

边界节点法计算二维瞬态热传导问题*

师晋红, 傅卓佳, 陈文

(1. 河海大学 力学与材料学院, 南京 210098;
2. 河海大学 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 南京 210098)

(我刊编委陈文来稿)

摘要: 采用边界节点法(BKM)结合双重互易法(DRM)求解二维瞬态热传导问题.采用差分格式处理时间变量,可将原瞬态热传导方程转化为一系列非齐次修正的 Helmholtz 方程.随后,方程的解可分为特解和齐次解两部分计算,引入双重互易法在区域内部配点求解方程的特解,采用边界节点法仅需边界配点求解方程的齐次解.给出的数值算例显示该方法计算精度高,适用性好,具有很好的稳定性和收敛性,适合求解瞬态热传导问题.

关键词: 瞬态热传导; 边界节点法; 双重互易法; 差分格式; 修正的 Helmholtz 方程

中图分类号: O241.82; O343.6 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.02.001

引言

近年来,功能梯度材料、形状记忆合金等许多新兴材料被广泛用于高温涡轮发动机^[1]及伸缩翼系统^[2]的热障涂层等航天工程中.这些材料经常需要在高温环境中长期连续工作,所以很有必要了解这些材料及相关结构随时间演变的热传导性能,因此亟需发展计算瞬态热传导问题的数值算法,以便为航天工程材料的研发设计提供参考与指导.

目前,很多数值算法^[3-9]已用于求解瞬态热传导问题,例如,有限差分法、有限元法、边界元方法等.有限差分法和有限元法在求解问题时要求在整个求解域上进行离散,在处理复杂几何区域等问题时存在计算量过大、网格生成困难等难题.边界元方法是一种边界型数值算法,将计算域降低了一维,然而边界元法选用含奇异性的基本解作为插值基函数,不可避免地需要处理费时费力的奇异积分计算问题.

最近几十年发展起来的无网格方法^[10],基于点的近似,克服网格依赖的缺陷,减少因网格畸变引起的计算困难,已广泛用于求解瞬态热传导问题^[5-7, 11-12].其中,基本解方法^[13]是与边界

* 收稿日期: 2013-10-07; 修订日期: 2013-11-19

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)(2010CB832702); 国家杰出青年基金(11125208); 国家自然科学基金(11372097; 11302069); 高等学校学科创新引智计划(“111”计划)(B12032)

作者简介: 师晋红(1989—),女,山西人,硕士生(E-mail: shijhhu@163.com);
陈文(1967—),男,江苏人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: chenwen@hhu.edu.cn).

元法相对应的一种无网格方法.该方法无需积分,编程容易,不需要生成网格;并只需在计算域边界上配点,且比边界元法的数值收敛速度快得多.然而为了避免基本解的源点奇异性,该法在物理边界外引入了虚假边界.虚假边界的设置有相当大的随意性,对于复杂几何区域和多连通区域,易造成计算不稳定.

为了避免基本解方法布置虚假边界的问题,陈文等提出了边界节点法^[14-15](boundary knot method, BKM).该方法使用控制微分方程的非奇异径向基函数通解代替奇异基本解,在克服基本解方法虚假边界问题的同时,保留了该法其他优点.边界节点法计算二维和三维几何复杂域各类物理问题的精度和稳定性都很高^[16],有关论文总共已被他人引用 400 余次.目前该方法已被广泛应用于声学 and 扩散问题^[17-18].

在过去几十年中,双重互易法(dual reciprocity method, DRM)^[19]结合边界型数值算法被用来处理偏微分方程的非齐次项,并取得良好效果.尤其是双重互易边界元法(dual reciprocity boundary element method, DRBEM)在边界元领域就深受大家欢迎,被广泛用于求解瞬态热传导问题^[19-21].双重互易法的基本想法是用一系列的近似特解来得到问题的一个特解,使用方便、高效、灵活,是求方程特解的一个有效方法.

基于边界节点法和双重互易法近年来取得的众多成果,本文将采用边界节点法结合双重互易法求解二维瞬态热传导问题.文章首先采用差分格式处理热传导方程中的时间变量,将原热传导方程转化为一系列非齐次修正的 Helmholtz 方程.方程的解可分为特解和齐次解两部分.本文采用双重互易法求解方程的特解,采用边界节点法求解方程的齐次解.文章第 1 节描述热传导问题,并采用差分格式转化原热传导方程;第 2 节介绍双重互易法和边界节点法;第 3 节给出 3 个二维问题的数值算例并分析讨论;第 4 节给出结论.

1 问题描述

设热传导问题的考察区域为 Ω , $\Gamma = \partial\Omega$ 为其边界.则问题的控制方程可表示如下:

$$k \nabla^2 T(x, t) + Q(x, t) = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}, \quad x \in \Omega. \quad (1)$$

方程(1)受以下边界条件及初始条件的约束:

$$T(x, t) = \bar{T}(x, t), \quad x \in \Gamma_D, \quad (2)$$

$$q(x, t) = \frac{\partial T(x, t)}{\partial n(x)} = \bar{q}(x, t), \quad x \in \Gamma_N, \quad (3)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

其中 $T(x, t)$ 表示 t 时刻 x 点的温度, k 为导热系数, ρ 为密度, c 为比热容, $Q(x, t)$ 为内热源. $\bar{T}(x, t)$, $\bar{q}(x, t)$ 分别表示边界上的温度和热流, T_0 表示初始温度, Γ_D 为 Dirichlet 边界, Γ_N 为 Neumann 边界, $\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_N$.

采用差分格式处理原控制方程中的时间变量,对于时间间隔 $[t^n, t^{n+1}] \subset [0, t]$, 物体中任一点的温度 $T(x, t)$ 及其对时间的一阶导数和内热源可以近似为^[22]

$$T(x, t) = T^{n+1}(x), \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{T^{n+1}(x) - T^n(x)}{\tau}, \quad (6)$$

$$Q(x, t) = Q^{n+1}(x), \quad (7)$$

其中, $\tau = t^{n+1} - t^n$ 为迭代过程中的时间步长.

将方程(5)和(6)代入到方程(1)中,整理后可得

$$\left(\nabla^2 - \frac{\rho c}{\tau k}\right) T^{n+1}(x) = -\frac{\rho c}{\tau k} T^n(x) - \frac{1}{k} Q^{n+1}(x). \quad (8)$$

方程(8)中的右端项包含前一个时间步 $t = t^n$ 的近似解 $T^n(x)$, 本文选取已知的初始条件 $T(x, 0) = T_0$ 作为迭代的第一步.

方程(8)可简化为

$$(\nabla^2 - \lambda^2) T(x) = f(x), \quad (9)$$

其中

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho c}{\tau k}}, \quad (10)$$

$$f(x) = -\frac{\rho c}{\tau k} T^n(x) - \frac{1}{k} Q^{n+1}(x). \quad (11)$$

2 方法介绍

方程(9)的解可写成如下特解与齐次解和的形式:

$$T(x) = T_p(x) + T_h(x), \quad (12)$$

式中, $T_p(x)$ 和 $T_h(x)$ 分别表示方程的特解和齐次解.

特解 $T_p(x)$ 满足

$$(\nabla^2 - \lambda^2) T_p(x) = f(x), \quad x \in \Omega. \quad (13)$$

齐次解 $T_h(x)$ 满足

$$(\nabla^2 - \lambda^2) T_h(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (14)$$

$$T_h(x) = \bar{T}(x) - T_p(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_D, \quad (15)$$

$$q_h(x) = \bar{q}(x) - q_p(x) = h(x), \quad x \in \Gamma_N. \quad (16)$$

2.1 双重互易法

采用双重互易法求解方程的特解 $T_p(x)$. 首先用如下线性组合来逼近右端项 $f(x)$ [23]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i \varphi_i(x), \quad x \in \Omega, \quad (17)$$

其中 α_i 为待求系数, $\varphi_i(x) = \varphi(\|x - x_i\|)$ 为径向基函数, x_i 为区域 Ω 内 N_1 个不同的数据点.

确定 $f(x)$ 后, 特解 $T_p(x)$ 可写为

$$T_p(x) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i \Psi_i(x), \quad (18)$$

其中 $\Psi_i(x)$ 满足

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \Psi_i(x) = \varphi_i(x). \quad (19)$$

这里选取径向基函数 $\varphi(x)$ 如下 [24]:

$$\varphi = r^2 \ln r. \quad (20)$$

根据方程(19), 可得到 $\Psi(x)$ 的取值:

$$\begin{cases} \Psi = -\frac{4}{\lambda^4} - \frac{4\ln r}{\lambda^4} - \frac{r^2 \ln r}{\lambda^2} - \frac{4K_0(\lambda r)}{\lambda^4}, & r \neq 0, \\ \Psi = -\frac{4}{\lambda^4} + \frac{4\gamma}{\lambda^4} + \frac{4}{\lambda^4} \ln\left(\frac{\lambda}{2}\right), & r = 0, \end{cases} \quad (21)$$

其中 $\gamma \approx 0.577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 8$ 为 Euler 常数, K_0 为零阶第二类修正的 Bessel 函数.

2.2 边界节点法

采用边界节点法求解方程的齐次解 $T_h(x)$, $T_h(x)$ 由非奇异通解的线性组合来逼近^[14]:

$$T_h(x) = \sum_{i=1}^{N_s} \beta_i T_i^*(x), \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

其中 β_i 为待求系数, $T_i^*(x) = T^*(\|x - x_i\|)$ 为修正的 Helmholtz 算子 $(\Delta - \lambda^2)$ 的非奇异通解, x_i 为源点集合, N_s 为源点总数.

对二维问题, 非奇异通解 $T^*(x)$ 为

$$T^* = I_0(\lambda r), \quad (23)$$

其中 I_0 为零阶第一类修正的 Bessel 函数.

方程(22)中的 $T_h(x)$ 自动满足偏微分方程(14), 选取系数使得 $T_h(x)$ 也满足边界条件(15)和(16). 本文采用配置点法来达到该目的, 可得到如下线性方程组:

$$\sum_{i=1}^{N_s} \beta_i T_i^*(x_j) = g(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n_1, \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^{N_s} \beta_i \frac{\partial T_i^*(x_j)}{\partial n} = h(x_j), \quad j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_b, \quad (25)$$

其中, n_1 为 Dirichlet 边界上的配置点个数, n_b 为边界上的配点个数. 写成矩阵形式则为

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}, \quad (26)$$

其中 $\mathbf{b} = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{n_1}), h(x_{n_1+1}), h(x_{n_1+2}), \dots, h(x_{n_b}))^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_s})^T$, $\mathbf{A} = (A_{ij})$ 为插值矩阵:

$$A_{ij} = \begin{cases} T_i^*(x_j), & i = 1, 2, \dots, N_s, j = 1, 2, \dots, n_1, \\ \frac{\partial T_i^*(x_j)}{\partial n}, & i = 1, 2, \dots, N_s, j = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n_b. \end{cases} \quad (27)$$

因此, 方程(9)的解可表示为

$$T(x) = T_p(x) + T_h(x) = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i \Psi_i(x) + \sum_{i=1}^{N_s} \beta_i T_i^*(x), \quad x \in \Omega. \quad (28)$$

3 数值算例

本节采用边界节点法求解 3 个数值算例, 从而检验该方法在求解瞬态热传导问题中的适用性及有效性. 前两个算例所考察问题不含内热源, 第 3 个算例包含内热源.

为了量化数值解的好坏, 分别引入绝对误差 $E_{\text{err}}(T)$ 和平均相对误差 $R_{\text{err}}(T)$ 如下:

$$E_{\text{err}}(T) = |\hat{T}_i - T_i|, \quad (29)$$

$$R_{\text{err}}(T) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\hat{T}_i - T_i)^2}{\sum_{i=1}^N T_i^2}}, \quad (30)$$

其中 T_i 和 \hat{T}_i 分别表示 x_i 点的精确解和数值解, N 为测试点总个数.

例 1 考虑一个热传导问题的经典算例, 考察区域为正方形区域 $\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1, x_2 < 3\}$, 各系数取值为 $\rho c = 1, k = 1.25, Q = 0$. 初始时刻整个区域内的温度均为 $30\text{ }^\circ\text{C}$, 边界温度均为 $0\text{ }^\circ\text{C}$, 则该问题的边界条件及初始条件可以表述为 $T(0, y, t) = T(x, 0, t) = T(3, y, t) = T(x, 3, t) = 0, T_0(x, y) = 30$. 该问题的几何区域及边界条件见图 1.

该问题的解析解为

$$T(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \sin \frac{i\pi x}{3} \sin \frac{j\pi y}{3} \exp \left[\frac{-k\pi^2(i^2 + j^2)t}{3^2} \right],$$

其中

$$A_{ij} = 4 \times 30 \times \frac{[(-1)^i - 1][(-1)^j - 1]}{ij\pi^2}.$$

目前已有许多学者采用有限元法 (FEM)^[3]、边界元法 (BEM)^[8]、双重互易边界元法 (DRBEM)^[19]、Treffitz 有限元法 (Treffitz FEM)^[7] 等方法求解该算例. 这里将采用本文的方法求解该算例并与上述几种方法的数值结果进行比较.

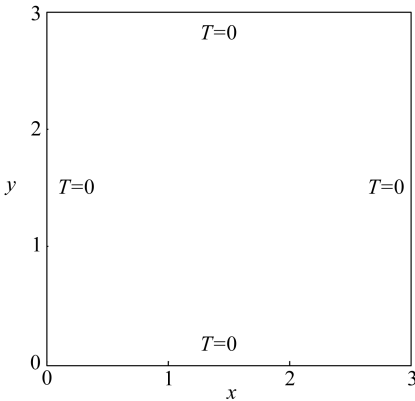


图 1 例 1 的考察区域及边界条件

Fig.1 The domain and boundary conditions in example 1

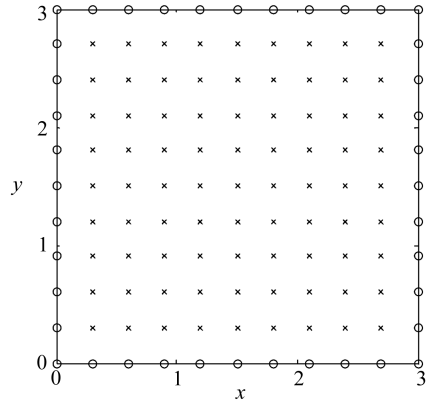


图 2 例 1 区域的边界及内部配点

Fig.2 The boundary and interpolation points in example 1

在区域边界均匀配点 40 个, 在区域内部均匀配点 81 个, 见图 2. 在计算中, 时间步长取 $\tau = 0.05$, 求 $t = 1.2$ 时刻的数值解. 在区域中取 5 个测试点, 采用边界节点法计算结果与其他方法的数值结果进行比较, 见表 1. 从表 1 中可以看出, 本文方法所得数值解与解析解吻合得很好, 并且比其他几种方法的数值精度更高.

表 1 $t = 1.2$ 时刻各方法数值结果比较

Table 1 Comparison of numerical results between different methods at $t = 1.2$

point	x	y	BKM	FEM	BEM	DRBEM	Treffitz FEM	exact
1	2.4	1.5	1.081 1	1.139	1.114	1.099	1.103	1.065
2	2.4	2.4	0.631 2	0.670	0.657	0.645	0.660	0.626
3	1.8	1.5	1.778 5	1.843	1.798	1.784	1.797	1.723
4	1.8	1.8	1.690 8	1.753	1.713	1.695	1.715	1.639
5	1.5	1.5	1.871 0	1.938	1.887	1.877	1.894	1.812

为了检验该方法的收敛性, 在边界取不同个数的配点分别进行计算. 在整个区域均匀分布

441 个测试点,则 $t = 1.2$ 时刻区域的平均相对误差见图 3.从图 3 中可以看出,数值解的精度随边界配点个数的增加而提高,最后趋于平稳,可见,该方法对边界配点个数是收敛的.

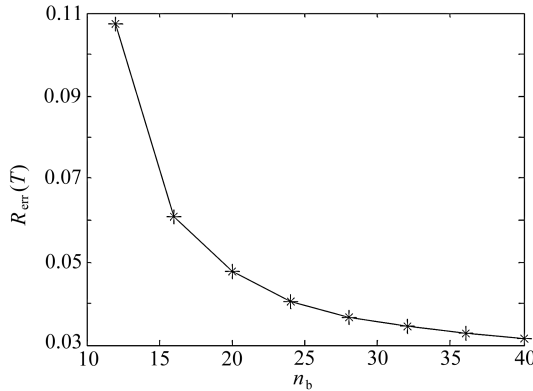


图 3 $t = 1.2$ 时不同边界配点个数的数值解精度

Fig.3 Numerical accuracy variation with respect to the number of boundary points at $t = 1.2$

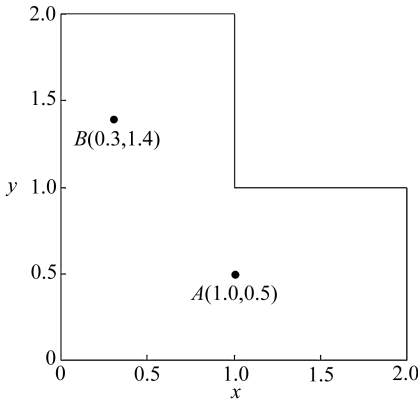


图 4 例 2 中考察区域及 A, B 测试点

Fig.4 The domain and 2 test points

A, B in example 2

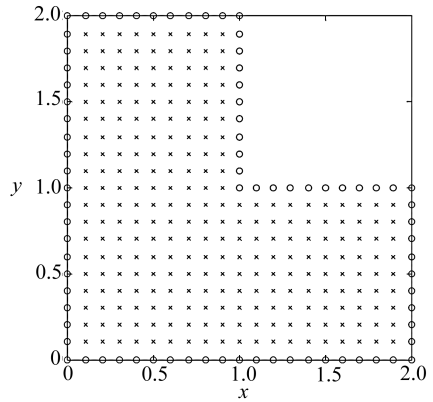


图 5 例 2 区域的边界及内部配点

Fig.5 The boundary and interpolation points in example 2

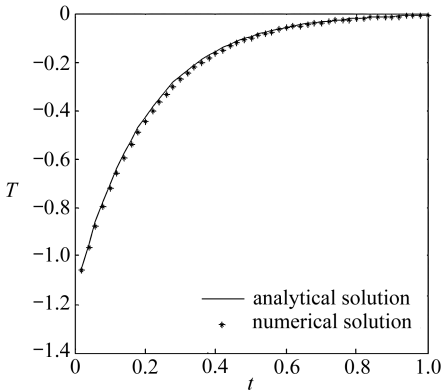


图 6 例 2 中 A 点的数值解

Fig.6 Numerical solution at point A in example 2

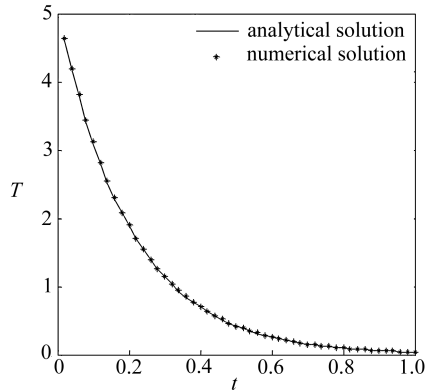


图 7 例 2 中 B 点的数值解

Fig.7 Numerical solution at point B in example 2

例 2 为了检验边界节点法在求解不光滑区域问题上的适用性,考虑 L 形区域见图 4,各

系数取值为 $\rho c = 1, k = 1, Q = 0$. 该问题的精确解为 $T(x, y, t) = \cos(3x) \sinh(2y) e^{-5t}$.

该问题所考察区域的边界及内部配点见图 5, 边界配点个数为 80, 内部配点个数为 261. 在计算中, 时间步长取 $\tau = 0.02$. 在区域中取 A, B 两个测试点见图 4, A, B 两点随时间的温度变化分别见图 6、图 7. 从图中可以看出, 计算所得的数值解与精确解吻合得非常好, 精度很高. 可见, 对于区域不光滑的问题, 该方法同样适用.

当取不同时间步长时, A, B 两点随时间变化的数值解的绝对误差见图 8. 从图中可以看出, 时间步长取值越小, 数值解的精度越高, 同时所需的计算时间也越多.

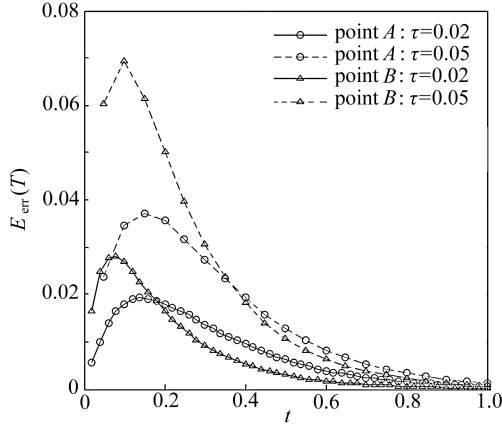


图 8 例 2 中时间步长对数值解绝对误差的影响

Fig.8 Effect of time step length on the absolute numerical error in example 2

例 3 考虑含内热源的瞬态热传导问题, 考察区域见图 9. 各系数取值为 $\rho c = 1, k = 1, Q(x, y, t) = \sin x \sin 2y (5 \cos t - \sin t)$. 该问题的精确解为 $T(x, y, t) = \sin x \sin 2y \cos t$.

在区域边界均匀配点 108 个, 在区域内部均匀配点 415 个, 见图 10. 在计算中, 时间步长取 $\tau = 0.05$. 在整个区域均匀分布 1 643 个测试点, $t = 2$ 时刻整个区域的数值解及绝对误差分布分别见图 11 和图 12. 其中, 最大绝对误差为 8.196×10^{-5} , 其相应的数值解约为 0.19, 相对误差为 4.262×10^{-4} . 因此, 可以看出, 该方法同样适用于求解含内热源的瞬态热传导问题, 计算结果具有很高的精度.

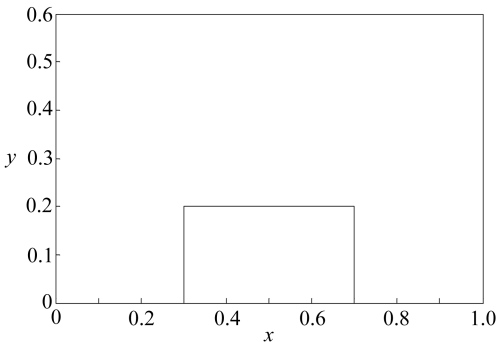


图 9 例 3 的考察区域

Fig.9 The domain in example 3

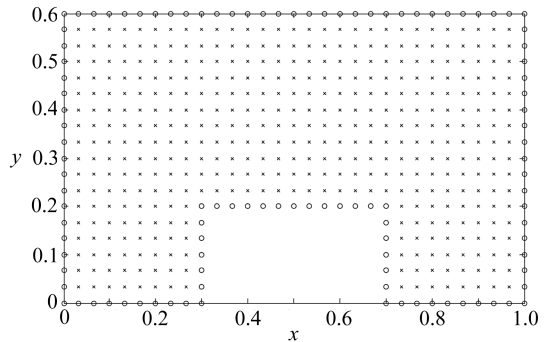
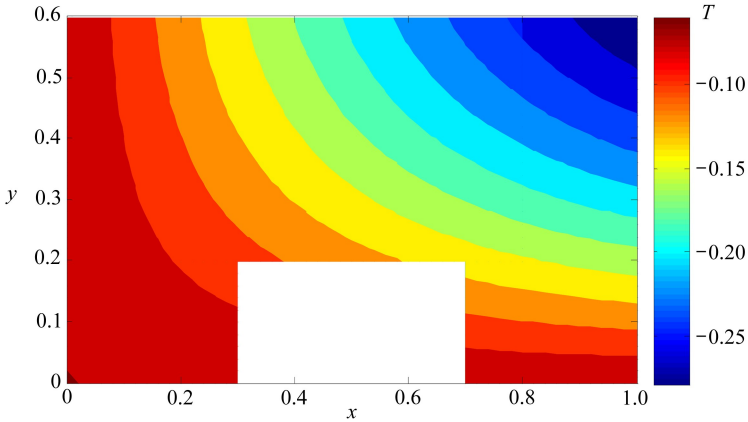
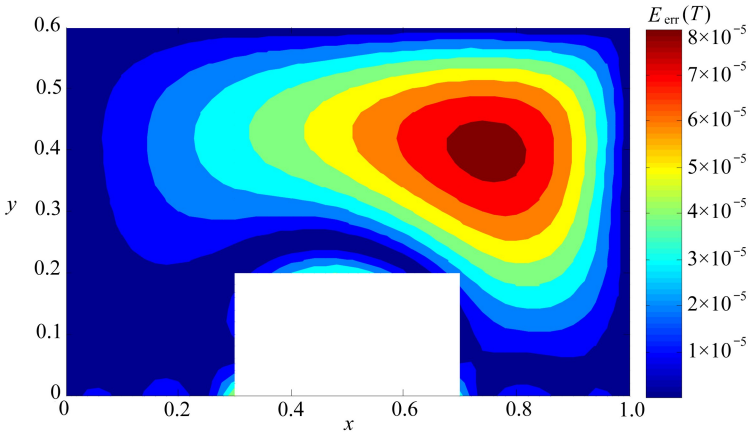


图 10 例 3 区域的边界及内部配点

Fig.10 The boundary and interpolation points in example 3

图 11 $t = 2$ 时整个区域的数值解Fig.11 The numerical solution in the whole domain at $t = 2$ 图 12 $t = 2$ 时整个区域数值解的绝对误差分布Fig.12 The absolute numerical error distribution in the whole domain at $t = 2$

4 结 论

本文将边界节点法结合双重互易技术应用于求解瞬态热传导问题,其中,采用差分格式处理热传导方程中的时间变量,将原热传导方程转化为一系列修正的 Helmholtz 方程,并采用双重互易法求解方程的特解,采用边界节点法求解方程的齐次解.文中给出 3 个数值算例,从不同边界形状、是否含内热源等方面检验了该方法的适用性及有效性,并与其他方法进行比较.数值结果表明,边界节点法无需积分,编程容易、不需要生成网格和划分虚假边界,计算精度高、适用性好,且具有很好的稳定性和收敛性,适合求解瞬态热传导问题.

此方法还有望高效稳定求解瞬态热传导的三维问题及非线性问题,这将是我们的研究方向.

参考文献 (References):

- [1] Burris K W, Beardsley M B, Chuzhoy L. Component having a functionally graded material coating for improved performance[P]. US Patent: 6087022, 2000-7-11.
- [2] Renner E. Thermal engine[P]. US Patent: 3937019, 1976-2-10.

- [3] Bruch J C, Zyvoloski G. Transient two-dimensional heat conduction problems solved by the finite element method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1974, **8**(3): 481-494.
- [4] Blobner J, Bialecki R A, Kuhn G. Transient non-linear heat conduction-radiation problems—a boundary element formulation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, **46**(11): 1865-1882.
- [5] Li Q H, Chen S S, Kou G X. Transient heat conduction analysis using the MLPG method and modified precise time step integration method [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **230**(7): 2736-2750.
- [6] Valtchev S S, Roberty N C. A time-marching MFS scheme for heat conduction problems [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2008, **32**(6): 480-493.
- [7] Jirousek J, Qin Q H. Application of hybrid-Trefftz element approach to transient heat conduction analysis [J]. *Computers & Structures*, 1996, **58**(1): 195-201.
- [8] Brebbia C A, Telles J C F, Wrobel L C. *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [9] 欧阳华江. 广义热传导方程有限元算法的计算准则 [J]. 应用数学和力学, 1992, **13**(6): 563-571. (OUYANG Hua-jiang. Criteria for finite element algorithm of generalized heat conduction equation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1992, **13**(6): 563-571. (in Chinese))
- [10] 张雄, 刘岩. 无网格法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (ZHANG Xiong, LIU Yan. *Meshless Methods* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))
- [11] Wang H, Qin Q, Kang Y. A meshless model for transient heat conduction in functionally graded materials [J]. *Computational Mechanics*, 2006, **38**(1): 51-60.
- [12] Fu Z J, Chen W, Qin Q H. Three boundary meshless methods for heat conduction analysis in nonlinear FGMs with Kirchhoff and Laplace transformation [J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **4**(5): 519-542.
- [13] Fairweather G, Karageorghis A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems [J]. *Advances in Computational Mathematics*, 1998, **9**(1/2): 69-95.
- [14] Chen W, Tanaka M. A meshless, integration-free, and boundary-only RBF technique [J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2002, **43**(3): 379-391.
- [15] Fu Z J, Chen W, Qin Q H. Boundary knot method for heat conduction in nonlinear functionally graded material [J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2011, **35**(5): 729-734.
- [16] Chen W, Hon Y C. Numerical investigation on convergence of boundary knot method in the analysis of homogeneous Helmholtz, modified Helmholtz, and convection-diffusion problems [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2003, **192**(15): 1859-1875.
- [17] Hon Y C, Chen W. Boundary knot method for 2D and 3D Helmholtz and convection-diffusion problems under complicated geometry [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, **56**(13): 1931-1948.
- [18] Jin B, Zheng Y. Boundary knot method for some inverse problems associated with the Helmholtz equation [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **62**(12): 1636-1651.
- [19] Partridge P W, Brebbia C A, Wrobel L C. *The Dual Reciprocity Boundary Element Method* [M]. Southampton: Computational Mechanics Publications, 1992.

- [20] Białecki R A, Jurgaś P, Kuhn G. Dual reciprocity BEM without matrix inversion for transient heat conduction[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2002, **26**(3): 227-236.
- [21] Bulgakov V, Šarler B, Kuhn G. Iterative solution of systems of equations in the dual reciprocity boundary element method for the diffusion equation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, **43**(4): 713-732.
- [22] Chapko R, Kress R. Rothe's method for the heat equation and boundary integral equations [J]. *Journal of Integral Equations and Applications*, 1997, **9**(1): 47-69.
- [23] Golberg M. Recent developments in the numerical evaluation of particular solutions in the boundary element method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1996, **75**(1): 91-101.
- [24] Chen C, Rashed Y F. Evaluation of thin plate spline based particular solutions for Helmholtz-type operators for the DRM[J]. *Mechanics Research Communications*, 1998, **25**(2): 195-201.

Boundary Knot Method for 2D Transient Heat Conduction Problems

SHI Jin-hong, FU Zhuo-jia, CHEN Wen

(1. *College of Mechanics and Materials, Hohai University,*

Nanjing 210098, P.R.China;

2. *State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering,*

Hohai University, Nanjing 210098, P.R.China)

(Contributed by CHEN Wen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The boundary knot method (BKM) in conjunction with the dual reciprocity method (DRM) was introduced to solve 2D transient heat conduction problems. With the finite difference scheme applied to deal with the time derivative term, the transient heat conduction equation was converted to a set of nonhomogeneous modified Helmholtz equations. Then the numerical solution to the nonhomogeneous problems was divided into two parts: the particular solution and the homogeneous solution. The DRM with few inner interpolation nodes was employed to get the particular solution, and the BKM with boundary-only nodes used to obtain the homogeneous solution. Numerical results show that the present combined method has the merits of high accuracy, wide applicability, good stability and rapid convergence, which were appealing to solving transient heat conduction problems.

Key words: transient heat conduction; boundary knot method; dual reciprocity method; difference scheme; modified Helmholtz equation

Foundation item: The National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB832702); The National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (11125208); The National Natural Science Foundation of China (11372097; 11302069)