理参数如表 1 所列,在自重作用下导线的 初始张力均为 24.11 kN,分裂导线相邻子导线间距为 450 mm。导线覆冰为新月形,冰厚 12 mm,覆冰初始 凝角为 50°.覆冰导线模型截面如图 1 所示。

建立典型线路段的有限元模型,如图 2 所示.用 具有扭转自由度的索单元离散各覆冰子导线,并用 2 结点空间梁单元模拟间隔棒,间隔棒与导线连接处 采用梁索连接过渡单元[11].模拟覆冰导线的索单元 长度取 5 m,经单元收敛性检查,满足精度要求.线路 两端为耐张绝缘子串,绝缘子串采用杆单元模拟,其 与杆塔连接的端部固定约束.模型中不考虑杆塔,忽 略杆塔变形的影响.

表 1 新月形覆冰导线物理参数(冰厚: 12 mm)

Table 1 Physical parameters of conductor with crescent-shaped ice (ice thickness: 12 mm)

diameter of bare conductor	d /mm	27.6
Young's modulus	$E/(N/m^2)$	$7 \times 10^{10}$
torsional stiffness	$GJ/(N \cdot m^2 \cdot rad^{-1})$	101
moment of inertia per unit length	$I/(\text{kg}\cdot\text{m})$	$2.68 \times 10^{-4}$
cross-section area	$A / \text{mm}^2$	451.55
mass of iced conductor per unit length	$\mu/(\mathrm{kg/m})$	1.732
damping ratio	ξ	0.5%

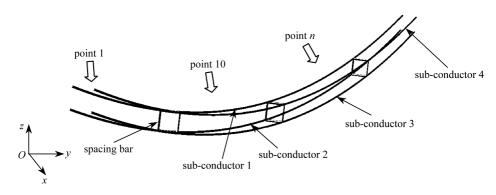


图 2 覆冰四分裂导线模型

Fig.2 Model of iced quad-bundle conductor line

## 1.2 线性固有频率及模态

利用建立的有限元模型,基于导线在自重和覆冰载荷作用下的平衡状态进行线性固有频率和模态分析,得到竖向面内、横向水平面外和扭转3个方向的低阶模态和固有频率,如表2中所列。其中单半波和三半波模态关于档中点对称,双半波模态关于档中点反对称。

表 2 覆冰四分裂导线低阶固有频率及模态

300 m (span) 400 m (span) vibration direction frequency frequency mode mode  $f_n/Hz$  $f_n/Hz$ 0.293 0.443 0.391 0.383 in-plane 0.512 0.621 0.196 0.147 0.392 0.294 out-of-plane 0.589 0.441 0.348 0.294 one loop one loop 0.315 torsion 0.392 two loops two loops 0.599 0.460 three loops three loops

Table 2 Natural frequencies and modes of iced quad-bundle conductor lines

Irvine 和 Caughey<sup>[13]</sup>在研究悬索的线性自由振动问题时,给出横向水平面外运动的固有频率和模态.

$$f_n = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{H}{m}}, \ u_n(y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$
 (1)

式中 l 为悬索的档距,H 为索中静态张力的水平分量,m 为索单位长度的质量。在一阶近似的情况下,面外模态不产生附加张力。

索的面内振动模态包括反对称面内模态和对称面内模态.反对称面内模态包括反对称的垂直分量和对称的纵向分量;对称面内模态则包括对称的垂直分量和反对称的纵向分量.在一阶近似的情况下,前者不会引起附加的张力,后者则会在索中引起附加张力.反对称面内模态的固有频率和垂直模态分量为

$$f_n = \frac{n}{l} \sqrt{\frac{H}{m}}, \ w_n(y) = A_n \sin\left(\frac{2n\pi y}{l}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots.$$
 (2)

对称面内模态会引起索中张力的变化,其固有频率依赖于 Irvine 参数  $\lambda^2$ :

$$\lambda^2 = \left(\frac{8s}{l}\right)^2 \frac{lEA}{HL_o}, \ L_e \approx l \left[1 + 8\left(\frac{s}{l}\right)^2\right],\tag{3}$$

式中 s 为索的弧垂, E 和 A 分别为索的弹性模量和横截面积。可见, Irvine 参数与索的几何性质和弹性性质有关。当  $\lambda^2 < 4\pi^2$  时, 一阶对称面内模态的频率小于一阶反对称面内模态的频率,且一阶对称垂直模态分量沿档无内节点,即模态为单半波形式。当  $\lambda^2 = 4\pi^2$  时, 一阶对称面内模态的频率与一阶反对称面内模态的频率相等,此为第 1 个"交叉"点。当  $\lambda^2 > 4\pi^2$  时, 一阶对称面内模态的频率大于一阶反对称面内模态的频率,且一阶对称垂直模态分量沿档有两个内节点,即模态为三半波形式。当  $\lambda^2 = 16\pi^2$  时, 二阶对称面内模态的频率与二阶反对称面内模态的频率相等。此为第 2 个"交叉"点。

值得一提的是,根据式(1)和(2),反对称面内模态与所有面外模态都是公度的,但它们的前两阶模态并不涉及内共振<sup>[5]</sup>.因此,在第1个交叉点才会出现内共振。

对于本文讨论的档距分别为 300 m 和 400 m 的覆冰四分裂导线,可计算得到其对应的  $\lambda^2$  分别为 44.34 和 102.94。可见,300 m 档距对应的  $\lambda^2$  与  $4\pi^2 \approx 39.438$  较接近,即接近于第 1 个交叉点。由前述可知,在第 1 个交叉点附近,一阶对称面内模态与一阶反对称面内模态的频率比接近于 1:1,同时一阶对称面内模态与一阶对称面外模态的频率比接近于 2:1,即存在多内共振条件。从表 2 中的结果可见,由有限元计算得到的模态和频率也印证了这一结论。400 m 档距线路的  $\lambda^2$  大于  $4\pi^2$ ,其一阶对称面内模态频率 0.383 Hz 大于一阶反对称面内模态固有频率 0.293 Hz,其远离第 1 个交叉点。尽管其一阶反对称模态频率近似为一阶面内模态频率的 2 倍,如前所述,它们之间并不存在耦合,即不存在内共振。

此外,由式(1)和(2)计算得到的面外模态固有频率和对称面内模态固有频率,与表 2 中 给出的由有限元计算得到的频率非常接近。

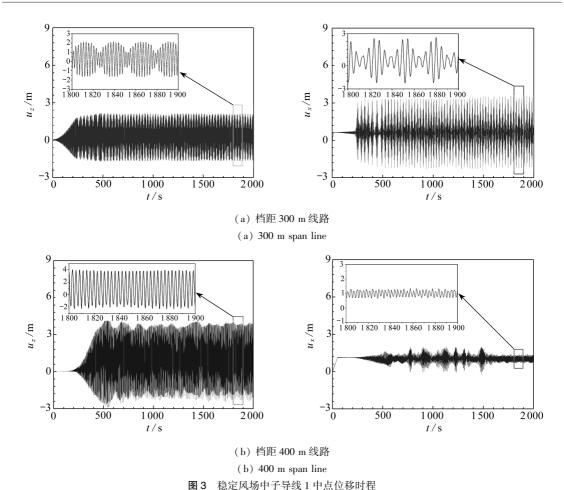
# 2 覆冰四分裂导线的非线性舞动

本文作者在中国空气动力研究与发展中心 1.4×1.4 m²低速风洞中,完成了典型新月形和扇形覆冰四分裂导线的空气动力系数风洞试验,获得了不同覆冰厚度和不同风速下覆冰四分裂导线各子导线的升力、阻力和扭矩系数随风攻角的变化曲线。试验结果表明,由于子导线尾流的影响,4 根子导线的空气动力系数存在明显差异,且在舞动发生的风速范围内风速对覆冰导线气动系数的影响很小,详见文献[14]。

#### 2.1 稳定风场中的舞动

采用非线性舞动模拟方法[11],模拟在风速为 10 m/s 稳定风场中两个典型线路段的舞动。模拟得到的子导线 1 的竖向和横向水平位移时程如图 3 所示。可见,在初始阶段导线小幅摆动,之后摆幅逐渐增大直到舞动稳定状态。从图 3(a)可以发现,300 m 档距导线舞动过程中,能量在竖向振动和横向水平振动之间不断交换,面内和面外振动强烈耦合,这正是由于内共振所致[2]。

图 4 和 5 所示分别为子导线 1 中点的运动轨迹和舞动轨迹。由图 5(a)可见,300 m 档距导线的舞动轨迹为 8 字形,在一个舞动循环周期中,导线竖向振动 2 个周期,水平向振动 1 个周期,这是由于内共振所致。由图 5(b)可见,400 m 档距导线的舞动轨迹则近似为一垂直椭圆,竖向和横向水平运动之间不存在耦合。



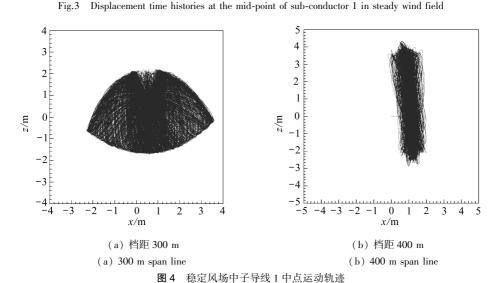


Fig.4 Motion traces at the mid-point of sub-conductor 1 in steady wind field

为进一步分析舞动特征,图 6 给出了子导线 1 中点位移和扭转角响应的频谱,以分析舞动的频率特征和运动模式,从图 6(a)中可见,300 m 档距导线竖向运动的频率集中在 0.4 Hz 和

0.445 Hz 之间,其中在接近于竖向双半波模态固有频率 0.391 Hz 附近有一个峰值。而在水平位移频谱中,在接近于单半波模态固有频率 0.196 Hz 附近有一个峰值。如前所述,在竖向和横向水平振动之间存在能量的交换,即存在耦合振动。此外,在扭转频谱中,在接近于其扭转双半波模态的固有频率 0.392 Hz 附近有一峰值,几乎与竖向双半波频率相同,接近于横向水平单半波频率的 2 倍。由此可见,该导线的舞动为垂直、水平和扭转耦合运动。

如图 6(b)中所示,400 m 档距导线竖向位移频谱中,在三半波模态固有频率 0.383 Hz 附近有一峰值。同时,横向水平和扭转角响应频谱中,在该频率处均存在一个峰值。舞动过程中激发了竖向三半波模态,并未激发耦合运动,为三半波垂直舞动。

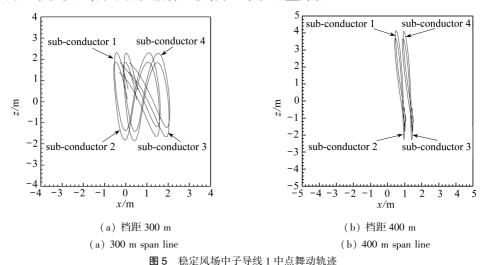
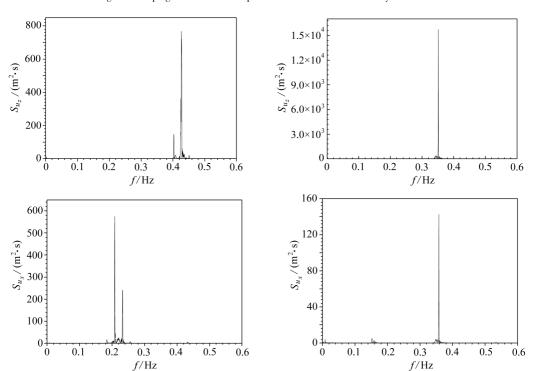


Fig.5 Galloping orbits at the mid-point of sub-conductor 1 in steady wind field



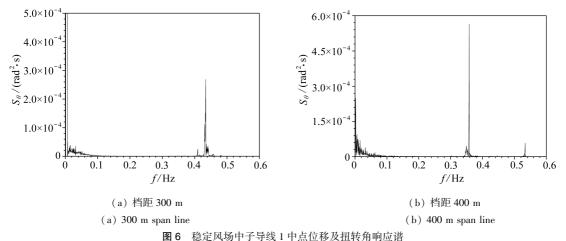


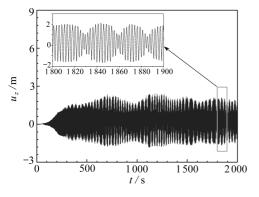
Fig.6 Spectra of displacements and torsional angles at

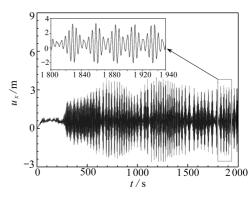
#### 19.6 Spectra of displacements and torsional angles at the mid-point of sub-conductor 1 in steady wind field

## 2.2 随机风场中的舞动

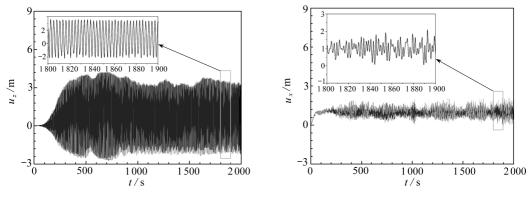
采用随高度变化的 Kaimal 脉动风速谱和 Devenport 相干函数模拟空间随机风场<sup>[15]</sup>。假设典型线路所处环境为 B 类地貌,其地面粗糙系数 a 取 0.16,地面粗糙长度  $z_0$  取  $0.03^{[15]}$ 。假设导线弧垂最低点位置离地面高度为 10 m 。在模拟风速时,沿顺线路 y 方向每隔 10 m 模拟一个风速时程样本。模拟时程总长 T=2000 s,时间步长  $\Delta t=0.5$  s,频率的截取范围取  $0.0\sim6.28$  rad/s,频率范围等分数 N=3000,即  $\Delta \omega=0.00209$  rad/s。模拟的基本风速  $\bar{U}_{10}$  取 10 m/s。随机风场的数值模拟方法详见文献[16]。

最近,本文作者给出了随机风场中覆冰分裂导线舞动数值模拟方法[17],利用该方法模拟得到的覆冰四分裂导线中子导线1的竖向和横向水平位移时程如图7所示。显然,随机风场中导线的动力响应与稳定风场中的存在差别。随机风场中,导线动力响应中包含了周期性舞动响应和随机阵风响应,其需要通过谱分析进行识别。在两条线路中均可见随机水平响应分量。值得一提的是,随机风场中导线的振动响应幅值并不一定大于稳定风场中的幅值,尽管随机风速的最大值可能远大于稳定风速。这是由于作用于导线上不同点的风速间的相关性使得各点的风速不同相所致。沿线路方向风荷载的非均匀性可能减小振动幅值,特别是对大档距情况更是如此。





- (a) 档距 300 m 线路
- (a) 300 m span line



(b) 档距 400 m 线路

(b) 400 m span line

图 7 随机风场中子导线 1 中点位移时程

Fig. 7 Displacement time histories at the mid-point of sub-conductor 1 in stochastic wind field

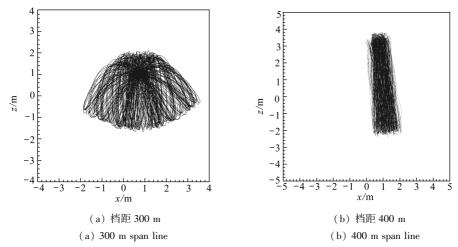


图 8 随机风场中子导线 1 中点运动轨迹

Fig.8 Motion traces at the mid-point of sub-conductor 1 in stochastic wind field

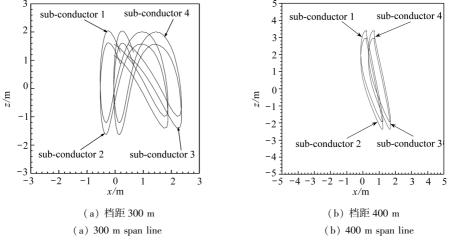


图 9 随机风场中子导线 1 中点舞动轨迹

Fig.9 Galloping orbits at the mid-point of sub-conductor 1 in stochastic wind field

图 8 和 9 所示分别为子导线 1 中点的运动轨迹和舞动轨迹.由图 9 可见,300 m 档距导线的舞动轨迹仍为 8 字形,而 400 m 档距导线的舞动轨迹仍近似为一垂直椭圆.不同于稳定风场中的情况.随机风场中导线的响应包含了周期性的舞动和随机性的阵风响应。

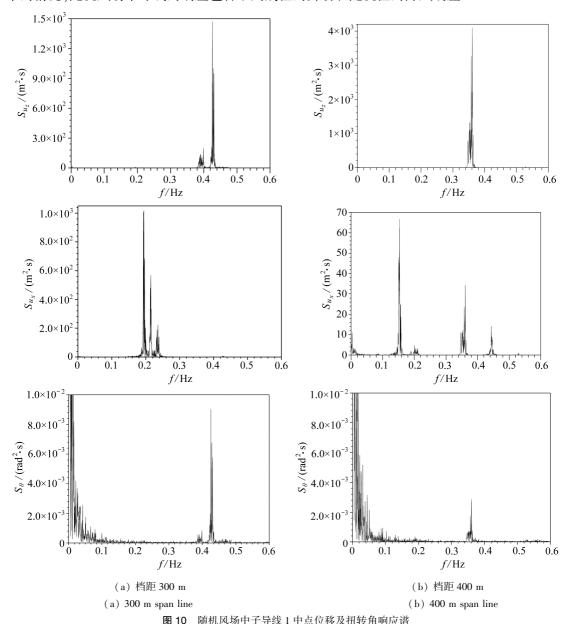


Fig. 10 Spectra of displacements and torsional angles at the mid-point of sub-conductor 1 in stochastic wind field

图 10 给出了子导线 1 中点位移和扭转角响应频谱。由图 10(a)可见,类似于稳定风情况, 300 m 档距导线竖向位移频谱在竖向双半波模态固有频率 0.391 Hz 附近有一峰值,水平响应在单半波固有频率 0.196 Hz 附近的频带内存在多个峰值,表明在该频带内包含了自激舞动响应和脉动风荷载引起的受迫振动响应。另外,在扭转角响应频谱中,除了拟静态响应外,出现了与竖向舞动频率一致的峰值。随机风场中导线运动过程中仍然存在竖向和横向水平振动的能量交换。其舞动仍为垂直、水平和扭转耦合运动。

如图 10(b)所示,类似于稳定风情况,400 m 档距的竖向运动响应谱在三半波模态固有频率 0.383 Hz 附近有一峰值。然而,水平响应比稳定风场中更复杂。除了与竖向舞动频率相同的响应外,还在横向水平单半波模态固有频率 0.147 Hz 和三半波模态固有频率 0.441 Hz 附近存在峰值。由于脉动风的能量集中在低频范围,横向水平单半波振动响应应该是由脉动风荷载激励产生,而三半波响应应该为自激振动响应。因此,在随机风场中大档距导线的舞动特征可能更加复杂。

## 3 结 论

本文采用非线性数值模拟方法模拟了新月形覆冰四分裂导线在稳定风场和随机风场中的舞动,研究了在内共振条件下的舞动特征。得到如下的结论:1)当覆冰四分裂导线存在内共振条件时,导线舞动过程中能量在竖向和横线水平振动之间不断交换,舞动轨迹近似为8字形。2)当覆冰四分裂导线的面内和面外模态不存在内共振时,未发生竖向和横向水平运动的耦合。3)随机风场中内共振覆冰四分裂导线的舞动特征并未发生明显变化,即顺风向面外受迫激励并未引发新的耦合运动。

## 参考文献(References):

- [1] EPRI Transmission Line Reference Book. Wind-Induced Conductor Motion [M]. 2nd Ed. Palo Alto, California: Electric Power Research Institute, 2009, 1018554.
- [2] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillation[M]. New York: Wiley, 1979.
- [3] Lee C L, Perkins N C. Nonlinear oscillations of suspended cables containing a two-to-one internal resonance [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1992, **3**(6): 465-490.
- [4] Rega G, Lacarbonara W, Nayfeh A H, Chin C M. Multiple resonances in suspended cables: direct versus reduced-order models [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1999, **34**(5): 901-924.
- [5] Nayfeh A H, Arafat H N. Multimode interactions in suspended cables [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2002, **8**(3): 337-387.
- [6] Luongo A, Piccardo G. Non-linear galloping of sagged cables in 1:2 internal resonance [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 214(5); 915-940.
- [7] Luongo A, Zulli D, Piccardo G. Analytical and numerical approaches to nonlinear galloping of internally resonant suspended cables [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **315**(3): 375-393.
- [8] 刘小会, 严波, 张宏雁, 周松. 覆冰导线舞动非线性数值模拟方法[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(4): 457-468.(LIU Xiao-hui, YAN Bo, ZHANG Hong-yan, ZHOU Song. Nonlinear numerical simulation method for galloping of iced conductor[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(4): 457-468.(in Chinese))
- [9] Desai Y M, Yu P, Popplewell N, Shah A H. Finite element modeling of transmission line galloping[J]. *Computers & Structures*, 1995, **57**(3): 407-420.
- [10] Zhang Q, Popplewell N, Shah A H. Galloping of bundle conductor[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **234**(1): 115-134.
- [11] 刘小会, 严波, 张宏雁, 周松, 唐杰. 分裂导线舞动非线性有限元分析方法[J]. 振动与冲击, 2010, **29**(6): 129-133.(LIU Xiao-hui, YAN Bo, ZHANG Hong-yan, ZHOU Song, TANG Jie. Nonlinear finite element method for bundle conductors[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, **29**(6): 129-133.(in Chinese))
- [12] Hu J, Yan B, Zhou S, Zhang H. Numerical investigation on galloping of iced quad bundle con-

- ductors[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2012, 27(2): 784-792.
- [13] Irvine H M, Caughey T K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1974, 341(1626); 299-315.
- [14] 张宏雁, 严波, 周松, 胡景, 刘小会. 覆冰四分裂导线静态气动力特性试验研究[J]. 空气动力学学报, 2011, **29**(2): 23-27.(ZHANG Hong-yan, YAN Bo, ZHOU Song, HU Jing, LIU Xiao-hui. Static test on aerodynamics of iced quad bundle conductors[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2011, **29**(2): 23-27.(in Chinese))
- [15] Simiu E, Scanlan R H. Wind Effects on Structures [M]. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1986.
- [16] Yan B, Lin X, Luo W, Chen Z, Liu Z. Numerical study on dynamic swing of suspension insulator string in overhead transmission line under wind load[J]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2010, **25**(1): 248-259.
- [17] 刘小会, 严波, 张宏雁, 周松. 随机风场中覆冰四分裂导线舞动数值模拟[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(13): 16-21.(LIU Xiao-hui, YAN Bo, ZHANG Hong-yan, ZHOU Song. Numerical investigation on galloping of iced quad bundle conductor in stochastic wind field[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(13): 16-21.(in Chinese))

# Nonlinear Galloping of Iced Quad-Bundle Conductors With Internal Resonances

YAN Bo<sup>1</sup>, LIU Xiao-hui<sup>2</sup>, ZHAO Li<sup>1</sup>, ZHOU Lin-shu<sup>1</sup> (1. College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P.R.China;

 $\hbox{\it 2. School of Civil Engineering \& Architecture, Chongqing Jiaotong University,} \\ Chongqing~400074\,,~P.R.China)$ 

(Contributed by YAN Bo, M. AMM Editorial Board)

**Abstract**: Galloping of iced quad-bundle conductors with internal resonance was numerically investigated by means of nonlinear finite element method. Based on the numerical simulation of galloping processes of the typical iced quad-bundle conductor lines in both the steady and the stochastic wind fields, galloping characteristics of the iced conductor line with the ratio of the frequency of the first symmetric in-plane mode to the frequency of the out-of-plane mode being 2:1 were discussed. It is shown that energy continuously interchanges between the vertical motion and transverse horizontal motion as internal resonance exists, which is apparently different from those of the line without internal resonance. The result provides a theoretical basis for the understanding of the coupling mechanism of galloping.

**Key words:** iced quad-bundle conductor; galloping; internal resonance; nonlinearity **Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(51277168; 51308570)