

# Gauss 白噪声激励下分数阶导数系统的非平稳响应\*

李伟<sup>1</sup>, 赵俊锋<sup>2</sup>, 李瑞红<sup>1</sup>, N·特里索维奇<sup>3</sup>

(1. 西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071;

2. 西北工业大学 理学院 应用数学系, 西安 710072;

3. 贝尔格莱德大学 机械工程学院 力学系, 贝尔格莱德 11000, 塞尔维亚)

**摘要:** 研究了 Gauss(高斯)白噪声激励下具有分数阶导数阻尼的非线性随机动力系统的非平稳响应.应用等价线性化方法将非线性系统转化为等价的线性系统,之后采用随机平均法获得系统响应满足的 FPK(Fokker-Planck-Kolmogorov)方程,其中分数阶导数近似为一个周期函数.使用 Galerkin 方法求解 FPK 方程进而得到系统的近似非平稳响应.数值结果验证了方法的正确性和有效性.

**关键词:** 非平稳响应; 分数阶导数; 随机平均法; Galerkin 方法

**中图分类号:** O324 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.01.007

## 引言

上世纪 80 年代, Bagley 和 Torvik<sup>[1-2]</sup> 在一类高分子黏弹性材料建模中发现,应用分数阶导数来描述材料的频率依赖应力松弛问题要比传统的整数阶导数模型更为贴切,也更符合实际情况.这一发现随后在 Gaul 等<sup>[3]</sup> 和 Makris 等<sup>[4]</sup> 的实验中得到了证实.自此,将分数阶导数应用于黏弹性材料及其它复杂工程结构力学系统的建模开始受到关注.1997 年, Spanos 和 Zeldin<sup>[5]</sup> 用一种频域分析方法研究了具有 Grunwald-Letnikov 型分数阶导数阻尼的动力系统随机响应问题,开创了具有分数阶导数与噪声激励特征并存的动力系统研究先河.之后, Drozdov<sup>[6]</sup> 采用特征函数法并结合积分变换研究了 Gauss 白噪声激励下一个分数阶导数动力系统的渐近谱密度响应.2009 年, Huang(黄志龙)等<sup>[7]</sup> 将特殊的拟 Hamilton 系统随机平均法引入到具有分数阶导数的随机动力系统中,研究了一类拟 Hamilton 系统的平稳响应和稳定性问题.之后, Chen(陈林

\* 收稿日期: 2013-06-03; 修订日期: 2013-10-27

**基金项目:** 国家自然科学基金(11302157; 11202155); 中央高校基本科研业务费专项资金(K5051370008); 中国与塞尔维亚科技合作项目(2-14)

**作者简介:** 李伟(1977—),女,辽宁葫芦岛人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: liweilw@mail.xidian.edu.cn);

赵俊锋(1977—),男,河南洛阳人,讲师,博士(E-mail: zhaojf@nwpu.edu.cn);

李瑞红(1980—),女,山西晋中人,副教授,博士(E-mail: llylrh8077@126.com);

N. 特里索维奇(1963—),女,塞尔维亚贝尔格莱德人,教授,博士(E-mail: ntrisovic@mas.bg.ac.rs).

聪)等<sup>[8-9]</sup>、Hu(胡芳)等在文献[10]工作的基础上采用相同的方法,分别研究了谐和白噪声激励下具有分数阶导数的 Duffing 振子的分岔和首次穿越,以及有界噪声激励下具有分数阶导数的拟 Hamilton 系统的平稳响应.然而,由于分数阶导数自身理论上的局限性、噪声激励引发的随机性以及计算的复杂性,有关分数阶导数的随机动力系统非平稳响应研究的成果还不多见.其中,Spanos 等<sup>[11]</sup>采用 Newmark 算法并结合统计线性化方法研究了具有 Grunwald-Letnikov 定义分数阶导数的动力系统非平稳响应问题,首次对分数阶导数随机动力系统非平稳响应问题进行了研究.2012年,Paola 等<sup>[12]</sup>采用变量离散化法研究了平稳与非平稳噪声激励下具有 Caputo 型分数阶导数的线性系统响应问题,本文将以 Riemann-Liouville 型分数阶导数阻尼为特征的非线性系统为研究对象,采用随机平均法和 Galerkin 法对系统在 Gauss 白噪声激励下的平稳响应以及非平稳响应进行研究.

## 1 分数阶导数系统模型

### 1.1 等价线性化系统

考虑如下二阶微分动力系统,其运动方程为

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \varepsilon D^\alpha x(t) + \omega_0^2 x(t) + \varepsilon f(x(t), \dot{x}(t)) = \xi(t), \quad (1)$$

其中,  $x(t)$  (简记  $x$ ) 表示广义位移,  $\dot{x}(t)$  (简记  $\dot{x}$ ) 表示广义速度,  $\zeta$  与  $\omega_0$  均为常数,分别为系统的阻尼系数与自然角频率,  $D^\alpha x(t)$  为系统内在阻尼,这里采用 Riemann-Liouville 型分数阶导数定义,表达式为

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(t-\tau)}{\tau^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2)$$

其中,  $\alpha$  为实分数,  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数.  $f(x, \dot{x})$  是一非线性函数,  $\xi(t)$  则表示均值为 0、谱密度为常数  $S$  的 Gauss 白噪声激励.

引入广义谐和变换,将系统的位移-速度转化为具有慢变特征的振幅-相位,即令

$$x = a \cos \varphi = a \cos[w(a)t + \gamma], \quad (3)$$

$$\dot{x} = -a w \sin \varphi = -a w \sin[w(a)t + \gamma], \quad (4)$$

其中  $a \triangleq a(t)$ ,  $\gamma \triangleq \gamma(t)$  分别为慢变的振幅过程和相位过程,  $\varphi \triangleq \varphi(t)$ . 显然,对于任意的非线性函数,系统有效角频率  $w(a)$  一部分通过阻尼项、一部分通过恢复力影响系统的响应,故可将非线性函数  $f(x, \dot{x})$  分解为如下形式:

$$f(x, \dot{x}) = 2\omega_0 \zeta_e(a) \dot{x} + \omega_e^2(a) x, \quad (5)$$

其中  $\zeta_e(a)$  和  $\omega_e^2(a)$  可通过 Fourier 变换分别求出,即有

$$\zeta_e(a) = -\frac{1}{2w\omega_0\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a w \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad (6)$$

$$\omega_e^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi, -a w \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (7)$$

为方便起见,简记  $w(a) = w$ . 则系统(1)可转化为以下的等价线性化系统:

$$\ddot{x} + 2\omega_0(\zeta + \varepsilon \zeta_e(a)) \dot{x} + \varepsilon D^\alpha x(t) + (\omega_0^2 + \varepsilon \omega_e^2(a)) x = \xi(t), \quad (8)$$

其中  $w^2 = \omega_0^2 + \varepsilon \omega_e^2(a)$ .

将式(3)和(4)代入式(1)中,易得振幅过程满足的随机微分方程为

$$\dot{a} = -2a\omega_0(\zeta + \varepsilon \zeta_e) \sin^2 \varphi + \frac{\varepsilon \sin \varphi}{w} D^\alpha x(t) - \frac{\sin \varphi}{w} \xi(t). \quad (9)$$

显然求解此方程是获得系统响应的关键.然而,具有以上特征的随机微分方程通常情况下无法获得解析解,一般需要近似或数值求解.目前发展起来的预测系统响应的近似方法主要有随机平均法、级数展开法、Monte-Carlo 模拟法等.比较而言,随机平均法<sup>[13]</sup>是一种更为有效地处理随机微分方程的近似方法.一方面这种方法可使原系统降维,同时保持原系统的本质特征不变;另一方面,可使原来不是扩散过程的系统转化为扩散系统,从而可通过求解扩散过程的 FPK 方程得到原系统的响应特征.故以下采用随机平均法对方程(9)进行转化.

## 1.2 平均后的扩散方程

因振幅过程  $a(t)$  为慢变过程,故分数阶导数定义中的  $x(t - \tau)$  可展开为

$$x(t - \tau) \approx a(t) [\cos \varphi \cos w\tau + \sin \varphi \sin w\tau]. \quad (10)$$

借助以下积分结果<sup>[7]</sup>:

$$\int_0^t \frac{\cos w\tau}{\tau^\alpha} d\tau = w^{\alpha-1} \left[ \Gamma(1 - \alpha) \sin \frac{\pi\alpha}{2} + \frac{\sin wt}{(wt)^\alpha} + O\left(\frac{1}{(wt)^{\alpha+1}}\right) \right], \quad (11)$$

$$\int_0^t \frac{\sin w\tau}{\tau^\alpha} d\tau = w^{\alpha-1} \left[ \Gamma(1 - \alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\cos wt}{(wt)^\alpha} + O\left(\frac{1}{(wt)^{\alpha+1}}\right) \right], \quad (12)$$

则分数阶导数可近似为

$$\left\langle \frac{\varepsilon \sin \varphi}{w} D^\alpha x(t) \right\rangle_T \approx - \frac{\varepsilon \omega_0^2 w^{\alpha-3}}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2} a, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (13)$$

这里  $\langle \cdot \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\cdot) dt$ .

在此基础上,采用随机平均法,对方程(9)中各项进行平均,可得如下的平均扩散方程:

$$\dot{a} = - a \zeta \omega_0 - \varepsilon a \zeta_e \omega_0 - a \frac{\varepsilon \omega_0^2 w^{\alpha-3}}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2} + \zeta \omega_0 \frac{\sigma^2 \omega_0^2}{a w^2} + \sqrt{2 \zeta \omega_0 \sigma^2} \frac{\omega_0}{w} \eta(t), \quad (14)$$

其中  $\sigma^2 = \pi S / (2 \zeta \omega_0^3)$ ,  $\eta(t)$  是均值为 0、相关函数为 Delta 函数的 Gauss 过程.

## 2 FPK 方程及求解

### 2.1 FPK 方程

此时方程(14)为扩散过程,故可采用 FPK 方程法确定系统振幅响应的概率密度.控制系统响应的 FPK 方程具有如下形式:

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial a} \{ p(a, t) [M(a)] \} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left\{ N(a) \frac{\partial p(a, t)}{\partial a} \right\}, \quad (15)$$

其中

$$M(a) = - \zeta \omega_0 \left( a - \frac{\sigma^2 \omega_0^2}{a w^2} \right) - \varepsilon \omega_0 \zeta_e a - \frac{\varepsilon \omega_0^2 w^{\alpha-3}}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2} a, \quad (16)$$

$$N(a) = 2 \zeta \omega_0 \sigma^2 \frac{\omega_0^2}{w^2}. \quad (17)$$

这是一个抛物型偏微分方程,目前除了少数一维情形外,一般得不到精确非平稳解,但有可能得到它的精确平稳解.本文将致力于求精确平稳解和近似非平稳解.

### 2.2 精确平稳解

将原系统的线性部分与非线性部分进行分离,使得

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = \mathcal{F}_L[p(a, t)] + \mathcal{F}_{NL}[p(a, t)]. \quad (18)$$

相应地,线性算子  $\mathcal{F}_L(\cdot)$  和非线性算子  $\mathcal{F}_{NL}(\cdot)$  满足

$$\mathcal{F}_L(\cdot) = \zeta \omega_0 \frac{\partial}{\partial a} \left[ \left( a - \frac{\sigma^2}{a} \right) (\cdot) \right] + \zeta \omega_0 \sigma^2 \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial a^2}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{NL}(\cdot) = & \frac{\partial}{\partial a} \left[ \zeta \omega_0 \sigma^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{w^2} \right) \left( \frac{1}{a} - \frac{\partial}{\partial a} \right) (\cdot) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial a} [\varepsilon a \zeta_e \omega_0 (\cdot)] + \frac{\partial}{\partial a} \left[ \zeta \omega_0 \sigma^2 (\cdot) \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\omega_0^2}{w^2} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{a \omega_0^2 (\omega_0^2 + \varepsilon \omega_e^2)^{\alpha-3/2}}{2} \sin \frac{\pi \alpha}{2} (\cdot) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

令  $\partial p(a, t)/\partial t = 0$ , 则振幅响应的概率密度函数  $p_s(a)$  满足下面的二阶微分方程:

$$- \frac{d}{da} [M(a)p_s] + \frac{1}{4} \frac{d}{da} \left[ N(a) \frac{dp_s}{da} + \frac{d}{da} (N(a)p_s) \right] = 0. \quad (21)$$

由于  $M(a)$  和  $N(a)$  中均不显含时间  $t$ , 即方程(14)将是一个矢量时齐扩散过程, 故此时方程(21)为平稳 FPK 方程, 它的精确解就是精确平稳解, 满足如下表达式:

$$p_s(a) = \frac{C}{\sqrt{N(a)}} \exp \left[ 2 \int \frac{M(a)}{N(a)} da \right], \quad (22)$$

其中  $C$  为标准化参数.

### 2.3 非平稳响应

比较而言, FPK 方程的非平稳响应一般需要近似或数值求解. 已发展的方法主要有矩闭合法、函数级数法以及 Galerkin 法等. 这些方法的比较详见文献[14]. 其中, Galerkin 方法是一种将求解微分方程问题转化为求解线性方程组的数值分析方法. 这种方法通过选取有限多项的正交基函数进行叠加, 使得结果在求解域内及边界上的加权积分满足原方程, 从而可以确定一组易于求解的线性代数方程. 以下部分应用 Galerkin 方法求系统的非平稳响应.

先考虑系统的线性部分, 并将非线性部分视为对线性部分的摄动, 令  $\varepsilon = 0$ , 则方程(15)可改写为

$$\frac{\partial p(a, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \zeta \omega_0 \left( a - \frac{\sigma^2}{a} \right) p(a, t) \right] + \zeta \omega_0 \sigma^2 \frac{\partial^2 p(a, t)}{\partial a^2}. \quad (23)$$

相应地, 此方程的特征值  $\lambda_n$  和特征函数  $A_n(a)$  分别为

$$\lambda_n = 2\zeta \omega_0 n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

$$A_n(a) = \frac{1}{n!} \frac{a}{\sigma^2} \exp \left( -\frac{a^2}{2\sigma^2} \right) L_n \left( \frac{a^2}{2\sigma^2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (25)$$

其中  $L_n(\cdot)$  为  $n$  阶 Laguerre 多项式.

记线性部分满足方程(23)的解为  $p_L(a, t)$ , 可用特征函数表示为

$$p_L(a, t) = \sum_{n=0}^N e^{-\lambda_n t} A_n(a), \quad (26)$$

且满足

$$\frac{\partial p_L(a, t)}{\partial t} = \mathcal{F}_L[p_L(a, t)]. \quad (27)$$

基于方程(18), FPK 方程(15)的近似非平稳解  $\tilde{p}(a, t)$  按照摄动的思想可表示为线性解  $p_L(a, t)$  与一个未知函数之和,且此未知函数应与振幅  $a(t)$  和时间  $t$  均有关系,即令

$$\tilde{p}(a, t) = p_L(a, t) + f(a, t). \quad (28)$$

鉴于线性解的特征,可将此未知函数表示为特征函数  $A_n(a)$  与时间  $t$  函数的级数.即

$$f(a, t) = \sum_{n=0}^N y_n(t) A_n(a), \quad (29)$$

其中  $y_n(t)$  待定,  $N$  为正整数.记  $\mathbf{Y}(t) = [y_0(t), y_1(t), \dots, y_N(t)]^T$ , 并将式(28)、(29)代入到式(18), 得误差函数, 记为  $\Delta r[a, \mathbf{Y}(t)]$ , 则有

$$\Delta r[a, \mathbf{Y}(t)] = \frac{\partial \tilde{p}(a, t)}{\partial t} - \mathcal{F}_L[\tilde{p}(a, t)] - \mathcal{F}_{NL}[\tilde{p}(a, t)]. \quad (30)$$

显然,若误差函数  $\Delta r[a, \mathbf{Y}(t)]$  为0, 则近似解  $\tilde{p}(a, t)$  完全等价于精确解  $p(a, t)$ . 但通常这是无法实现的, 可以实现的只能是使误差函数尽可能地小, 为此, 选择具有正交性的特征函数为权重函数, 使得误差函数在这组独立权重函数上的投影为0. 即令

$$\int_0^\infty \frac{A_j(a)}{A_0(a)} \Delta r[a, \mathbf{Y}(t)] da = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (31)$$

将式(30)代入到式(31), 得如下微分方程:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}(t). \quad (32)$$

这是一个线性微分方程组, 其中  $\mathbf{C}$  为  $(N+1) \times (N+1)$  阶矩阵,  $\mathbf{F}(t)$  是  $(N+1)$  维向量, 元素可通过下列表达式分别求得:

$$\mathbf{C} = -\lambda_j \delta_{jn} + \int_0^\infty \frac{A_j(a)}{A_0(a)} \mathcal{F}_{NL}[A_n(a)] da, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (33)$$

$$\mathbf{F}_j(t) = \int_0^\infty \frac{A_j(a)}{A_0(a)} \mathcal{F}_{NL}[p_L(a, t)] da, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (34)$$

求解方程(32), 则振幅过程的近似非平稳概率密度响应就可完全确定.

### 3 数值算例

以非线性 Van der Pol 振子为例, 系统(1)中的非线性函数可表示为

$$f(x, \dot{x}) = 2\zeta\omega_0(c_1 + c_2x^2)\dot{x}. \quad (35)$$

按照以上步骤, 可得精确平稳解为

$$p_s(a) = \frac{C}{\sqrt{2\zeta\omega_0\sigma^2}} \exp\left[2\left(-\frac{1}{4\sigma^2}a^2 + \frac{1}{2}\ln a - \frac{\varepsilon u}{8\zeta\omega_0\sigma^2}a^2 - \frac{\varepsilon\rho}{64\zeta\omega_0\sigma^2}a^4 - \frac{\varepsilon\omega_0^{\alpha-2}}{4\zeta\sigma^2}\sin\frac{\pi\alpha}{2}a^2\right)\right]. \quad (36)$$

对于非平稳概率密度响应, 应用 Galerkin 方法, 可得相应的数值结果. 分别取参数  $\zeta = 0.04$ ,  $\omega_0 = 2$  rad/s,  $\varepsilon = 0.75$ ,  $c_1 = -8/3$ ,  $c_2 = 64\pi/55$ ,  $\alpha = 1/10$ ,  $S = 0.55$  m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>. 图1给出了式(29)中待定函数  $y_n(t)$  随时间  $t$  演变的图形, 这里级数截断项  $N = 5$ .

可以看出:  $y_0(t) = 0$ , 此时系统响应没有摄动项, 对应的解完全是线性部分解. 当  $n \neq 0$  时, 系统响应是具有非线性特征的非平稳响应.  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  两条函数曲线随时间呈现递减, 且  $y_1(t)$  递减速度很快,  $y_2(t)$  递减一段时间后趋于平稳; 其它3个待定函数随时间在相对长的时间内为缓慢递增函数. 图2给出了分别应用 Galerkin 方法与 Monte-Carlo 模拟(MC simulation)

方法得到的振幅过程在不同时刻的近似非平稳概率密度函数解  $\tilde{p}(a, t)$ , 这里  $N = 12$ . 显然, 在较短时间内, 概率密度解  $\tilde{p}(a, t)$  的峰值较大. 随着时间的延长, 概率密度解的峰值大小以及中心位置都有所改变. 当时间达到 15 s 及以上时, 概率密度曲线特征无明显变化, 趋于平稳. 最重要的是, 理论结果与模拟结果一致. 为了进一步验证 Galerkin 方法的有效性, 图 3 给出了近似非平稳概率密度解  $\tilde{p}(a, t)$  在达到稳态时 ( $t = 100$  s)、精确平稳解  $p_s(a)$  以及 Monte-Carlo 模拟 3 种方式下的解的比较.

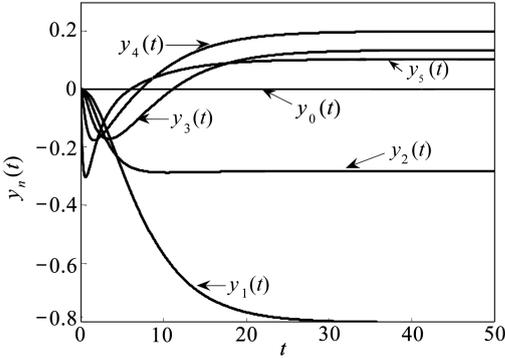


图 1 待定函数  $y_n(t)$  随时间的演化  
Fig.1 Evolution of undetermined function  $y_n(t)$  with time

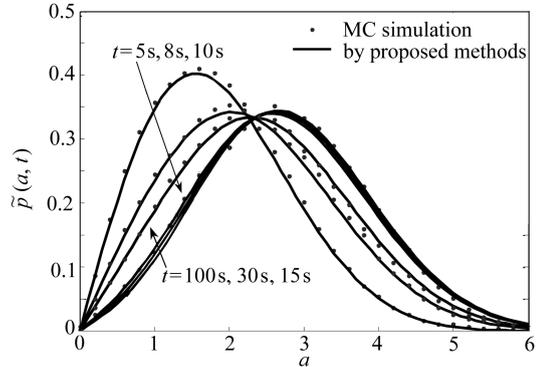


图 2 振幅响应的近似非平稳概率密度  
Fig.2 Approximate non-stationary PDF of the amplitude response

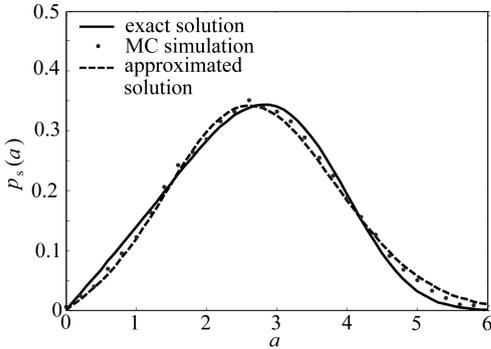


图 3 振幅响应的平稳概率密度  
Fig.3 Stationary PDF of the amplitude response

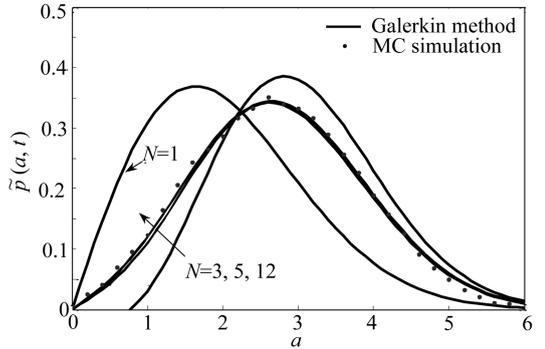


图 4  $N$  取不同值时对结果的影响  
Fig.4 Influence of different values  $N$  on the stationary PDF results

可以看出, 应用 Galerkin 方法得到的非平稳解在稳态时与精确平稳解基本吻合, 这一结果与 Monte-Carlo 模拟的结果也基本一致, 进而验证了 Galerkin 方法的有效性和正确性. 图 4 进一步检验了在  $t = 150$  s 时截断项  $N$  对结果的影响. 显然, 当级数只取两项, 即  $N = 1$  时近似结果偏差很大, 随着  $N$  值的增加近似效果越好. 图中  $N = 5$  与  $N = 12$  几乎无差别, 说明当  $N \geq 5$  时就可达到理想的近似效果.

## 4 总 结

使用随机平均法将 Gauss 白噪声激励下具有分数阶导数阻尼的非线性动力系统转化为扩散系统, 并结合 Galerkin 法得到了系统振幅随时间演变的非平稳概率密度响应. 数值模拟结果表明: 选择 FPK 方程的特征函数作为权重函数后, 只需有限的级数截断项就可得到较好的非

平稳响应,并且非平稳响应在稳态时与精确平稳解、Monte-Carlo 模拟结果相吻合,验证了方法的正确性以及计算的精度。

### 参考文献(References):

- [1] Bagley R L, Torvik P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. *Journal of Rheology*, 1983, **27**(3): 201-210.
- [2] Bagley R L, Torvik P J. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structure[J]. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1985, **23**(6): 918-925.
- [3] Gaul L, Klein P, Kemple S. Impulse response function of an oscillator with fractional derivative in damping description[J]. *Mechanics Research Communications*, 1989, **16**(5): 297-305.
- [4] Makris N, Constaninou M C. Spring-viscous damper systems for combined seismic and vibration isolation[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1992, **21**(8): 649-664.
- [5] Spanos P D, Zeldin B A. Random vibration of system with frequency-dependent parameters or fractional derivatives[J]. *Journal Engineering Mechanics*, 1997, **123**(3): 290-292.
- [6] Drozdov D. Fractional oscillator driven by a Gaussian noise[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Application*, 2007, **376**(15): 237-245.
- [7] Huang Z L, Jin X L. Response and stability of a SDOF strongly nonlinear stochastic system with light damping modeled by a fractional derivative[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **319**(3/5): 1121-1135.
- [8] Chen L C, Zhu W Q. First passage failure of SDOF nonlinear oscillator with lightly fractional derivative damping under real noise excitation [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, **26**(2): 208-214.
- [9] Chen L C, Zhu W Q. Stochastic jump and bifurcation of Duffing oscillator with fractional derivative damping under combined harmonic and white noise excitations [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, **46**(10): 1324-1329.
- [10] Hu F, Chen L C, Zhu W Q. Stationary response of strongly non-linear oscillator with fractional derivative damping under bounded noise excitation[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, **47**(10): 1081-1087.
- [11] Spanos P D, Evangelatos G I. Response of a non-linear system with restoring force governed by fractional derivatives—time domain simulation and statistical linearization solution[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2010, **30**(9): 811-821.
- [12] Paola M D, Failla G, Pirrotta A. Stationary and non-stationary stochastic response of linear fractional viscoelastic systems[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, **28**: 85-90.
- [13] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制——Hamilton 理论系统框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (ZHU Wei-qiu. *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control: Hamilton Theory System Frame* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))
- [14] 欧阳怡, 缪经良, 庄表中. 非线性系统随机振动分析方法的若干问题[J]. 振动工程学报, 1988, **1**(3): 68-75. (OUYANG Yi, MIAO Jing-liang, ZHUANG Biao-zhong. Some problem of non-linear random vibration analysis[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1988, **1**(3): 68-75. (in Chinese))

# Non-Stationary Response of a Stochastic System With Fractional Derivative Damping Under Gaussian White-Noise Excitation

LI Wei<sup>1</sup>, ZHAO Jun-feng<sup>2</sup>, LI Rui-hong<sup>1</sup>, Natasa Trisovic<sup>3</sup>

(1. *School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, P.R.China;*

2. *Department of Applied Mathematics, School of Natural and Applied Sciences, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;*

3. *Department of Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Kraljice Marije 16, Belgrade 11000, Serbia)*

**Abstract:** Non-stationary response of a nonlinear stochastically dynamical system with fractional derivative damping under Gaussian white-noise excitation was investigated. Based on the equivalent linearization method, the original nonlinear system was converted to a linear system with respect to the vibration amplitude and phase, then the stochastic averaging method was applied to obtain the FPK equation, in which the fractional derivative was approximated by a periodic function. The approximate non-stationary response of the FPK equation was derived with Galerkin method. Numerical results verify the efficiency and correction of the proposed method.

**Key words:** non-stationary response; fractional derivative; stochastic averaging method; Galerkin method

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11302157;11202155)