

一类准零刚度隔振器的分段 非线性动力学特性研究*

王心龙, 周加喜, 徐道临

(湖南大学 机械与运载工程学院, 长沙 410082)

(本刊编委邓子辰推荐)

摘要: 建立了一类带有滚轮装置的准零刚度隔振系统的分段非线性动力学模型,利用平均法对系统在基础激励下的动力学特性进行了理论分析,得到了系统主共振响应的一次近似解析解.利用数值方法对动力学方程求解,验证了平均法求解此类分段非线性动力学问题的有效性.进一步,讨论了激励幅值、阻尼对系统响应的影响,利用位移传递率评估了隔振系统的隔振性能.结果表明,激励幅值和阻尼对系统响应具有显著影响:激励幅值较小时,该准零刚度隔振系统的隔振性能明显优于相应的线性系统;而随激励幅值增大时,其隔振性能变差,但最多与线性系统相当,而不会变得更差,此特征优于传统准零刚度隔振系统.

关键词: 准零刚度; 分段非线性; 平均法; 隔振

中图分类号: O322 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.01.006

引 言

众所周知,线性隔振系统仅当 $\omega > \sqrt{2}\omega_n$ (ω, ω_n 分别是激励频率和系统的固有频率)时才有隔振效果.因此,线性隔振系统需降低自身固有频率方能隔离低频激励,通常的方法是减小系统刚度.但刚度过小将导致静位移过大、系统不稳.准零刚度隔振器具有足够大的静刚度支撑被隔振设备,同时,系统在静平衡位置附近振动时,动刚度很低,理论上静平衡位置处动刚度为0.因此,准零刚度隔振器非常适于低频甚至超低频隔振,有望在精密加工、舰船降噪、航天器有效载荷防护等方面得到应用.

准零刚度隔振器的设计与理论分析已得到广泛地研究. Alabuzhev 等^[1]将正刚度弹性元件与负刚度弹性元件并联研发了若干隔振装置,并提出了准零刚度的概念. Le 和 Ahn^[2]将此项技术应用于汽车座椅的隔振,针对低频和随机路面激励,取得了很好的效果. Carrella 等^[3-4]进行几何拓扑组合,通过参数化建模和优化设计得到了准零刚度隔振器,并对其理论进行了系统而

* 收稿日期: 2013-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(11102062;11272116);高等学校博士学科点专项科研基金(20110161120040)

作者简介: 王心龙(1988—),男,湖北公安人,硕士生(E-mail: wuqingjianshen@163.com);
周加喜(1983—),男,讲师,硕士生导师(通讯作者. E-mail: jxizhou@hnu.edu.cn).

深入地研究.张建卓等^[5]利用两端受压杆结构提供负刚度,将基于正负刚度并联的新型隔振系统应用于精密仪器的隔振,但对其负刚度的原理及系统的非线性特性涉及较少.刘兴天,华宏星等^[6]将具有负刚度特性的 Euler(欧拉)屈曲梁结构和线性隔振器并联使用,设计准零刚度隔振器,并讨论了激励幅值对该准零刚度隔振器特性的影响.彭献等^[7]提出了一种 6 根杆和 1 根拉簧组合式的准零刚度隔振器.徐道临,赵智等^[8]设计了一种新型的气动可调式准零刚度系统,首次尝试采用气动弹簧来实现准零刚度的特性.上述研究均表明,由于准零刚度隔振系统的渐硬非线性特性,为确保系统的隔振性能,要求激励不能太大,且激励越小,隔振效果越好.然而,笔者的实验研究^[9]发现,当激励较小时,系统振动幅值较小,此时负刚度机构并没有参与其中,隔振性能与相应的线性系统相当,其优越性并没有体现出来.为了使负刚度机构对小位移更加敏感,本文将文献[2]中的连杆用滚轮-凸轮机构代替,提出一种新型准零刚度隔振器(文献[1]中也提出过类似的装置).当位移幅值较小时,滚轮与凸轮始终保持接触,但当幅值较大时,滚轮将与凸轮脱离.因此,此类准零刚度隔振器的回复力和刚度具有典型的分段非线性特征.为揭示其动力学特性,本文将利用平均法^[10]分析隔振系统在基础激励下的幅频特性,并用数值仿真进行验证;进一步讨论激励幅值、阻尼对系统响应的影响;最后,对隔振系统的位移传递率进行了评估,并与相应的线性系统进行对比,验证其优越性.

1 系统模型和静态分析

考虑如图 1 所示带滚轮机构的准零刚度隔振器.被隔振设备质量为 M ,仅能沿竖直方向运动,图 1 所示为静态平衡位置.此时,凸轮圆心与滚轮圆心在同一水平线上,竖直和水平弹簧的压缩量分别是 $\Delta x = Mg/k_v$ 和 δ .当系统在平衡位置附近振动时,凸轮离开平衡位置,带有滚轮的水平弹簧在竖向产生负刚度,从而减小整个系统在竖向的刚度.当负刚度与竖直弹簧的刚度相等时,平衡位置处的刚度为 0,即零刚度条件.

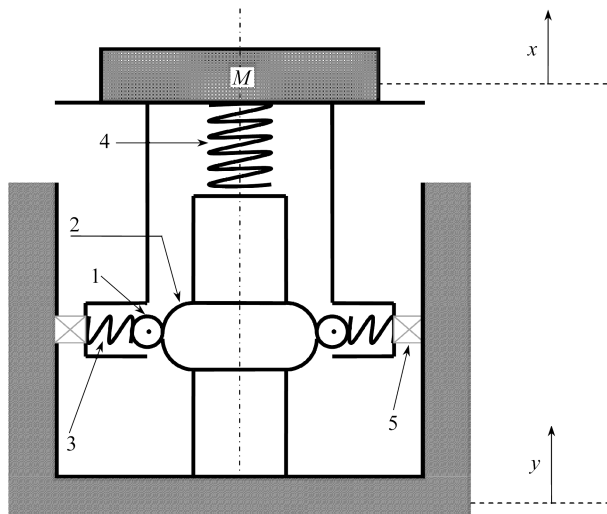


图 1 带有滚轮装置的准零隔振系统原理图^[1]

Fig.1 Model of a QZS vibration isolator with cam-roller-spring mechanism

图 1 中:1—滚轮,半径 r_1 ; 2—固定的半圆凸轮,半径 r_2 ; 3—水平弹簧,刚度 k_h ; 4—竖直弹簧,刚度 k_v ; 5—直线轴承.图 1 所示隔振系统处于静平衡位置,若隔振器下端固定,并在质量

M 上准静态施加一向上力 $f(x)$ 时,质量 M 将偏离静平衡位置,向上移动 x .此时,隔振系统各部件的受力分析,以及凸轮与滚轮3种典型的相对位置如图2所示,其中,图2(c)为接触与脱开的临界位置.当 M 在垂直方向上位移满足 $|x| < x_d = \sqrt{r_2(2r_1 + r_2)}$ 时,滚轮与凸轮保持接触,但是当 $|x| > x_d$ 时,滚轮脱离凸轮,沿着竖直壁面滚动.因此,力 $f(x)$ 与位移 x 的关系可以用分段函数表示.

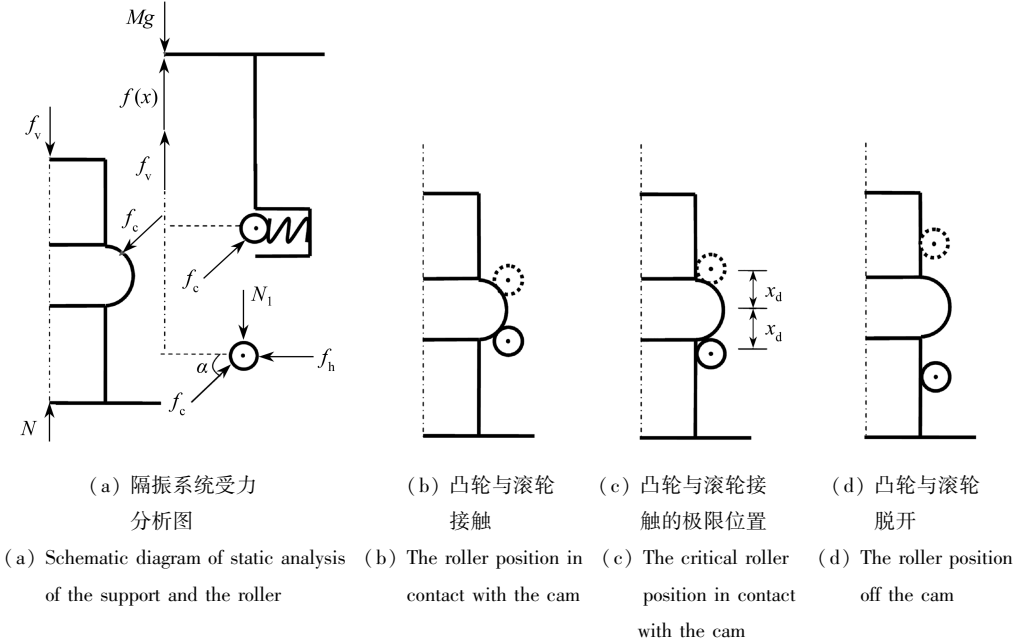


图2 隔振系统受力分析图及凸轮与滚轮的3种典型的相对位置

Fig.2 Schematic diagram of static analysis and three typical roller positions relative to the cam

当滚轮与凸轮接触时,力与位移的关系可以表示为

$$f(x) = Mg - f_v - 2f_h \tan \alpha, \quad (1)$$

其中

$$f_v = k_v (\Delta x - x), \quad f_h = k_h [\delta - (r_1 + r_2)(1 - \cos \alpha)],$$

$$\tan \alpha = x / \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - x^2}.$$

已知竖直弹簧在平衡位置的压缩量为 Δx ,因此,力与位移的关系可进一步写为

$$f(x) = k_v x - 2k_h x \left[1 + \frac{\delta - (r_1 + r_2)}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - x^2}} \right]. \quad (2)$$

当位移 $|x| > x_d$ 时,滚轮脱离了凸轮,质量块只被竖直弹簧支撑着,力与位移的关系是

$$f(x) = k_v x. \quad (3)$$

联立方程(2)和(3),回复力可表示为

$$f(x) = \begin{cases} k_v x - 2k_h x \left[1 + \frac{\delta - (r_1 + r_2)}{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - x^2}} \right], & |x| < x_d, \\ k_v x, & |x| \geq x_d. \end{cases} \quad (4)$$

为设计准零刚度隔振器,假设质量在平衡位置附近小位移振动,即 $|x| < x_d$,令 $\bar{x} = x / (r_1 +$

r_2) 和 $\bar{f} = f/k_v(r_1 + r_2)$, 回复力可以表示为无量纲形式:

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x} - 2\beta\bar{x} \left[1 + \frac{\bar{\delta} - 1}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}} \right], \quad (5)$$

其中 $\bar{\delta} = \delta/(r_1 + r_2)$ 和 $\beta = k_h/k_v$. 对方程(5) 关于 \bar{x} 求导可得系统的无量纲刚度:

$$\bar{K} = 1 - 2\beta \left[1 + \frac{\bar{\delta} - 1}{(1 - \bar{x}^2)^{3/2}} \right]. \quad (6)$$

从上式可以看出, 当参数 β 和 $\bar{\delta}$ 满足一定的关系时, 隔振器在平衡位置将产生零刚度. 令 $\bar{K}(\bar{x} = 0) = 0$, 可得零刚度 (quasi-zero-stiffness) 条件:

$$\bar{\delta}_{QZS} = \frac{1}{2\beta}. \quad (7)$$

将式(7)分别代入到式(5)和式(6), 可得准零刚度隔振系统的力-位移关系:

$$\bar{f}_{QZS}(\bar{x}) = \bar{x} \left[1 - \frac{1}{\bar{\delta}_{QZS}} \left(1 + \frac{\bar{\delta}_{QZS} - 1}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}} \right) \right]. \quad (8)$$

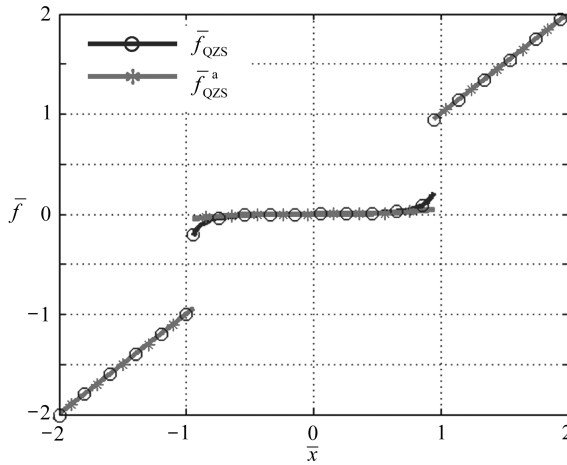


图3 力-位移关系精确表达式与近似表达式的比较

Fig.3 Comparison between the exact expression of the force-displacement relation and the approximate one

至此, 准零刚度隔振器设计完毕, 其力-位移关系的完整表达式为

$$\bar{f}_{QZS}(\bar{x}) = \begin{cases} \left[1 - \frac{1}{\bar{\delta}_{QZS}} \left(1 + \frac{\bar{\delta}_{QZS} - 1}{\sqrt{1 - \bar{x}^2}} \right) \right] \bar{x}, & |\bar{x}| < \bar{x}_d, \\ \bar{x}, & |\bar{x}| \geq \bar{x}_d, \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\bar{x}_d = \sqrt{r_2(2r_1 + r_2)}/(r_1 + r_2)$. 为方便后续动力学分析, 将力-位移关系式(9)中第一式在平衡位置处进行 Taylor(泰勒)展开, 式(9)可近似表示为

$$\bar{f}_{QZS}^a(\bar{x}) = \begin{cases} \gamma\bar{x}^3, & |\bar{x}| < \bar{x}_d, \\ \bar{x}, & |\bar{x}| \geq \bar{x}_d, \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\gamma = (1 - \bar{\delta}_{QZS})/(2\bar{\delta}_{QZS})$. 图3表示当 $\bar{\delta}_{QZS} = 0.9$ 时准零刚度隔振器的力与位移关系. 由图可

知,力与位移关系在 $|\bar{x}| = \bar{x}_d$ 处不连续;在位移区间 $|\bar{x}| < \bar{x}_d$ 内,曲线非常平坦,刚度很小,且在 $\bar{x} = 0$ 处,系统刚度为0.从图中还可看出,近似表达式(10)在位移区间 $|\bar{x}| < \bar{x}_d$ 内的大部分区域与精确表达式(9)吻合得很好,仅在 $|\bar{x}| = \bar{x}_d$ 附近差别较大,而在区间 $|\bar{x}| > \bar{x}_d$ 内二者因表达式一致而完全吻合.

2 准零刚度隔振系统在基础激励下的动力学分析

2.1 动力学方程

考虑阻尼的影响,在与竖直弹簧平行的方向上增加一个线性粘性阻尼器.施加基础激励 $y = Y \sin \omega t$,令 $z = x - y$,则运动方程可以写作

$$M\ddot{z} + c\dot{z} + f(z) = -M\ddot{y}, \quad (11)$$

其中 c 是阻尼系数, $f(z)$ 见式(4).令 $\bar{z} = z/(r_1 + r_2)$, $\bar{Y} = Y/(r_1 + r_2)$, $\bar{t} = t\sqrt{k_v/M}$, $\Omega = \omega/\sqrt{k_v/M}$, $\zeta = c/(2\sqrt{Mk_v})$,并将式(7)代入到式(11)中,则准零刚度隔振系统的运动方程为

$$\bar{z}'' + 2\zeta\bar{z}' + \bar{f}_{QZS}(\bar{z}) = \Omega^2\bar{Y}\sin\Omega\bar{t}, \quad (12)$$

其中符号“ $'$ ”表示关于自变量 \bar{t} 的导数, $\bar{f}_{QZS}(\bar{z})$ 见式(9).由于式(9)可由简单的式(10)近似,因此运动方程可以近似地写成

$$\bar{z}'' + 2\zeta\bar{z}' + \bar{f}_{QZS}^a(\bar{z}) = \Omega^2\bar{Y}\sin\Omega\bar{t}. \quad (13)$$

由于系统回复力为分段函数,因此运动方程(12)、(13)均为分段非线性动力学方程.

2.2 主共振响应的一次近似解析解

方程(13)描述的是强迫振动下的单自由度分段非线性动力学系统,系统响应依赖于对方程(13)的求解.利用平均法^[10]求解运动方程(13)的主共振一次近似解析解.运动方程(13)可改写为

$$\bar{z}'' + \Omega_0^2\bar{z} = \Omega^2\bar{Y}\sin\Omega\bar{t} - 2\zeta\bar{z}' - h(\bar{z}), \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= 1, \\ h(\bar{z}) &= \begin{cases} \gamma\bar{z}^3 - \bar{z}, & |\bar{z}| < \bar{x}_d, \\ 0, & |\bar{z}| \geq \bar{x}_d. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

令 $\Omega_0^2 = \Omega^2 - \varepsilon\sigma$,引入小参数 ε 和调谐参数 σ , ε 的大小表示非线性的强弱, σ 从数量上描述 Ω_0 与 Ω 的接近程度,运动方程可以进一步改写成

$$\bar{z}'' + \Omega^2\bar{z} = \varepsilon g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \varepsilon\sigma\bar{z}, \quad (16)$$

其中

$$g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) = \Omega^2\bar{Y}\sin\Omega\bar{t} - 2\zeta\bar{z}' - h(\bar{z}). \quad (17)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,方程(16)的派生系统为线性保守系统,此派生系统的自由振动解为

$$\bar{z} = A\cos(\Omega\bar{t} - \theta), \quad \bar{z}' = -\Omega A\sin(\Omega\bar{t} - \theta), \quad (18)$$

其中,常数 A 和 θ 取决于初始条件.当 $\varepsilon \neq 0$ 时,方程(16)的解仍然能用式(18)表示,但是此时 A 和 θ 是关于 \bar{t} 的函数,而不是常数,令 $\psi(\bar{t}) = \Omega\bar{t} - \theta$ 并将其代入到方程(18)中,然后对方程(18)关于 \bar{t} 求导可得

$$\begin{cases} \bar{z}' = A' \cos \psi - A(\Omega - \theta') \sin \psi, \\ \bar{z}'' = -\Omega[A' \sin \psi + A(\Omega - \theta') \cos \psi]. \end{cases} \quad (19)$$

将式(18)的第二式和式(16)代入方程(19),求解关于 A' 和 θ' 的代数方程可得

$$\begin{cases} A' = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Omega} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma\bar{z}] \sin \psi, \\ \theta' = \frac{\varepsilon}{2\pi\Omega A} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma\bar{z}] \cos \psi. \end{cases} \quad (20)$$

振幅 A 和相位角 θ 关于 \bar{t} 的变化与 ε 是同一个数量级的,并且其变化速度远小于 $\psi(\bar{t})$ 的变化.因此,将方程组(20)的右边用关于 ψ 一个周期内的平均值代替,并认为 A 和 θ 在 ψ 的一个周期内保持不变,便可得平均化方程:

$$\begin{cases} A' = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma\bar{z}] \sin \psi d\psi, \\ \theta' = \frac{\varepsilon}{2\pi\Omega A} \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma\bar{z}] \cos \psi d\psi. \end{cases} \quad (21)$$

当 $A < \bar{x}_d$ 时, $|z| < \bar{x}_d$ 成立,得 $h(\bar{z}) = \gamma\bar{z}^3 - \bar{z}$,

$$g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) = \Omega^2 \bar{Y} \sin \Omega \bar{t} - 2\zeta \bar{z}' - h(\bar{z}) = \Omega^2 \bar{Y} \sin \Omega \bar{t} - 2\zeta \bar{z}' - \gamma\bar{z}^3 + \bar{z}. \quad (22)$$

由平均法得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma\bar{z}] \sin \psi d\psi &= \\ \int_0^{2\pi} \sigma A \cos \psi \sin \psi d\psi + \int_0^{2\pi} \Omega^2 \bar{Y} \sin(\psi + \theta) \sin \psi d\psi + \\ \int_0^{2\pi} -2\zeta(-A\Omega) \sin^2 \psi d\psi + \int_0^{2\pi} (A \cos \psi - \gamma A^3 \cos^3 \psi) \sin \psi d\psi &= \\ 2\pi\zeta A \Omega + \pi\Omega^2 \bar{Y} \cos \theta, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma\bar{z}] \cos \psi d\psi &= \\ \int_0^{2\pi} \sigma A \cos^2 \psi d\psi + \int_0^{2\pi} \Omega^2 \bar{Y} \sin(\psi + \theta) \cos \psi d\psi + \\ \int_0^{2\pi} -2\zeta(-A\Omega) \sin \psi \cos \psi d\psi + \int_0^{2\pi} (A \cos \psi - \gamma A^3 \cos^3 \psi) \cos \psi d\psi &= \\ \pi\sigma A + \pi\Omega^2 \bar{Y} \sin \theta + \pi \left(A - \frac{3}{4} \gamma A^3 \right). \end{aligned} \quad (24)$$

将式(23)和式(24)代入式(21)得

$$\begin{cases} A' = -\frac{\varepsilon}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma\bar{z}] \sin \psi d\psi = -\frac{\varepsilon}{2\Omega} (2\zeta A \Omega + \Omega^2 \bar{Y} \cos \theta), \\ \theta' = \frac{\varepsilon}{2\pi\Omega A} \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma\bar{z}] \cos \psi d\psi = \\ \left[\frac{\varepsilon}{2\Omega A} \left[\sigma A + \Omega^2 \bar{Y} \sin \theta + \left(A - \frac{3}{4} \gamma A^3 \right) \right] \right]. \end{cases} \quad (25)$$

当 $A \geq \bar{x}_d$ 时,令 $\cos \psi_0 = \bar{x}_d/A$. $|z| \geq \bar{x}_d, h(\bar{z}) = 0; |z| < \bar{x}_d, h(\bar{z}) = \gamma\bar{z}^3 - \bar{z}$,

$$g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) = \Omega^2 \bar{Y} \sin \Omega \bar{t} - 2\zeta \bar{z}' - h(\bar{z}) = \begin{cases} \Omega^2 \bar{Y} \sin \Omega \bar{t} - 2\zeta \bar{z}', \\ \Omega^2 \bar{Y} \sin \Omega \bar{t} - 2\zeta \bar{z}' - \gamma \bar{z}^3 + \bar{z}. \end{cases} \quad (26)$$

由平均法得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma \bar{z}] \sin \psi d\psi = \\ & \int_0^{2\pi} [\Omega^2 \bar{Y} \sin \Omega \bar{t} - 2\zeta \bar{z}' - h(\bar{z}) + \sigma \bar{z}] \sin \psi d\psi = \\ & \pi \Omega^2 \bar{Y} \cos \theta + 2\pi \zeta A \Omega + \int_0^{2\pi} -h(\bar{z}) \sin \psi d\psi = \\ & \pi \Omega^2 \bar{Y} \cos \theta + 2\pi \zeta A \Omega + \int_0^{\psi_0} 0 d\psi + \int_{\psi_0}^{\pi-\psi_0} (A \cos \psi - \gamma A^3 \cos^3 \psi) \sin \psi d\psi + \\ & \int_{\pi-\psi_0}^{\pi+\psi_0} 0 d\psi + \int_{\pi+\psi_0}^{2\pi-\psi_0} (A \cos \psi - \gamma A^3 \cos^3 \psi) \sin \psi d\psi + \int_{2\pi-\psi_0}^{2\pi} 0 d\psi = \\ & \pi \Omega^2 \bar{Y} \cos \theta + 2\pi \zeta A \Omega, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma \bar{z}] \cos \psi d\psi = \\ & \int_0^{2\pi} [\Omega^2 \bar{Y} \sin \Omega \bar{t} - 2\zeta \bar{z}' - h(\bar{z}) + \sigma \bar{z}] \cos \psi d\psi = \\ & \pi \sigma A + \pi \Omega^2 \bar{Y} \sin \theta + \int_0^{2\pi} -h(\bar{z}) \cos \psi d\psi = \\ & \pi \sigma A + \pi \Omega^2 \bar{Y} \sin \theta + \int_0^{\psi_0} 0 \cos \psi d\psi + \int_{\psi_0}^{\pi-\psi_0} (A \cos \psi - \gamma A^3 \cos^3 \psi) \cos \psi d\psi + \\ & \int_{\pi-\psi_0}^{\pi+\psi_0} 0 \cos \psi d\psi + \int_{\pi+\psi_0}^{2\pi-\psi_0} (A \cos \psi - \gamma A^3 \cos^3 \psi) \cos \psi d\psi + \int_{2\pi-\psi_0}^{2\pi} 0 \cos \psi d\psi = \\ & \pi \sigma A + \pi \Omega^2 \bar{Y} \sin \theta + A [(\pi - 2\psi_0) - \sin 2\psi_0] - \\ & \gamma A^3 \{ -\sin \psi_0 \cos^3 \psi_0 + 3/4 [(\pi - 2\psi_0) - \sin 2\psi_0] \} = \\ & \pi \sigma A + \pi \Omega^2 \bar{Y} \sin \theta + \left(A - \frac{3}{4} \gamma A^3 \right) \left[\pi - 2 \arccos \left(\frac{\bar{x}_d}{A} \right) \right] + \\ & \frac{\sqrt{A^2 - \bar{x}_d^2}}{A} \left(\gamma \bar{x}_d^3 + \frac{3\gamma A^3 - 4}{2} \bar{x}_d \right). \end{aligned} \quad (28)$$

将式(27)和式(28)代入式(21)得

$$\begin{cases} A' = \frac{\varepsilon}{-2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma \bar{z}] \sin \psi d\psi = \frac{\varepsilon}{-2\Omega} (2\zeta A \Omega + \Omega^2 \bar{Y} \cos \theta), \\ \theta' = \frac{\varepsilon}{2\pi\Omega A} \int_0^{2\pi} [g(\bar{z}, \bar{z}', \bar{t}) + \sigma \bar{z}] \cos \psi d\psi = \frac{\varepsilon}{2\Omega A} \left(\sigma A + \Omega^2 \bar{Y} \sin \theta + \frac{H_1}{\pi} \right), \end{cases} \quad (29)$$

其中

$$H_1 = \left(\gamma \bar{x}_d^3 + \frac{3\gamma A^2 - 4}{2} \bar{x}_d \right) \frac{\sqrt{A^2 - \bar{x}_d^2}}{A} + \left(A - \frac{3}{4} \gamma A^3 \right) \left[\pi - 2 \arccos \left(\frac{\bar{x}_d}{A} \right) \right]. \quad (30)$$

将式(25)、(29)和(30)代入方程(21)中可得

$$\begin{cases} A' = \frac{\varepsilon}{-2\Omega}(2\zeta A\Omega + \Omega^2 \bar{Y} \cos \theta), \\ \theta' = \frac{\varepsilon}{2\Omega A} \left(\sigma A + \Omega^2 \bar{Y} \sin \theta + \frac{H}{\pi} \right), \end{cases} \quad (31)$$

其中

$$H = \begin{cases} \pi \left(A - \frac{3}{4} \gamma A^3 \right), & A < \bar{x}_d, \\ \left(\gamma \bar{x}_d^3 + \frac{3\gamma A^2 - 4}{2} \bar{x}_d \right) \frac{\sqrt{A^2 - \bar{x}_d^2}}{A} + \left(A - \frac{3}{4} \gamma A^3 \right) \left[\pi - 2 \arccos \left(\frac{\bar{x}_d}{A} \right) \right], & A \geq \bar{x}_d. \end{cases} \quad (32)$$

将 $\sigma = (\Omega^2 - \Omega_0^2)/\varepsilon$ 和 $\varepsilon = 1$ 代入方程组(31)中,并令 $A' = 0$ 和 $\theta' = 0$,消去 θ 后,可得幅频关系:

$$\left[(\Omega^2 - 1)A + \frac{H}{\pi} \right]^2 + (2\zeta A\Omega)^2 = \Omega^4 \bar{Y}^2. \quad (33)$$

3 数值分析

上节用平均法得到了准零刚度隔振系统在基础激励下的振幅的一次近似解析解,其有效性可以通过式(12)和式(13)的数值解验证.取 $\bar{x}_d = 0.943$, $\bar{\delta}_{\text{QZS}} = 0.9$, $\bar{Y} = 0.5$, 和 $\zeta = 0.1$, 利用 Runge-Kutta(龙格-库塔)法求解动力学微分方程,得到各种激励频率下的响应,并与近似解析解进行对比.系统的幅频曲线如图4所示,其中,实线和虚线分别表示近似解析解的稳定解和不稳定解.符号“o”和“*”表示分别对动力学方程(12)和(13)进行扫频分析得到的数值解,点划线代表 $A = \bar{x}_d$.

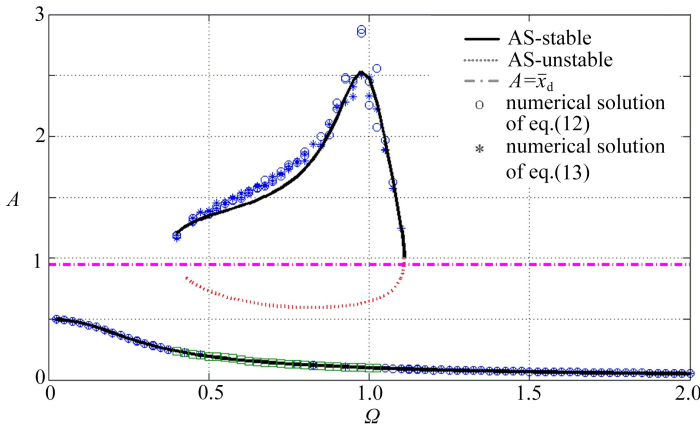


图4 准零刚度隔振系统的幅频响应曲线

Fig.4 Displacement amplitude-frequency responses of the QZS system

从图4中可以看出,精确动力学方程(12)的数值解与近似方程(13)的数值解几乎完全吻合.这是因为当位移幅值在下支时,幅值远远小于 \bar{x}_d , 回复力可用三次函数近似表示;当位移幅值在上支时,幅值大于 \bar{x}_d , 回复力的近似表达式与精确表达式完全一致.因此,简单的近似动力学模型(13)可有效地分析系统响应.更重要的是数值解与解析解也吻合得很好,尤其是当振幅

较小时,从而验证了平均法求解此类分段非线性问题的有效性。

扫频分析过程中发现 Ω 在 0.4 到 1.025 之间时原始方程的数值解与解析解的下支不能完全吻合,如图 4 中“□”所示,但这个频率区间内,初始值在 $(0,0)$ 附近取值时可以得到相应的数值解,由此判定在此频率区间解析解的下支是稳定解。

3.1 位移激励幅值和阻尼对幅频曲线的影响

当系统受不同幅值的基础激励时,幅频曲线如图 5 所示,其他参数取为 $\bar{x}_d = 0.943$, $\bar{\delta}_{QZS} = 0.9$, $\zeta = 0.1$ 。从图中可以看出,激励幅值对隔振系统的动力学特性具有决定性影响。当激励幅值较小时,如 $\bar{Y} = 0.2$,凸轮与滚轮始终保持接触,系统的回复力未表现出分段特性,幅频曲线仅有 1 支,未出现跳跃现象。当激励幅值适中时,如 $\bar{Y} = 0.3$ 或 $\bar{Y} = 0.7$,滚轮与凸轮出现脱离,幅频曲线呈现 3 支,出现了跳跃现象,动力学特性复杂。而进一步增大激励幅值时,如 $\bar{Y} = 1.2$,跳跃现象消失,幅频曲线仅有 1 支,且其形态趋向于线性系统。

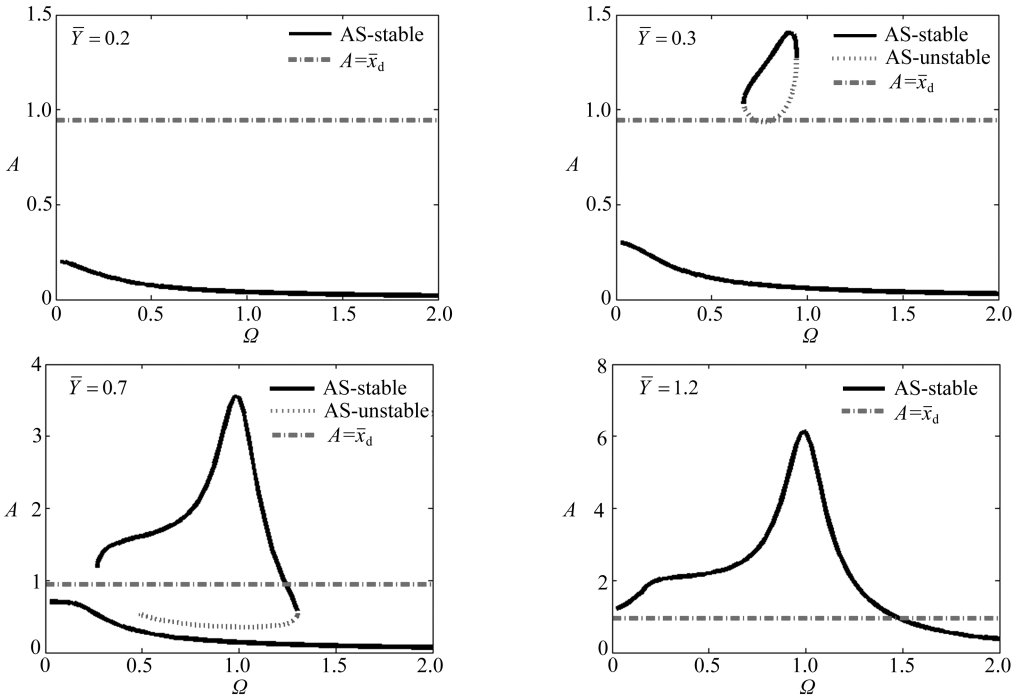


图 5 位移激励幅值对幅频曲线的影响

Fig.5 Effects of exciting displacement amplitude on $A-\Omega$ responses

当系统阻尼比取不同的值时,幅频曲线如图 6 所示,其他参数取为 $\bar{x}_d = 0.943$, $\bar{\delta}_{QZS} = 0.9$, $\bar{Y} = 0.5$ 。由图可知阻尼对系统响应也有显著影响。随着阻尼的增大,响应峰值减小,当阻尼比较大时,如 $\zeta = 0.3$ 时,共振支消失,跳跃现象消失,幅频曲线仅剩 1 支,且幅值均处于 \bar{x}_d 的下方,此时凸轮与滚轮始终保持接触。

3.2 位移传递率

将相对位移转换为绝对位移

$$\bar{x} = A \cos \psi + \bar{Y} \sin(\Omega \bar{t}) = \sqrt{(A + \bar{Y} \sin \theta)^2 + (\bar{Y} \cos \theta)^2} \sin(\psi + \varphi),$$

其中

$$\tan \varphi = \frac{A + \bar{Y} \sin \theta}{\bar{Y} \cos \theta}.$$

位移传递率可表示为

$$T = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{\sqrt{(A + \bar{Y} \sin \theta)^2 + (\bar{Y} \cos \theta)^2}}{\bar{Y}},$$

其中, $\sin \theta$ 可由方程(31) 中令 $\theta' = 0$ 求得.

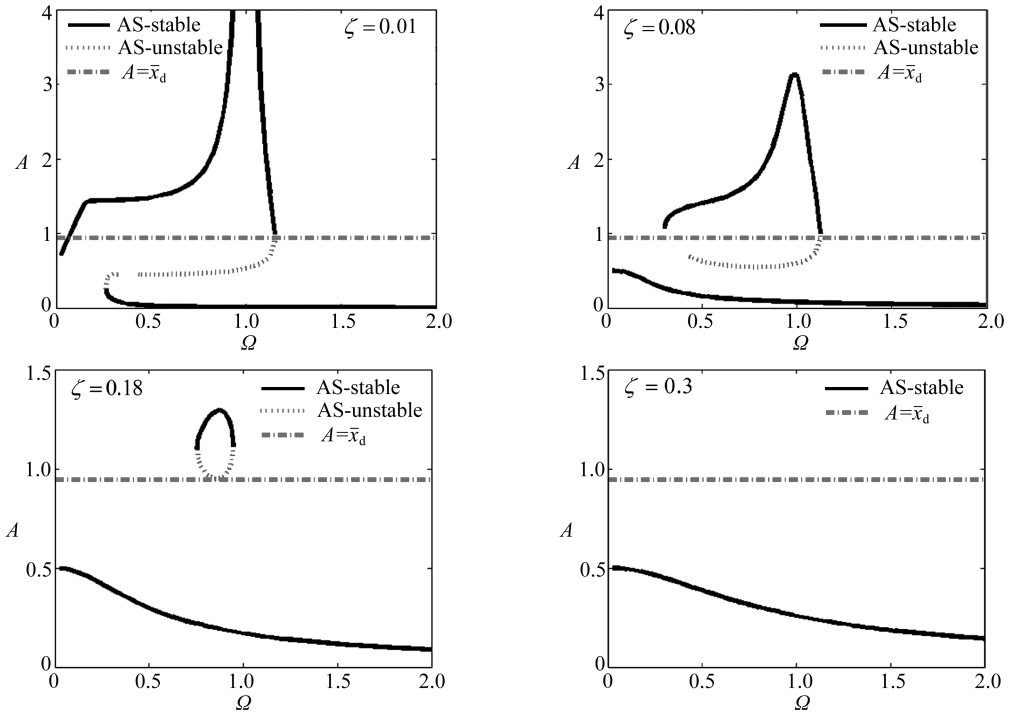


图6 阻尼对幅频响应的影响

Fig.6 Effects of damping on $A-\Omega$ responses

当 $\bar{Y} = 0.5, \zeta = 0.1, \bar{x}_d = 0.943, \bar{\delta}_{QZS} = 0.9$ 时, 准零刚度隔振系统的位移传递率如图7所示. 为体现其隔振性能优越性, 将其与相应的线性隔振系统进行对比. 需要强调的是, 相应的线性系统是指其刚度与准零隔振器的竖直弹簧一致, 其位移传递率如图7中点划线所示. 可以看出, 准零刚度隔振系统在 $\Omega = 1.1$ (向下跳跃频率) 开始有隔振效果, 而线性系统从 $\Omega = \sqrt{2}$ 才开始有隔振效果, 且准零刚度隔振系统开始隔振后的位移传递率都要比线性系统低.

位移激励幅值对位移传递率的影响如图8所示. 当激励幅值较小时, 如 $\bar{Y} = 0.2$, 准零刚度隔振系统的起始隔振频率趋于0, 且几乎在从0开始的整个频率范围内均优于线性系统, 尤其是低频阶段. 当激励幅值适中时, 如 $\bar{Y} = 0.3$ 和 $\bar{Y} = 0.5$, 准零刚度隔振系统的起始隔振频率(向下跳跃频率)比线性系统要低, 且位移传递率比线性系统小, 但这种优势会随着激励幅值的增大而减小. 当激励幅值继续增大时, 如 $\bar{Y} = 1$, 准零刚度隔振系统的隔振性能将与线性系统相当. 再继续增大激励幅值时, 如 $\bar{Y} = 1.5$, 准零刚度隔振系统的隔振性能并没有变得更差, 最多与线

性系统一致,而传统的准零刚度隔振系统^[3],向下跳跃频率随激励幅值增加而变大,导致其起始隔振频率超过线性系统,从而失去隔振优势.因此,带滚轮的准零刚度隔振器对于较小的位移激励具有良好的低频甚至超低频隔振性能.更重要的是,当激励幅值很大时,系统的隔振性能将与其相应的线性系统一致,且不会变得更差.

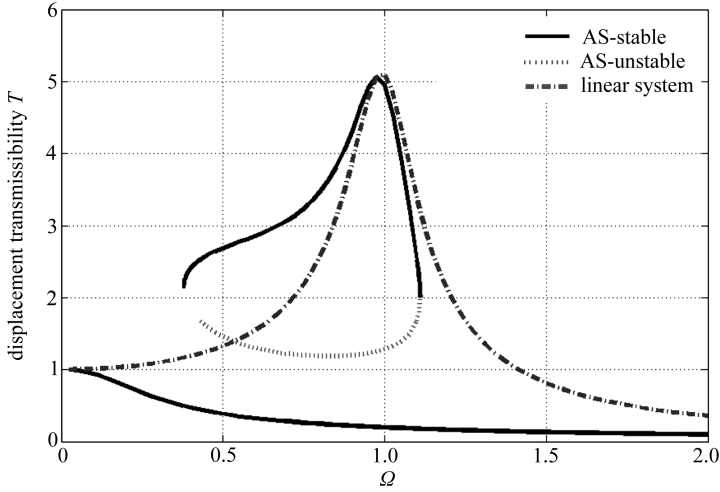


图7 准零刚度隔振系统的位移传递率及与线性系统的比较

Fig.7 Displacement transmissibility of the QZS vibration isolation system in comparison with the corresponding linear system

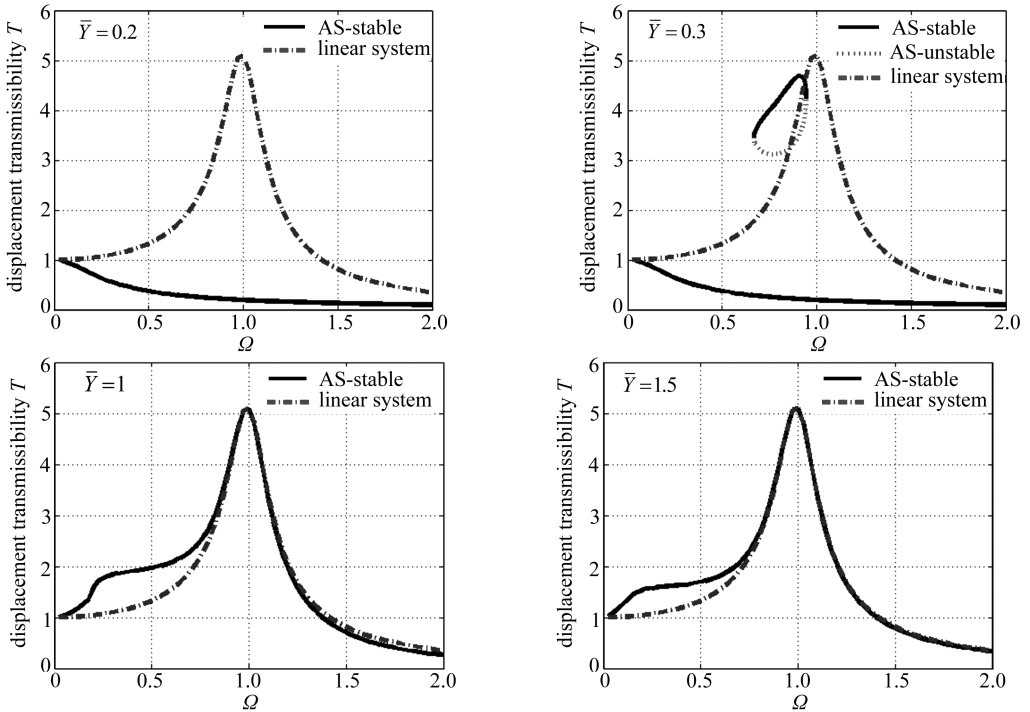


图8 激励幅值对传递率的影响

Fig.8 Effects of exciting displacement amplitude on displacement transmissibility

4 结 语

本文对一类具有分段非线性的准零刚度隔振系统进行了动力学建模,利用平均法进行了近似求解,揭示了带滚轮准零刚度隔振的非线性动力学特性以及隔振特性.对幅频曲线的分析表明,准零刚度隔振系统的阻尼和基础激励的幅值直接影响稳态响应的幅值和近似解析解的特征.对隔振系统的位移传递率分析表明,当激励幅值较小时,该准零刚度隔振器的隔振性能优于线性系统,且将隔振频率扩展至低频甚至是超低频.与传统准零刚度隔振器相比,最突出的优点在于,随着激励幅值增大,其隔振性能将与线性系统相当,且不会变得更差.

致谢 感谢湖南大学青年教师成长计划对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] Alabuzhev P, Gritchin A, Kim L, Migirenko G, Chon V, Stepanov P. *Vibration Protecting and Measuring System With Quasi-Zero Stiffness* [M]. New York: Hemisphere Publishing Co, Taylor & Francis Group, 1989.
- [2] Le T D, Ahn K K. A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(26): 6311-6335.
- [3] Carrella A, Brennan M J, Waters T P. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, **301**(3/5): 678-689.
- [4] Carrella A, Brennan M J, Kovacic I, Waters T P. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **322**(4/5): 707-717.
- [5] 张建卓,董申,李旦. 基于正负刚度并联的新型隔振系统研究[J]. 纳米技术与精密工程, 2004, **2**(4): 314-318. (ZHANG Jian-zhuo, DONG Shen, LI Dan. Study on new type vibration isolation system based on combined positive and negative stiffness[J]. *Nanotechnology and Precision Engineering*, 2004, **2**(4): 314-318. (in Chinese))
- [6] 刘兴天,黄修长,张志道,华宏星. 激励幅值及载荷对准零刚度隔振器特性的影响[J]. 机械工程学报, 2013, **49**(6): 89-94. (LIU Xing-tian, HUANG Xiu-chang, ZHANG Zhi-yi, HUA Hong-xing. Influence of excitation amplitude and load on the characteristics of quasi-zero stiffness isolator[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, **49**(6): 89-94. (in Chinese))
- [7] 彭献,黎大志, [陈树年]. 准零刚度隔振器及其弹性特性设计[J]. 振动、测试与诊断, 1997, **17**(4): 44-46. (PENG Xian, LI Da-zhi, [CHEN Shu-nian]. Quasi-zero stiffness vibration isolators and design for their elastic characteristics[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 1997, **17**(4): 44-46. (in Chinese))
- [8] 徐道临,赵智,周加喜. 气动可调式准零刚度隔振器设计及特性分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, **40**(6): 47-52. (XU Dao-lin, ZHAO Zhi, ZHOU Jia-xi. Design and analysis of an adjustable pneumatic vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic[J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2013, **40**(6): 47-52. (in Chinese))
- [9] XU Dao-lin, YU Qi-ping, ZHOU Jia-xi, Bishop S R. Theoretical and experimental analysis of a nonlinear magnetic vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(14): 3377-3389.

- [10] Nayfeh A H, Mook D T. *Nonlinear Oscillations* [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1995.

On Piecewise Nonlinear Dynamic Characteristics of a New-Type Quasi-Zero-Stiffness Vibration Isolator With Cam-Roller-Spring Mechanism

WANG Xin-long, ZHOU Jia-xi, XU Dao-lin

(College of Mechanical and Vehicle Engineering,
Hunan University, Changsha 410082, P.R.China)

(Recommended by DEGN Zi-cheng, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A piecewise nonlinear dynamic model for a new-type quasi-zero-stiffness (QZS) vibration isolation system with cam-roller-spring mechanism was developed. The dynamic characteristics of the QZS system under harmonic base motion were analyzed theoretically with the averaging method, and the primary resonance responses obtained. The analytical solution was verified by the numerical solution to the equation of motion, which confirmed the efficiency of the averaging method to solve the piecewise nonlinear problem. Further, the effects of exciting displacement amplitude and damping on the system responses were discussed. The displacement transmissibility was used to evaluate the performance of vibration isolation. The results show that the exciting displacement amplitude and damping notably influence the system response. When the exciting amplitude is relatively small, the QZS system outperforms the corresponding linear system obviously. The QZS system's performance goes down as the exciting amplitude increases, but stands no worse than that of the corresponding linear system. This feature of the new-type QZS vibration isolation system is superior to that of the traditional QZS ones.

Key words: quasi-zero stiffness; piecewise nonlinear; averaging method; vibration isolation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11102062;11272116)