

# Lagrange 非结构网格高阶交错型 守恒气体动力学格式\*

葛全文

(应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

**摘要:** 提出 Lagrange(拉格朗日)非结构网格高阶交错型守恒气体动力学格式.用产生于当前时刻子网格密度和网格声速的子网格压力和 MUSCL 方法构造了高阶子网格力,利用高阶子网格力构造了高阶空间通量,借助时间中点通量的 Taylor(泰勒)展开完成了高阶时间通量离散.研制了 Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒气体动力学格式.对 Saltzman 活塞问题等进行了数值模拟,数值结果显示了 Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒气体动力学格式的有效性和精确性.

**关键词:** 高阶子网格力; Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒格式; Lagrange 非结构网格高阶交错型格式; 高阶分片压力

**中图分类号:** O354      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.01.010

## 引 言

拉氏流体力学计算失败的根源是 Lagrangian 质量的假定不正确,以前网格拓扑预先破裂,这导致计算精度下降和计算停止.作者关心的网格变形分为两类:第一类是小空间步长的网格呈现整体网格变形的沙漏畸变<sup>[1]</sup>,沙漏畸变的原因<sup>[2]</sup>是二维和三维里的四边形、六面体关于它们格点的自由度是欠定的<sup>[3-4]</sup>;第二类是大空间步长的网格扭曲,Dukowicz 和 Meltz<sup>[4]</sup>称之为虚假涡旋,Browne 和 Wallick<sup>[1]</sup>称之为长细网格问题.虽然这些数值计算的困难在计算中经常出现,但仅用在二维里以不同的长宽比倾斜的网格去解已经知道一维解的问题才确定出来.解的梯度与网格错误相连,出现了已知解完全没有的虚假涡旋.已经设计攻击虚假涡旋和沙漏畸变的多种算法<sup>[1,5]</sup>,Caramana 和 Shashkov 等<sup>[6-7]</sup>作了许多完善,改进了交错离散的精度和有效性.相容交错离散以严密的论证<sup>[8]</sup>导出了总能量守恒格式.Caramana 和 Shashkov<sup>[9]</sup>推广子网格质量为 Lagrangian 质量引入子网格压力方法,提高了交错离散数值计算的有效性,葛全文<sup>[10]</sup>把子网格压力方法推广到中心型守恒格式获得期望的效果.本文的目的是提出 Lagrange 高阶交错型守恒气体动力学格式,初始网格密度乘以初始子网格体积得到子网格质量,子网格质量除以当前时刻的子网格体积得到当前时刻的子网格密度.用产生于当前时刻子网格密度和当前时刻的网格声速的子网格压力构造了子网格力,用 MUSCL 方法构造了高阶子网格力,

\* 收稿日期: 2013-07-18; 修订日期: 2013-10-11

基金项目: 国家自然科学基金(11172050; 11372051; 11001027)

作者简介: 葛全文(1960—),男,吉林人,副研究员,博士(Tel: +86-10-59872160; E-mail: ge.quanwen@iapcm.ac.cn).

用高阶子网格力构造了高阶空间通量,借助时间中点通量的 Taylor 展开完成了高阶时间离散.余下部分的结构如下:第 1 节为预备概念;第 2 节构造 Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒格式;第 3 节为数值结果;第 4 节给出结论和展望.

## 1 预备概念

### 1.1 拉氏流体力学方程

设  $D$  是  $R^2$  空间的开子集,充满无粘理想流体,  $(O, X, Y)$  是  $R^2$  空间的直角坐标系,  $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$  是标准正交基,定义单位向量  $\mathbf{e}_Z = \mathbf{e}_X \times \mathbf{e}_Y$ .拉氏流体力学方程组:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV - \int_{S(t)} \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} dS = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{U} dV + \int_{S(t)} P \mathbf{N} dS = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho E dV + \int_{S(t)} P \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} dS = 0. \quad (4)$$

这里  $d/dt$  表示拉氏时间导数;  $V(t)$  是运动控制体;  $S(t)$  是  $V(t)$  的边界;  $\tau = 1/\rho$ ,  $\mathbf{U} = (u, v)^T$ ,  $P$ ,  $E$  分别为比容、速度、压力、总能;  $\mathbf{N}$  表示边界  $S(t)$  的单位外法向量,式(1)、(3)和(4)分别表示质量、动量、总能守恒律;式(2)表示几何守恒律,它等价于运动方程:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}, \quad (5)$$

$\mathbf{X}$  表示  $t > 0$  时运动控制体的格点坐标,  $\mathbf{x}$  表示  $t = 0$  时运动控制体的格点坐标.状态方程

$$P = P(\rho, \varepsilon), \quad (6)$$

这里  $\varepsilon$  表示内能,  $\varepsilon = E - \|\mathbf{U}\|^2/2$ .

### 1.2 符号和假定

物理区域  $V(0)$  划分为多边形网格  $\Omega_c$ ,  $c = 1, 2, \dots, I$ ,  $c$  是指标同时表示网格中心坐标,  $I$  是总网格数, 网格  $\Omega_c$  的格点  $p$  的集合为  $p(c)$ , 格点以逆时针排序, 网格  $\Omega_c$  的格点是周期的, 即  $p_{p(c)+1} = p_1, p_0 = p_{p(c)}$ . 格点  $p$  的邻域网格  $\Omega_c$  集合为  $c(p)$ , 网格以逆时针排序, 网格  $\Omega_c$  也是周期的, 即  $\Omega_{c(p)+1} = \Omega_1$ . 图 1 中  $L_{\bar{p}}^c$  和  $L_{\underline{p}}^c$  分别是边  $[p, p^+]$  和  $[p, p^-]$  大小的二分之一,  $\mathbf{N}_{\bar{p}}^c$  和  $\mathbf{N}_{\underline{p}}^c$  分别是边  $[p, p^+]$  和  $[p, p^-]$  单位外法向.

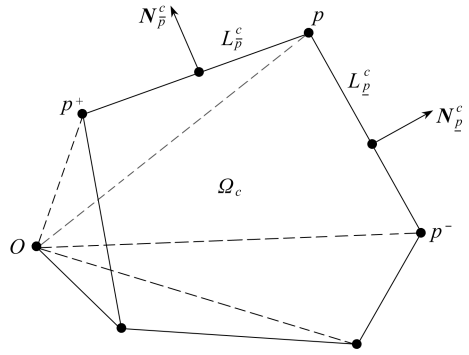


图 1 五边形网格  $\Omega_c$  的三角形剖分

Fig.1 Triangular subdivisions of pentagonal cell  $\Omega_c$

## 2 空间守恒离散

本文的目的是提出 Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒气体动力学格式,研究任意形状的空间网格,对构造的差分格式、坐标位置和速度定义在格点上,压力、密度和内能定义在网格内.

## 2.1 几何守恒律的相容离散

在网格  $\Omega_c$  上方程(2)写为

$$\frac{dV_c}{dt} = \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{U}_c \cdot \mathbf{N} ds, \quad (7)$$

这里  $\partial\Omega_c$  是网格  $\Omega_c$  的边界,  $\mathbf{N}$  是网格  $\Omega_c$  边界单位外法向,  $s$  是网格  $\Omega_c$  边界的大小, 引入离散散度算子  $\nabla \cdot \mathbf{U}_c$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_c = \frac{1}{V_c} \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{U}_c \cdot \mathbf{N} ds. \quad (8)$$

网格  $\Omega_c$  的体积  $V_c$  是格点坐标  $\mathbf{X}_p$  的函数, 要计算体积  $V_c$ , 先进行网格  $\Omega_c$  的三角分解(如图 1 所示):

$$V_c = \frac{1}{2} \sum_{p \in p(c)} (\mathbf{X}_p \times \mathbf{X}_{p^+}) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (9)$$

关于时间求导, 得

$$\frac{dV_c}{dt} = \sum_{p \in p(c)} L_{pc,n} \mathbf{N}_{pc,n} \cdot \mathbf{U}_{p,n}, \quad (10)$$

其中

$$L_{pc,n} \mathbf{N}_{pc,n} = L_{\bar{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},n}^c + L_{\underline{p},n}^c \mathbf{N}_{\underline{p},n}^c,$$

这里,  $n$  表示当前时刻.

结合前面的结果, 得

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_{c,n} = \frac{1}{V_{c,n}} \sum_{p \in p(c)} L_{pc,n} \mathbf{N}_{pc,n} \cdot \mathbf{U}_{p,n}. \quad (11)$$

## 2.2 动量通量和内能通量的相容离散

考虑总能量守恒, 动量方程、内能方程的相容离散<sup>[8]</sup>. 图 2 显示格点  $p$  周围的一组网格  $\Omega_c$ . 忽略边界力做功, 总能量守恒可以写成:

$$\sum_c m_c \varepsilon_c + \sum_p m_p \frac{U_p^2}{2} = 0, \quad (12)$$

这里  $\varepsilon$  是网格的内能,  $m_c$  是网格的质量,  $m_p$  是格点的质量, 内能和动能分别定义在网格和格点. 取时间导数:

$$\sum_c m_c \frac{d}{dt} \varepsilon_c + \sum_p m_p U_p \frac{d}{dt} U_p = 0. \quad (13)$$

本文已经认为网格和格点质量是常数, 关于点  $p$  动量方程离散为

$$m_p \frac{d}{dt} \mathbf{U}_p = \sum_{c=1}^{c(p)} \mathbf{f}_p^c. \quad (14)$$

在这个方程定义新的量  $f_p^c$  称为子网格力, 这个力来自网格  $\Omega_c$  作用于格点  $p$ . 子网格力用两个指标定义: 一个是它构造的网格  $\Omega_c$ , 一个是它作用的格点  $p$ . 然而子网格力明显的函数形式, 还没有定义.

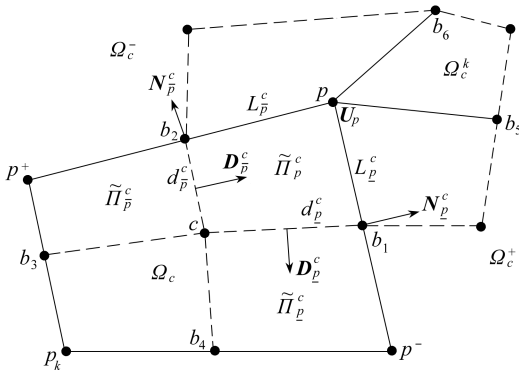


图 2 格点  $p$  周围的一组网格  $\Omega_c$  压力

Fig.2 Pressures on the set of cells  $\Omega_c$  around vertex  $p$

$$\sum_c m_c \frac{d}{dt} \varepsilon_c + \sum_p \mathbf{U}_p \sum_{c=1}^{c(p)} f_p^c = 0, \quad (15)$$

交换求和次序得到

$$m_c \frac{d}{dt} \varepsilon_c + \sum_{p=1}^{p(c)} \mathbf{U}_p f_p^c = 0. \quad (16)$$

相容离散的核心内容:子网格力 $f_p^c$ 引起从格点 $p$ 到网格 $\Omega_c$ 的动能交换率是子网格力与格点速度的点积.网格 $\Omega_c$ 的内能变化率等于网格 $\Omega_c$ 的所有格点动能交换率之和.

### 2.3 动量通量的计算

定义网格内分片常数压力.尽管这个论证是根据二维四边形进行的,但所有的论证适用于任何维数任意形状的网格.图3显示四边形网格 $\Omega_c$ ,格点 $p, p^+, p_k, p^-$ ,边界中点 $b_1, b_2, b_3, b_4$ .用边界中点和格点与中心点的连线把网格 $\Omega_c$ 划分为4个四边形子网格 $cb_1pb_2, cb_2p^+b_3, cb_3pkb_4, cb_4p^-b_1$ .用网格 $\Omega_c$ 的初始密度 $\rho_{c,0}$ 及初始格点坐标 $(X_{p,0}, Y_{p,0})$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ , 计算每一子网格的质量 $\tilde{m}_p^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ .在时刻 $t = t_n$ , 知道基本子网格质量 $\tilde{m}_p^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ , 压力 $P_{c,n}$ , 格点坐标 $(X_{p,n}, Y_{p,n})$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ , 计算四边形子网格体积 $\tilde{V}_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ .密度 $\tilde{\rho}_{p,n}^c = \tilde{m}_p^c / \tilde{V}_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ .用 $\tilde{\Pi}_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ 表示四边形子网格 $cb_1pb_2, cb_2p^+b_3, cb_3pkb_4, cb_4p^-b_1$ 里的压力, 网格 $\Omega_c$ 的压力表示为四边形子网格的分片常数压力 $\tilde{\Pi}_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ :

$$\tilde{\Pi}_{p,n}^c = a_{c,n}^2 (\tilde{\rho}_{p,n}^c - \rho_{c,n}) + P_{c,n}, \quad p = 1, 2, \dots, p(c). \quad (17)$$

定义网格内高阶分片压力<sup>[11]</sup>,  $H_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ :

$$H_{p,n}^c = \tilde{\Pi}_{p,n}^c + \nabla \tilde{\Pi}_{p,n}^c, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \quad (18)$$

$$\nabla \tilde{\Pi}_{p,n}^c = \frac{a_{c,n} \Delta t (X_{p,n}^c - X_{c,n})}{p(c)} \sum_{p \in p(c)} \sum_{c \in c(p)} \frac{1}{\tilde{V}_{p,n}^c} L_{pc,n} N_{pc,n} \tilde{\Pi}_{p,n}^c, \quad p = 1, 2, \dots, p(c). \quad (19)$$

这里 $a_{c,n}$ 是网格 $\Omega_c$ 的声速, $\Delta t$ 为时间步长.沿着四边形子网格的边界,这些高阶分片压力产生的力能够计算.引入力 $\tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c$ ,这个力称为相关网格 $\Omega_c$ 和格点 $p$ 的高阶子网格力:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c = \frac{1}{2} [L_{\varrho,n}^c (\tilde{H}_{\varrho,n}^c + \tilde{H}_{p,n}^c) \mathbf{N}_{\varrho,n}^c + L_{\bar{p},n}^c (\tilde{H}_{p,n}^c + \tilde{H}_{\bar{p},n}^c) \mathbf{N}_{\bar{p},n}^c + d_{\varrho,n}^c \mathbf{D}_{\varrho,n}^c (\tilde{H}_{p,n}^c - \tilde{H}_{\varrho,n}^c) + d_{\bar{p},n}^c \mathbf{D}_{\bar{p},n}^c (\tilde{H}_{\bar{p},n}^c - \tilde{H}_{p,n}^c)], \quad (20)$$

其中, $d_{\varrho,n}^c$ 和 $\mathbf{D}_{\varrho,n}^c$ 分别是四边形子网格 $cb_2p^+b_3$ 边 $cb_2$ 的大小和单位外法向, $d_{\bar{p},n}^c$ 和 $\mathbf{D}_{\bar{p},n}^c$ 分别是四边形子网格 $cb_1pb_2$ 边 $cb_1$ 的大小和单位外法向.用相关格点 $p$ 的所有高阶子网格力离散动量方程(3):

$$m_p \frac{d}{dt} \mathbf{U}_p + \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c = \mathbf{0}. \quad (21)$$

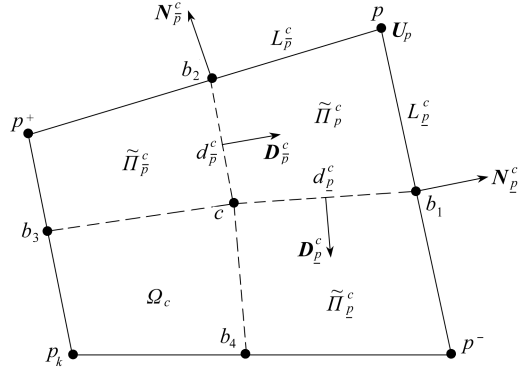


图3 网格 $\Omega_c$ 的分片压力

Fig.3 Piecewise pressures on the subcells of cell  $\Omega_c$

## 2.4 能量通量的计算

用相关网格  $\Omega_c$  的所有高阶子网格力离散内能方程 (16),

$$m_c \frac{d}{dt} \varepsilon_c = - \sum_{p=1}^{p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c \cdot \mathbf{U}_{p,n}. \quad (22)$$

## 2.5 二阶时间离散

提出基于时间中点通量的 Taylor 展开设计的二阶时间离散格式. 所有的物理变量在当前时刻都是已知的, 新时刻物理量由下列方程得到

$$\left\{ \begin{array}{l} m_c (\tau_{c,n+1} - \tau_{c,n}) = \Delta t \sum_{p \in p(c)} L_{pc,n+1/2} \mathbf{N}_{pc,n+1/2} \mathbf{U}_{p,n+1/2}, \\ m_p (\mathbf{U}_{p,n+1} - \mathbf{U}_{p,n}) + \Delta t \sum_{c \in c(p)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n+1/2}^c = \mathbf{0}, \\ m_c (\varepsilon_{c,n+1} - \varepsilon_{c,n}) + \Delta t \sum_{p \in p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n+1/2}^c \mathbf{U}_{p,n+1/2} = 0, \\ \mathbf{X}_{p,n+1} = \mathbf{X}_{p,n} + \Delta t \mathbf{U}_{p,n+1/2}, \mathbf{X}_{p,0} = \mathbf{x}_p, \\ \mathbf{U}_{p,n+1/2} = \mathbf{U}_{p,n} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{U}_{p,n}, \\ \tilde{\mathbf{F}}_{p,n+1/2}^c = \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c + \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c, \\ L_{pc,n+1/2} \mathbf{N}_{pc,n+1/2} = L_{pc,n} \mathbf{N}_{pc,n} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} L_{pc,n} \mathbf{N}_{pc,n}. \end{array} \right. \quad (23)$$

## 2.6 格点速度和高阶子网格力的时间导数

用链式规则, 直接对高阶子网格力 (式 (20)) 求导

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [L_{\rho,n}^c (\tilde{H}_{\rho,n}^c + \tilde{H}_{p,n}^c) \mathbf{N}_{\rho,n}^c + L_{p,n}^c (\tilde{H}_{p,n}^c + \tilde{H}_{\rho,n}^c) \mathbf{N}_{p,n}^c + \\ & d_{\rho,n}^c \mathbf{D}_{\rho,n}^c (\tilde{H}_{p,n}^c - \tilde{H}_{\rho,n}^c) + d_{p,n}^c \mathbf{D}_{p,n}^c (\tilde{H}_{\rho,n}^c - \tilde{H}_{p,n}^c)]. \end{aligned} \quad (24)$$

用非守恒形式气动力学方程计算网格压力的时间导数  $dP_{c,n}/dt$ .

$$\frac{d}{dt} P_{c,n} = - \rho_{c,n} a_{c,n}^2 \nabla \cdot \mathbf{U}_{c,n}. \quad (25)$$

格点速度的时间导数由方程 (21) 解出

$$\frac{d}{dt} \mathbf{U}_p = - \frac{1}{m_p} \sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c. \quad (26)$$

## 2.7 动量守恒

忽略边界力做功, 所有格点动量求和:

$$\sum_p m_p (\mathbf{U}_{p,n+1} - \mathbf{U}_{p,n}) = - \Delta t \sum_p \sum_{c \in c(p)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n+1/2}^c. \quad (27)$$

交换求和次序得到

$$\sum_p m_p (\mathbf{U}_{p,n+1} - \mathbf{U}_{p,n}) = - \Delta t \sum_c \sum_{p=1}^{p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n+1/2}^c, \quad (28)$$

$p(c)$  是网格  $\Omega_c$  格点集合.

动量守恒的条件:

$$\sum_{p=1}^{p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n+1/2}^c = 0, \quad (29)$$

$$\sum_{p=1}^{p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c + \Delta t \frac{d}{dt} \sum_{p=1}^{p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c = 0. \quad (30)$$

经过一些代数运算后可得  $\sum_{p=1}^{p(c)} \tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c = 0$ , 动量守恒条件(29)成立.

## 2.8 计算时间步长

计算时间步长  $\Delta t$ , 在时间  $t_n$ ,  $\lambda_{c,n}$  表示网格  $\Omega_c$  的两个格点之间距离的最小值:

$$\Delta t = \min_{c=1,2,\dots,I} \frac{\lambda_{c,n}}{\tilde{a}_{c,n}}, \quad (31)$$

这里  $\tilde{a}_{c,n}$  是网格  $\Omega_c$  的所有子网格声速的最大值.

## 2.9 算法简述

第一步, 设置初始量

知道网格  $\Omega_c$ ,  $c = 1, 2, \dots, I$  ( $I$  为计算区域总网格数) 的初始密度  $\rho_{c,0}$ , 格点坐标  $(X_{p,0}, Y_{p,0})$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ . 用网格  $\Omega_c$  的初始密度  $\rho_{c,0}$  及格点坐标  $(X_{p,0}, Y_{p,0})$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ , 计算子网格质量  $\tilde{m}_p^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ . 在当前时刻  $t = t_n$ , 知道基本子网格质量  $\tilde{m}_p^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ , 格点坐标  $(X_{p,n}, Y_{p,n})$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ , 计算四边形子网格体积  $\tilde{V}_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ , 密度  $\rho_{p,n}^c = \tilde{m}_p^c / \tilde{V}_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ . 用当前时刻的压力  $P_{c,n}$  和密度  $\rho_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ , 计算四边形子网格的声速  $\tilde{a}_{p,n}^c$ ,  $p = 1, 2, \dots, p(c)$ . 用式(20) 和(24) 求出高阶子网格力  $\tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c$  和高阶子网格力时间导数  $d\tilde{\mathbf{F}}_{p,n}^c/dt$ .

第二步, 解格点速度

解格点速度方程(21)、(26)得到  $\mathbf{U}_{p,n}$ ,  $d\mathbf{U}_{p,n}/dt$ .

第三步, 计算时间步长

由式(31)解出时间步长  $\Delta t$ .

第四步, 求新时刻几何量、物理量

根据格点速度  $\mathbf{U}_{p,n}$  解方程(23), 得新时刻的格点坐标  $(X_{p,n+1}, Y_{p,n+1})$ , 新时刻物理量  $\tau_{c,n+1}$ ,  $\mathbf{U}_{p,n+1}$ ,  $\varepsilon_{c,n+1}$ .

第五步, 解状态方程

由状态方程计算压力  $P_{c,n+1}$  和声速  $a_{c,n+1}$ .

## 3 数值结果

例 Saltzman 活塞问题

计算区域  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 0.1]$ , 生成4种初始网格: 第一种初始网格( $M_1$ ) 是由映射

$$\begin{cases} X_{\text{str}} = x + (0.1 - y)\sin(x\pi), \\ Y_{\text{str}} = y \end{cases}$$

变换均匀网格  $50 \times 5$  而成. 第二种初始网格( $M_2$ ) 是多块网格, 在三角形  $A_1A_2A_3$ , 四边形  $A_2A_4A_5A_3$ , 四边形  $A_4A_6A_7A_5$  和三角形  $A_7A_6A_8$  生成非结构四边形网格、非结构六边形网格、非结构四边形网格、非结构三角形网格. 计算区域的余下部分生成与第一种相同的初始网格. 格点  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$  和  $A_8$  的坐标是  $(0.24, 0.1)$ ,  $(0.3, 0)$ ,  $(0.3, 0.1)$ ,  $(0.33, 0)$ ,  $(0.34, 0.1)$ ,  $(0.35, 0)$ ,  $(0.35, 0.1)$  和  $(0.45, 0)$ . 第三种初始网格( $M_3$ ) 是由第一种初始网格加密一倍而成. 第四种初始网格( $M_4$ ) 是由第二种初始网格加密一倍而成. 初始状态  $(\rho_{c,0}, P_{c,0}, U_{c,0}) = (1, 0, 0)$  采用理想气体状态方程, 气体绝热指数  $\gamma = 5/3$ , 边界  $x = 0$  的法向速度  $U_p^* = 1$  (入流

条件), 区域上、下、右侧边界为反射边界, 运行时间  $t = 0.8$ . 精确解  $t = 0.8$  时激波在右侧反射后双激波区与单激波区交界位置 0.966 67, 单激波区密度  $\rho = 4$ , 双激波区密度  $\rho = 10$ .

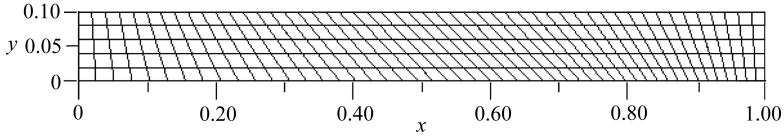


图 4 第一种初始网格

Fig.4 The first initial mesh

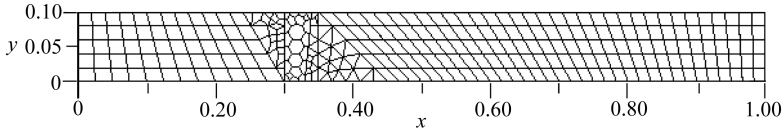


图 5 第二种初始网格

Fig.5 The second initial mesh

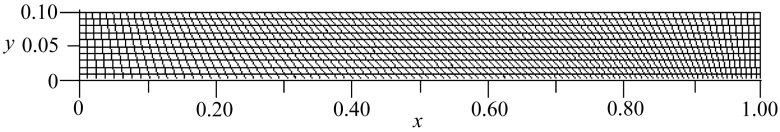


图 6 第三种初始网格

Fig.6 The third initial mesh

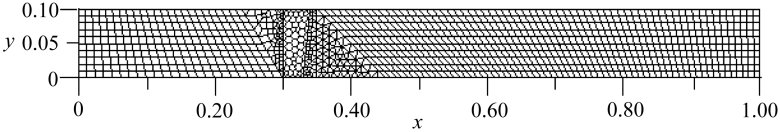


图 7 第四种初始网格

Fig.7 The fourth initial mesh

表 1 数值解收敛精确解的收敛精度(二阶精度格式( $o_2$ )).收敛阶是由  $M_1M_3$  网格和  $M_2M_4$  网格计算所得)

Table 1 Convergence of the numerical solution towards the exact solution, in function of two order of the scheme ( $o_2$ ) and of the mesh. (The order of convergence is systematically computed with the two meshes  $M_1M_3$  and  $M_2M_4$  in the list)

scheme	mesh	$x_{t=0.8}$	mesh	$x_{t=0.8}$
the exact solution		0.966 67		0.966 67
$o_2$	$M_1$	0.967 50	$M_2$	0.967 301
	$M_3$	0.966 94	$M_4$	0.966 876
convergence order		1.620		1.615

图 4 为第一种初始网格, 图 5 为第二种初始网格, 图 6 为第三种初始网格, 图 7 为第四种初始网格. 图 8~11 显示 Lagrange 高阶交错型守恒格式在时间  $t = 0.8$  时的网格; 图 12~15 显示 Lagrange 高阶交错型守恒格式在时间  $t = 0.8$  时的密度等值线. 这是一维问题, 所有的网格变形都是虚假的, 结果比较的主要点在于 Lagrange 交错型守恒格式保持一维解非常好, 抑制砂漏变形, 消除虚假涡旋, Lagrange 高阶交错型守恒格式计算的结果非常接近于精确解. 计算的结果清楚显示 Lagrange 高阶交错型守恒格式的精确性. 最后在表 1 里记录了  $t = 0.8$  时激波位置的

平均值.用4种网格  $M_1, M_2, M_3, M_4$  计算,第一种网格  $t = 0.8$  时激波位置的平均值 0.967 50, 第二种网格  $t = 0.8$  时激波位置的平均值 0.967 301, 第三种网格  $t = 0.8$  时激波位置的平均值 0.966 94, 第四种网格  $t = 0.8$  时激波位置的平均值 0.966 876.数值解收敛于精确解,由  $M_1$  网格和  $M_3$  网格计算的收敛阶是 1.620,由  $M_2$  网格和  $M_4$  网格计算的收敛阶是 1.615.

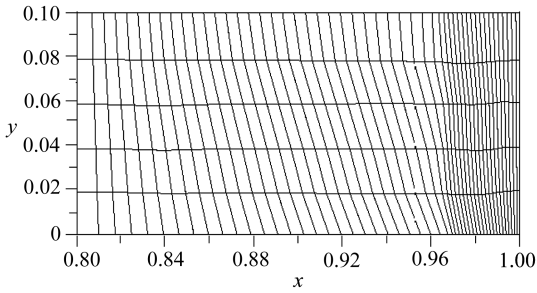


图 8 Lagrange 高阶交错型守恒格式, 时间  $t = 0.8$  时的第一种网格

Fig.8 Lagrangian high-order staggered conservative scheme, the first mesh at time  $t = 0.8$

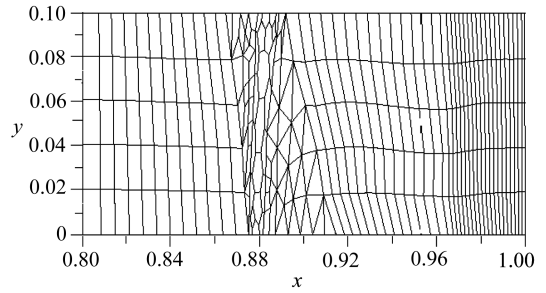


图 9 Lagrange 高阶交错型守恒格式, 时间  $t = 0.8$  时的第二种网格

Fig.9 Lagrangian high-order staggered conservative scheme, the second mesh at time  $t = 0.8$

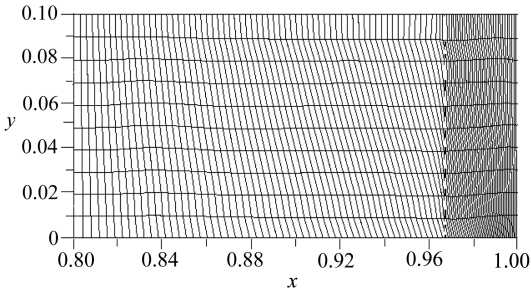


图 10 Lagrange 高阶交错型守恒格式, 时间  $t = 0.8$  时的第三种网格

Fig.10 Lagrangian high-order staggered conservative scheme, the third mesh at time  $t = 0.8$

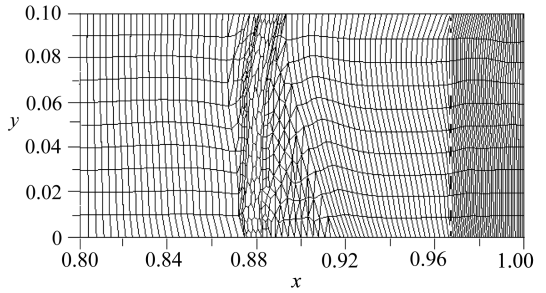


图 11 Lagrange 高阶交错型守恒格式, 时间  $t = 0.8$  时的第四种网格

Fig.11 Lagrangian high-order staggered conservative scheme, the fourth mesh at time  $t = 0.8$

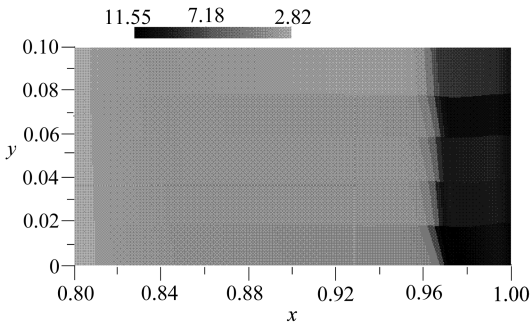


图 12 Lagrange 高阶交错型守恒格式, 时间  $t = 0.8$  时第一种网格的密度等值线

Fig.12 Lagrangian high-order staggered conservative scheme, contour plot of the density of the first mesh at time  $t = 0.8$

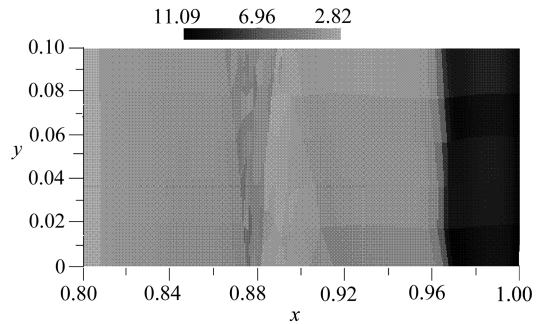


图 13 Lagrange 高阶交错型守恒格式, 时间  $t = 0.8$  时第二种网格的密度等值线

Fig.13 Lagrangian high-order staggered conservative scheme, contour plot of the density of the second mesh at time  $t = 0.8$



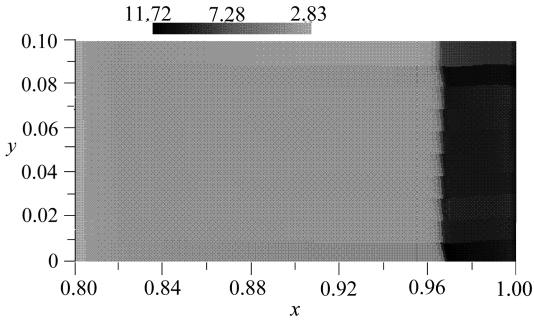


图 14 Lagrange 高阶交错型守恒格式, 时间  $t = 0.8$  时第三种网格的密度等值线

Fig.14 Lagrangian high-order staggered conservative scheme, contour plot of the density of the third mesh at time  $t = 0.8$

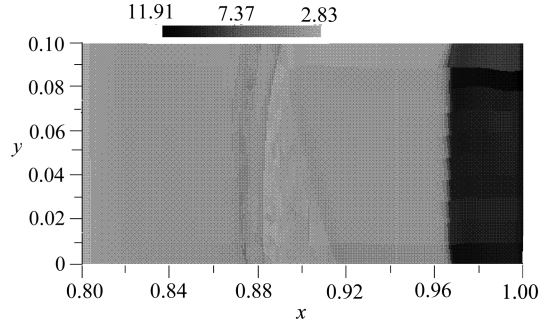


图 15 Lagrange 高阶交错型守恒格式, 时间  $t = 0.8$  时第四种网格的密度等值线

Fig.15 Lagrangian high-order staggered conservative scheme, contour plot of the density of the fourth mesh at time  $t = 0.8$

## 4 结 论

本文把 Caramana 和 Shashkov<sup>[9]</sup> 的子网格压力方法推广为 Lagrange 高阶交错型守恒气体动力学算法.假定在计算网格上压力是分片常数,构造了计算网格上高阶子网格力,借助时间中点通量的 Taylor 展开完成了高阶时间离散,高阶子网格力产生对虚假涡旋和沙漏畸变强大的抑制力.数值算例显示 Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒格式对任意形状的网格都是高精度格式.将来的工作是把子网格压力方法推广到 Lagrange 弹塑性流体算法里.

### 参考文献 (References):

- [1] Browne P L, Wallick K B. The reduction of mesh tangling in two-dimensional Lagrangian hydrodynamics codes by the use of viscosity, artificial viscosity, and TTS (temporary triangular subzoning) for long-thin zones[R]. Los Alamos Laboratory Report, LA-4740-MS, 1971: 1-16.
- [2] Margolin L G, Pyun J J. A method for treating hourglass patterns[C]//Taylor C T, Habashi W G, Hafez M M, eds. *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*. Proceedings of the Fifth International Held at Montreal. Canada, 1987: 1-149.
- [3] Flanagan D P, Belytschko T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control[J]. *Int J Numer Methods Eng*, 1981, **17**(5): 649-800.
- [4] Dukowicz J K, Meltz B J A. Vorticity errors in multidimensional Lagrangian codes[J]. *J Comput Phys*, 1992, **99**(1): 115-134.
- [5] von Neumann J, Richtmyer R D. A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks[J]. *J Appl Phys*, 1950, **21**(3): 232-238.
- [6] Caramana E J, Shashkov M J, Whalen P P. Formulations of artificial viscosity for multidimensional shock wave computations[J]. *J Comput Phys*, 1998, **144**(1): 70-97.
- [7] Campbell J C, Shashkov M J. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm[J]. *J Comput Phys*, 2001, **172**(4): 739-765.
- [8] Caramana E J, Burton D E, Shashkov M J, Whalen P P. The construction of compatible hydrodynamics algorithms utilizing conservation of total energy[J]. *J Comput Phys*, 1998, **146**(1): 227-262.
- [9] Caramana E J, Shashkov M J. Elimination of artificial grid distortion and hourglass-type mo-

- tions by means of Lagrangian subzonal masses and pressures[J]. *J Comput Phys*, 1998, **142**(2): 521-561.
- [10] 葛全文. Lagrange 中心型守恒格式[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(10): 1239-1256.(GE Quan-wen. Lagrangian cell-centered conservative scheme[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(10): 1239-1256.(in Chinese))
- [11] Carré G, Del Pino S, Després B, Labourasse E. A cell-centered Lagrangian hydrodynamics scheme in arbitrary dimension[J]. *J Comput Phys*, 2009, **228**(14): 5160-5183.

## Lagrangian High-Order Staggered Conservative Gasdynamics Scheme on Unstructured Meshes

GE Quan-wen

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics,*  
*Beijing 100094, P.R.China*)

**Abstract:** A Lagrangian high-order staggered conservative gasdynamics scheme on unstructured meshes was presented. The high-order piecewise pressure on the cell arising from the present-moment subcell density and present-moment subcell acoustic speed was used to construct the high-order subcell force with the MUSCL method. The time discretization of the spatial fluxes was performed by means of the Taylor expansions of the spatial fluxes centered in time. Thereupon the Lagrangian high-order staggered conservative gasdynamics scheme was established. Several numerical tests were presented to demonstrate the robustness and accuracy of the new scheme.

**Key words:** high-order sub cell force; Lagrangian high-order staggered conservative scheme on unstructured mesh; Lagrangian high-order staggered scheme on unstructured mesh; high-order piecewise pressure on the cell

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (11172050; 11372051; 11001027)