

# 非饱和土壤水流问题的降阶外推仿真模型\*

腾 飞<sup>1</sup>, 罗振东<sup>2</sup>

(1. 凯里学院 数学科学学院, 贵州 凯里 556011;

2. 华北电力大学 数理学院, 北京 102206)

**摘要:** 利用 Crank-Nicolson 有限体积元方法和特征投影分解方法建立二维非饱和土壤水流问题的一种很少自由度、精度足够高的降阶外推仿真模型,并给出这种降阶外推仿真模型的降阶近似解误差估计和算法实现.最后用数值例子说明数值结果与理论结果相吻合,并阐明这种降阶外推仿真模型的优越性.

**关键词:** 非饱和土壤水流问题; 降阶外推仿真模型; 二阶时间精度; 误差估计

**中图分类号:** O242.21      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.02.004

## 引 言

非饱和土壤水流问题是指土壤中水分没有充满土壤空隙的自然现象.土壤中的水分含量直接影响着气候和环境及生态的变化.因此,对土壤中的水分含量变化做预测预报有着很重要的现实意义.

根据水动力学原理和 Darcy 定律,非饱和土壤水流问题可描述为含有复杂的源项和非线性水动力扩散系数的偏微分方程<sup>[1-3]</sup>,因此,通常没有解析解,只能求其数值解<sup>[1-3]</sup>.文献[1]给出了非饱和土壤水流问题的一些有限差分算法,文献[2]给出了一种集中质量有限元算法(没有理论分析).由于有限体积元方法<sup>[3-4]</sup>能保持局部的质量或能量守恒,比有限差分法精度高而且能适应边界复杂的计算域又与有限元方法有同阶精度,并要比有限元方法便于计算(事实上,有限体积元方法最终可通过体积元转化为差分格式计算,并可以借助有限元方法做解的存在性、稳定性和收敛性的理论分析).因此,有限体积元方法被公认为最有效的数值方法之一.所以,利用有限体积元方法求解非饱和土壤水流问题比用有限元法和有限差分方法更有优势.虽然文献[3]已经给出的非饱和土壤水流问题时间一阶精度的经典有限体积元格式具备了有限体积元方法的优点,但是对于实际工程问题,经典的有限体积元格式含有很多自由度(等于网格节点数目).这样,由于计算过程中截断误差的积累,经典的有限体积元格式计算若干步后,可能会出现浮点溢出,无法继续计算出所需近似解.因此,亟待解决的重要问题是:如何在

\* 收稿日期: 2013-09-02; 修订日期: 2013-12-25

**基金项目:** 国家自然科学基金(11271127);贵州省教育厅自然科学研究项目(黔教合 KY 字[2013]207)

**作者简介:** 腾飞(1986—),女,吉林人,讲师,硕士(E-mail: tengfeikl@126.com);  
罗振东(1958—),男,广西桂平人,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhdluo@ncepu.edu.cn).

保证数值解有足够精度的前提下,尽量降低有限体积元格式的自由度、简化计算、节省计算量和存储要求、减少计算过程中截断误差的积累,以便获得理想的数值解。

大量实践证明:特征投影分解(proper orthogonal decomposition,简记为POD)方法<sup>[5]</sup>是一种能极大地降低数值模型维数的高效逼近方法。该方法已经广泛地应用于包括信号分析和模式识别<sup>[6]</sup>、统计学及地球物理流体动力学和气象学<sup>[7]</sup>等多个领域。POD方法就是在最小二乘意义下,去寻找可代表已知数据的一组正交基,也就是求已知数据的一种最优逼近。早年,POD方法主要用于数据挖掘和统计中的主分量分析或寻找动力系统的主要特征<sup>[5-9]</sup>。直到最近,才有一些基于POD方法的降阶有限体积元模型<sup>[10-13]</sup>被建立。虽然文献[13]中已经建立了二维非饱和和土壤水流问题基于POD方法的降阶有限体积元模型,但只有一阶时间精度。这样,为了得到足够高的时间精度,时间步长必须取得足够小,从而增加了计算迭代步数,也会增加计算过程中截断误差的积累,影响计算精确度。特别地,现有基于POD方法的降阶有限体积元模型(例如文献[10-13])都是用整体时间段 $[0, T]$ 上的经典有限体积元解作为瞬像,去构造POD基和基于POD方法的降阶有限体积元模型,然后用这些降阶模型重复模拟相同时间段 $[0, T]$ 上的数值解。

本文改进现有的方法,利用Crank-Nicolson(CN)有限体积元方法和POD方法建立二维非饱和和土壤水流问题的一种自由度很少、精度足够高的降阶外推仿真模型,并给出这种降阶外推仿真模型近似解的误差估计和算法实现。最后用数值例子说明数值结果与理论结果相吻合,并阐明这种降阶外推仿真模型的优越性。这种外推仿真模型能提高时间离散的精度,极大地减少自由度和时间方向的迭代步,从而减少实际模拟计算中截断误差的积累,提高计算精度和计算效率。本文与现有文献(如,文献[10-13])的主要区别在于:仅用很短时段 $[0, T_0]$ ( $T_0 \ll T$ )上已求出经典的CN有限体积元解作为瞬像,构造POD基函数及建立具有很少自由度和足够高精度的降阶外推仿真模型,以计算总体时间段 $[0, T]$ 上的降阶近似解。这就相当于用已有土壤水分含量信息去预测预报未来土壤水分含量的发展变化情况,这是具有广泛应用前景的仿真模型。此外,采用误差估计指导POD基的选取,这是对现有基于POD技术的降阶方法(例如,文献[10-13]中的降阶方法)的改进和创新。

本文的安排如下:第1节给出二维非饱和和土壤水流问题时间二阶精度的CN时间半离散化格式和时间二阶精度的全离散化CN有限体积元模型及其误差估计,并利用最初时间段上很少的经典CN有限体积元解构成瞬像;第2节利用POD方法处理瞬像,构造标准正交POD基函数,建立一种具有足够高精度、自由度很少的降阶外推仿真模型;第3节分析二维非饱和和土壤水流问题降阶仿真模型解的误差,并给出降阶外推仿真模型的算法实现;第4节用数值例子去验证理论结果与数值模拟结果相吻合,并阐明这种降阶外推仿真模型的优越性;第5节给出主要的结论。

## 1 二维非饱和土壤水流问题时间二阶精度的经典CN有限体积元模型

### 1.1 二维非饱和土壤水流问题的数学模型和广义解及时间半离散解的误差估计

当土壤是均匀和各向同性的多孔介质时,按分子传播和水力学扩散原理,二维非饱和土壤水流问题可表示如下<sup>[1]</sup>:

问题 I 求  $Q$  满足

$$\begin{cases} \partial_t Q = \operatorname{div}(D(Q) \nabla Q) - \partial_y \tilde{K}(Q) + G, & (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \\ Q(x, y, 0) = Q^0(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ Q(0, 0, t) = Q_s, & t \in [0, T], \\ Q(x, y, t) = Q^0, & (x, y) \in \partial\Omega \setminus (0, 0), t \in [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\partial_t Q = \partial Q / \partial t$ ,  $\partial_y \tilde{K} = \partial \tilde{K} / \partial y$ ,  $\Omega \subset R^2$  是有界多角形连通区域,  $T$  是时间上限,  $Q(x, y, t) \in [Q_r, Q_s]$  表示土壤水分含量,  $Q^0$  表示土壤中已知初始水分(为了方便起见而且不失一般性, 在下面的理论分析中, 不妨假定  $Q^0 = 0$ ), 且  $Q_s (0 < Q_s < 1)$  和  $Q_r (Q_r > 0)$  分别表示饱和土壤水分含量和残留土壤含水量,  $G$  表示植物根系吸收率即已知的源项,  $\tilde{K}(Q) = \tilde{K}_s(Q/Q_s)^{2b+3}$  和  $D(Q) = b\tilde{K}_s\psi_s Q^{b+2}/Q_s^{b+3}$  分别表示渗透系数和水力扩散系数,  $\tilde{K}_s > 0$  表示饱和导水率,  $\psi_s$  表示饱和水势,  $b$  表示与土质有关的参数.

显然,

$$\tilde{K}(Q), \frac{\partial \tilde{K}(Q)}{\partial Q}, \frac{\partial \tilde{K}(Q)}{\partial y}, D(Q), \frac{\partial D(Q)}{\partial Q}$$

都是有界量, 即存在两个常数  $M_1$  和  $M_2$  使得

$$M_1 \leq \tilde{K}(Q), \frac{\partial \tilde{K}(Q)}{\partial Q}, \frac{\partial \tilde{K}(Q)}{\partial y}, D(Q), \frac{\partial D(Q)}{\partial Q} \leq M_2. \quad (2)$$

本文用到的 Sobolev 空间都是标准的(参见文献[14]). 设  $U = H_0^1(\Omega)$ , 由于在  $\partial\Omega$  上几乎处处有  $Q = 0$ , 所以二维非饱和土壤水流方程(1)有下面的变分形式.

**问题 II** 求  $Q(t): [0, T] \rightarrow U$  满足

$$\begin{cases} (\partial_t Q, v) + a(Q; Q, v) = F(Q; v), & \forall v \in U, t \in (0, T], \\ Q(x, y, 0) = 0, & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $a(Q; u, v) = (D(Q) \nabla u, \nabla v)$ ,  $F(Q; v) = (G - \partial_y \tilde{K}(Q), v)$ , 而且  $(\cdot, \cdot)$  表示  $L^2(\Omega)$  中的内积. 若  $G \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , 而且  $D(Q)$  和  $\tilde{K}(Q)$  的  $Q$  取成后一步, 其他的  $Q$  取为前一步, 用文献[15]中处理非线性方程的方法, 并由 Lax-Milgram 定理<sup>[15-16]</sup> 不难证明, 问题 I 存在唯一解  $Q \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ .

设  $k$  是时间步长而且  $Q^n$  是  $Q(t)$  在  $t_n = nk (n = 0, 1, \dots, N = [T/k])$  处关于时间离散的半离散逼近. 如果问题 II 在  $t = t_n$  处的时间微商  $\partial_t Q$  用向后一步的差商  $\bar{\partial}_t Q^n = (Q^n - Q^{n-1})/k$  逼近,  $\tilde{Q}^n = (Q^n + Q^{n-1})/2$ ,  $G^{n-1/2} = G(t_{n-1/2}, x, y)$ , 那么问题 II 的 CN 时间半离散化格式可写为下面的问题 III.

**问题 III** 求  $Q^n \in U (1 \leq n \leq N)$  满足

$$\begin{cases} 2(Q^n - Q^{n-1}, v) + ka(Q^{n-1}; Q^n + Q^{n-1}, v) = 2kF(Q^{n-1}; v), & \forall v \in U, \\ Q^0 = 0, & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $F(Q^{n-1}; v) = (G^{n-1/2} - \partial_y \tilde{K}(Q^{n-1}), v)$ .

利用 Lax-Milgram 定理(参见文献[15-16])和 Taylor 展开式不难得到下面定理:

**定理 1** 若条件(2)满足而且  $G \in L^2(\Omega)$ , 则问题 III 存在唯一的解序列  $Q^n (n = 1, 2, \dots, N)$ , 而且与问题 II 的解  $Q$  之间有下面的误差估计:

$$\|Q(t_n) - Q^n\|_0 + k \|\nabla(Q(t_n) - Q^n)\|_0 \leq Mk^2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

其中上式和后面用到的  $M$  均表示与时间步长  $k$  和空间区域剖分网格参数无关, 但与问题 I

的其它已知参数及  $G$  有关的常数.

### 1.2 时间二阶精度的经典 CN 有限体积元模型

下面的有限体积元方法理论及更多的细节参见文献[4].

首先设  $\mathfrak{S}_h = \{K\}$  是  $\bar{\Omega}$  具有最大直径  $h = \max h_K$  的拟一致三角形剖分, 其中  $h_K$  是三角形  $K \in \mathfrak{S}_h$  的直径 (参见文献[15]). 为了刻画有限体积元方法, 还要引入基于  $\mathfrak{S}_h$  的对偶剖分  $\mathfrak{S}_h^*$ , 它的单元称为控制元, 控制元的构造与文献[4] 中的构造相同. 设  $z_K$  是单元  $K \in \mathfrak{S}_h$  的重心, 将  $z_K$  与三角形  $K$  的各边中点连结, 把  $K$  剖分成 3 个小四边形  $K_z$  (参见图 1). 记  $Z_h(K)$  为  $K$  的顶点, 则  $Z_h = \cup_{K \in \mathfrak{S}_h} Z_h(K)$  为  $\mathfrak{S}_h$  的顶点集合. 对于每个  $z = (x_z, y_z) \in Z_h$ , 由所有共享顶点  $z = (x_z, y_z)$  的小四边形构成控制元  $V_z$  (参见图 2). 所有的控制元覆盖  $\bar{\Omega}$ , 构成  $\mathfrak{S}_h$  的对偶剖分  $\mathfrak{S}_h^*$ . 用  $Z_h^*$  表示剖分  $\mathfrak{S}_h$  的顶点集合  $Z_h$  中的内部顶点集合.

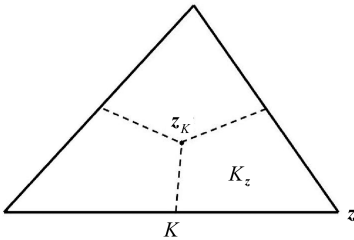


图 1 三角形  $K$  被分成 3 个四边形  $K_z$   
Fig.1 Triangle  $K$  is divided into 3 quadrangles  $K_z$

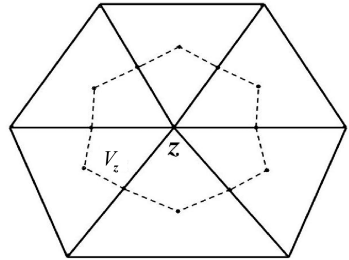


图 2 虚线连成控制元  $V_z$   
Fig.2 Control volume  $V_z$  formed by linked dotted lines

由于三角形剖分  $\mathfrak{S}_h$  是拟一致剖分, 所以相应的对偶剖分  $\mathfrak{S}_h^*$  也是拟一致的 (参见文献[4,15]).

定义水分含量的试验空间  $U_h$  和检验函数空间  $\tilde{U}_h$  分别如下:

$$\begin{aligned} U_h &= \{w_h \in U \cap C(\bar{\Omega}) : w_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \mathfrak{S}_h\}, \\ \tilde{U}_h &= \{w_h \in L^2(\Omega) : w_h|_{V_z} \in P_0(V_z), \forall V_z \in \mathfrak{S}_h^*; \\ &\quad w_h|_{V_z} = 0, \forall V_z \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中  $P_m(K)$  是  $K$  上次数不超过  $m$  ( $m=0,1$ ) 的多项式空间. 显然有  $U_h \subset U = H_0^1(\Omega)$ , 而且  $\tilde{U}_h$  是由基函数

$$\phi_z(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in V_z, \forall z \in Z_h^*, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{7}$$

张成.

对于每个  $w \in U = H_0^1(\Omega)$ , 设  $\Pi_h w$  是  $w$  在试验空间  $U_h$  上的插值投影. 则当  $w \in H^2(\Omega)$  时, 由 Sobolev 空间的插值理论<sup>[4,15]</sup> 有

$$\|w - \Pi_h w\|_m \leq Mh^{2-m} \|w\|_2, \quad m = 0, 1. \tag{8}$$

再对于  $w \in U$ , 设  $\Pi_h^* w$  是  $w$  在  $\tilde{U}_h$  上的插值投影, 即

$$\Pi_h^* w = \sum_{z \in Z_h^*} w(z) \phi_z. \tag{9}$$

则由 Sobolev 空间的插值理论<sup>[4,15]</sup> 有

$$\|w - \Pi_h^* w\|_0 \leq Ch \|w\|_1. \tag{10}$$

由于检验空间  $\tilde{U}_h \not\subset U_h$ , 所以对问题 II 的双线性形  $a(Q; u, w)$  须做相应修改. 利用非协调有限元法的思想, 把整个区域  $\bar{\Omega}$  上的积分写成在对偶元  $V_z$  上的积分和:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(D(Q) \nabla u) w dx dy = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} \operatorname{div}(D(Q) \nabla u) w dx dy = \\ - \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} D(Q) \nabla u \cdot \nabla w dx dy + \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} D(Q) \left( \frac{\partial u}{\partial x} w dy - \frac{\partial u}{\partial y} w dx \right), \quad (11)$$

其中  $\int_{\partial V_z}$  表示在对偶元的边界  $\partial V_z$  上按逆时针方向的边界积分. 因此,  $a(Q; u, w)$  可写为

$$a(Q; u, w) = \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{V_z} D(Q) \nabla u \cdot \nabla w dx dy - \\ \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} \int_{\partial V_z} D(Q) \left( \frac{\partial u}{\partial x} w dy - \frac{\partial u}{\partial y} w dx \right), \quad \forall u, w \in U. \quad (12)$$

由于  $\tilde{U}_h$  是以对偶元  $V_z$  上的特征函数为基函数的分片常数构成的空间, 因此对于  $Q_h \in U_h$  有

$$a(Q_h; u_h, v_h) = - \sum_{V_z \in \mathfrak{S}_h^*} v_h(z) \tilde{a}(Q_h; u_h, \phi_z), \quad \forall u_h \in U_h, \quad \forall v_h \in \tilde{U}_h, \quad (13)$$

其中  $\tilde{a}(Q_h; u_h, \phi_z) = \int_{\partial V_z} D(Q_h) \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} dy - \frac{\partial u_h}{\partial y} dx \right)$ .

注意到  $D(Q)$  是有界正函数, 由文献[3-4]中证明定理 5.1.1~5.1.5 的方法可得到下面的两个引理:

**引理 2** 双线性形  $a(Q; u_h, \Pi_h^* v_h)$  是对称有界正定的, 即

$$a(Q; u_h, \Pi_h^* v_h) = a(Q; v_h, \Pi_h^* u_h) = a(Q; u_h, v_h) \leq \\ M_2 \| \nabla u_h \|_0 \| \nabla v_h \|_0, \quad \forall u_h, v_h \in U_h, \quad (14)$$

$$a(Q; u_h, u_h) \geq M_1 \| \nabla u_h \|_0^2, \quad \forall u_h \in U_h, \quad (15)$$

而且有

$$(\partial_y u_h, \Pi_h^* v_h) = (\partial_y u_h, v_h) = - (u_h, \partial_y v_h), \quad \forall u_h, v_h \in U_h. \quad (16)$$

**引理 3** 下列公式成立:

$$(u_h, \Pi_h^* v_h) = (v_h, \Pi_h^* u_h), \quad \forall u_h, v_h \in U_h.$$

对于任意的  $u \in H^m(\Omega)$  ( $m = 0, 1$ ) 和  $v_h \in U_h$  有

$$| (u, v_h) - (u, \Pi_h^* v_h) | \leq Ch^{m+n} \| u \|_m \| v_h \|_n, \quad n = 0, 1.$$

令  $\| | u_h | \|_0 = (u_h, \Pi_h^* u_h)^{1/2}$ , 则  $\| | \cdot | \|_0$  与  $\| \cdot \|_0$  在  $U_h$  上等价, 即存在两个正的常数  $M_3$  和  $M_4$  使得

$$M_3 \| u_h \|_0 \leq \| | u_h | \|_0 \leq M_4 \| u_h \|_0, \quad \forall u_h \in U_h.$$

于是, 问题 I 具有时间二阶精度的全离散 CN 有限体元模型可表示为下面的问题 IV.

**问题 IV** 求  $Q_h^n \in U_h$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) 满足

$$\begin{cases} 2(Q_h^n - Q_h^{n-1}, \Pi_h^* v_h) + ka(Q_h^{n-1}; Q_h^n + Q_h^{n-1}, v_h) = \\ 2kF(Q_h^{n-1}; \Pi_h^* v_h), \quad \forall v_h \in U_h, \\ Q_h^0 = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (17)$$

对于问题 IV, 有下面解的存在唯一结论.

**定理 4** 在定理 1 的条件下, 问题 IV 存在唯一的解  $Q_h^n \in U_h$  满足

$$\| Q_h^n \|_0 + k \| \nabla Q_h^n \|_0 \leq M, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

而且当问题 II 的解  $Q \in H^2(\Omega)$  和  $k = O(h)$  时,问题 IV 的解  $Q_h^n$  有下面的误差估计:

$$\|Q^n - Q_h^n\|_0 + k \|\nabla(Q^n - Q_h^n)\|_0 \leq M(k^2 + h^2), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

当给定三角剖分参数  $h$ 、时间步长  $k$ 、试验空间  $U_h$ 、源项  $G(x, y, t)$ 、时间限  $T$ 、初值  $Q^0(x, y)$ 、饱和水量  $Q_s$ 、水分残量  $\theta_r$ 、水力渗透系数  $\tilde{K}(Q)$  和扩散系数  $D(Q)$  时,解问题 IV 可获得解集  $\{Q_h^n\}_{n=1}^N$ . 然后从这个解集  $\{Q_h^n\}_{n=1}^N$  抽取最初  $L$  (通常  $L \ll N$ , 例如在第 4 节例子中,  $L = 20$ ,  $N = 200$ ) 个解  $Q_h^i(x, y)$  ( $1 \leq i \leq L$ ) 构成瞬像.

**附注 1** 当求解实际的二维非饱和土壤水流问题时,可以从实际物理问题中抽取样本作为瞬像集合,然后利用下面的 POD 方法生成 POD 基函数,最后用 POD 基函数张成的子空间代替试验函数空间  $U_h$ , 建立出具有很低维数的降阶外推仿真模型. 这样土壤水分含量未来的发展变化就能快速模拟预测,这是具有实际应用背景的方法.

## 2 构造 POD 基和建立降阶外推仿真模型

本文构造 POD 基的方法及更多的细节参见文献[10-13].

对于第 1 节抽取的  $Q_h^i(x, y)$  ( $1 \leq i \leq L \ll N$ ), 令  $U_i(x, y) = Q_h^i(x, y)$  ( $1 \leq i \leq L$ ) 及

$$\mathcal{V} = \text{span}\{U_1, U_2, \dots, U_L\}, \quad (20)$$

并称  $\mathcal{V}$  为由瞬像  $\{U_i\}_{i=1}^L$  张成的空间. 用  $\{\psi_j\}_{j=1}^l$  表示空间  $\mathcal{V}$  中具有维数为  $l = \dim \mathcal{V}$  的标准正交基. 那么空间  $\mathcal{V}$  中的每个元可表示为

$$U_i = \sum_{j=1}^l (\nabla U_i, \nabla \psi_j) \psi_j = \sum_{j=1}^l (\nabla Q_h^i, \nabla \psi_j) \psi_j, \quad i = 1, 2, \dots, L. \quad (21)$$

**定义 1** POD 方法在于求标准正交基  $\psi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ) 使得

$$\min_{\{\psi_j\}_{j=1}^d} \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left( \nabla \left( U_i - \sum_{j=1}^d (\nabla U_i, \nabla \psi_j) \psi_j \right), \nabla \left( U_i - \sum_{j=1}^d (\nabla U_i, \nabla \psi_j) \psi_j \right) \right), \quad (22)$$

满足

$$(\nabla \psi_i, \nabla \psi_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq i. \quad (23)$$

问题(22)和(23)的解  $\{\psi_j\}_{j=1}^d$  称为秩等于  $d$  的 POD 基.

定义相关矩阵  $\mathbf{A} = (A_{ij})_{L \times L}$ , 其中

$$A_{ij} = \frac{1}{L} \int_{\Omega} \nabla U_i(x, y) \cdot \nabla U_j(x, y) \, dx dy,$$

则矩阵  $\mathbf{A}$  是秩为  $l$  的非负定的 Hermitian 矩阵, 并有下面的结论成立(参见文献[10-13]):

**命题 5** 设  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0$  为矩阵  $\mathbf{A}$  的正特征值, 而且  $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^l$  是对应的特征向量, 则秩为  $d \leq l$  的 POD 基

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{L\lambda_i}} \sum_{j=1}^L (\mathbf{v}^i)_j U_j, \quad 1 \leq i \leq d \leq l, \quad (24)$$

其中  $(\mathbf{v}^i)_j$  表示特征向量  $\mathbf{v}^i$  ( $i = 1, 2, \dots, d \leq l$ ) 的第  $j$  个分量. 而且有下面的误差公式成立:

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \left| U_i - \sum_{j=1}^d (\nabla U_i, \nabla \psi_j) \psi_j \right|_1^2 = \sum_{j=d+1}^L \lambda_j. \quad (25)$$

记  $U^d = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d\}$ . 定义广义 Ritz 投影  $P^d: U_h \rightarrow U^d$ , 即对于任意  $w \in U$  及  $Q_h \in U_h$  满足

$$a(w; P^d Q_h, w_d) = a(w; Q_h, w_d), \quad \forall w_d \in U^d. \quad (26)$$



则由泛函分析理论<sup>[17]</sup>知,存在  $P^d$  的一个延拓  $P^h: U \rightarrow U_h$  使得  $P^h|_{U_h} = P^d: U_h \rightarrow U^d$  满足

$$a(w; P^h u, w_h) = a(w; u, w_h), \quad \forall w_h \in U_h, \quad (27)$$

其中  $u \in U$ . 由式(27)和(2)可推导出投影  $P^h$  是有界的(参见文献[15]):

$$\|P^h w\|_s \leq M \|w\|_s, \quad \forall w \in U, s = -1, 0, 1, \quad (28)$$

而且有下面不等式成立(参见文献[10-13,15]):

$$\|u - P^h u\|_s \leq Ch \|u - P^h u\|_{s+1}, \quad \forall u \in U, s = -1, 0. \quad (29)$$

此外,还有下面结果成立(参见文献[10-13,15]):

**引理 6** 对于每个  $d(1 \leq d \leq l)$ , 投影算子  $P^d$  满足

$$\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \|Q_h^i - P^d Q_h^i\|_s^2 \leq Mh^{2(1+s)} \sum_{j=d+1}^l \lambda_j, \quad s = -1, 0, 1, \quad (30)$$

其中  $Q_h^i \in \mathcal{V}$  ( $i = 1, 2, \dots, L$ ) 是问题 III 的解. 而且当  $Q \in H^2(\Omega)$  时, 有

$$\|Q - P^h Q\|_s + h \|Q - P^h Q\|_{s+1} \leq Mh^{2-s} \|Q\|_2, \quad s = -1, 0. \quad (31)$$

这样,利用  $U^d$  可以建立基于 POD 方法和 CN 有限体积元方法的降阶外推仿真模型.

**问题 V** 求  $Q_d^n \in U^d$  ( $1 \leq n \leq N$ ) 满足

$$\begin{aligned} Q_d^n &= \sum_{j=1}^d (\nabla \psi_j, \nabla Q_d^n) \psi_j, \quad 1 \leq n \leq L; \\ 2(Q_d^n - Q_d^{n-1}, \Pi_h^* w) + ka(Q_d^{n-1}; Q_d^n + Q_d^{n-1}, w_d) &= \\ 2kF(Q_d^{n-1}; \Pi_h^* w_d), \quad \forall w_d \in U^d, L+1 \leq n \leq N. \end{aligned}$$

**附注 2** 由于试验空间  $U_h$  是分片线性多项式空间,所以问题 IV 的总体自由度(即未知量总数)为  $N_h$ (其中  $N_h$  为  $\mathfrak{S}_h$  中三角形顶点数目<sup>[15-16]</sup>),而问题 V 的自由度为  $d$  ( $d \ll l \leq L \ll N$ ). 对于实际工程问题,  $\mathfrak{S}_h$  中三角形顶点数目是数以万计的,甚至上亿的,而  $d$  只是从  $N$  个瞬时解中取出的最初很少的  $L$  个瞬像所对应的一些较大特征值个数,是很小的(例如,在第 4 节中,  $d = 6$ , 而  $N_h = 5\,000 \times 5\,000 = 25 \times 10^6$ ). 特别是,问题 V 的前  $L$  个解是由所抽取问题 IV 的最初  $L$  个解投影到 POD 基得到的,而大于  $L$  的  $N - L$  个解是通过问题 V 的第 2 个公式递推迭代得到的,这里的问题 V 不像文献[10-13]那样做重复计算,这正是对现有的降阶方法(例如,文献[10-13])的重要改进与区别. 因此,问题 V 是一个降阶外推仿真模型. 此外,土壤水分含量未来的发展变化都与先前的结果密切相关,通过用先前的结果作为瞬像去构造 POD 基函数,并利用降阶外推仿真模型求出其近似解,就能真实地捕捉到土壤中水分含量的发展变化规律.

### 3 降阶外推仿真模型解的存在性、收敛性及算法实现

#### 3.1 降阶外推仿真模型解的存在性、收敛性

为了讨论降阶外推仿真模型问题 V 解的存在性和误差估计,需要引入下面的离散 Gronwall 引理.

**引理 7**(离散 Gronwall 引理<sup>[15]</sup>) 如果  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  及  $\{\tilde{c}_n\}$  是 3 个正数列,而且  $\{\tilde{c}_n\}$  是单调并满足

$$a_n + b_n \leq \tilde{c}_n + \bar{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} a_i, \quad \bar{\lambda} > 0, a_0 + b_0 \leq \tilde{c}_0,$$

则  $a_n + b_n \leq \tilde{c}_n \exp(n\bar{\lambda})$  ( $n \geq 0$ ).

对于问题 V, 有下面的主要结论.

**定理 8** 在定理 4 的条件下,问题 V 存在唯一的解  $Q_d^n \in U_h$  满足

$$\|Q_d^n\|_0 + k \|\nabla Q_d^n\|_0 \leq M, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (32)$$

而且当  $k = O(h)$  和  $L^2 = O(N)$  时,有下面的误差估计:

$$\|Q_h^n - Q_d^n\|_0 + k \|\nabla(Q_h^n - Q_d^n)\|_0 \leq \tilde{M}(n) + M \left( k \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (33)$$

其中  $\tilde{M}(n) = 0(1 \leq n \leq L)$ , 而  $\tilde{M}(n) = M(k^2 + h^2) \sqrt{k(n-L)} (L+1 \leq n \leq N)$ .

**证明** 记  $A(Q_d^n, w_d) = 2(Q_d^n, \Pi_h^* w_d) + ka(Q_d^{n-1}; Q_d^n, w_d)$  和  $\tilde{F}(w_d) = 2(Q_d^{n-1}, \Pi_h^* w_d) + 2kF(Q_d^{n-1}; \Pi_h^* w_d) - ka(Q_d^{n-1}; Q_d^{n-1}, w_d)$ , 则问题 V 可以被重写为

**问题 VI** 求  $Q_d^n \in U^h (n = 1, 2, \dots, N)$  满足

$$\begin{cases} Q_d^n = \sum_{j=1}^d (\nabla\psi_j, \nabla Q_d^n) \psi_j, & n = 1, 2, \dots, L; \\ A(Q_d^n, w_d) = \tilde{F}(w_d), & \forall w_d \in U_h, n = L+1, L+2, \dots, N. \end{cases} \quad (34)$$

当  $n = 1, 2, \dots, L$  时,显然问题 V 有唯一的解; 当  $n = L+1, L+2, \dots, N$  时,由式(2)、引理 3 和 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式有

$$A(Q_d^n, Q_d^n) = 2(Q_d^n, \Pi_h^* Q_d^n) + ka(Q_d^{n-1}; Q_d^n, Q_d^n) \geq 2M_3^2 \|Q_d^n\|_0^2 + M_1 k \|\nabla Q_d^n\|_0^2 \geq \alpha \|Q_d^n\|_1^2, \quad \forall Q_d^n \in U^d, \quad (35)$$

其中  $\alpha = \min\{2M_3^2, M_1 k\} > 0$ , 即  $A(\cdot, \cdot)$  在  $U^d \times U^d$  上正定. 显然, 对于给定的  $Q_d^{n-1}$ ,  $A(\cdot, \cdot)$  是  $U^d \times U^d$  上的有界双线性形, 而且对于给定的  $Q_d^{n-1}$ ,  $\tilde{F}(\cdot)$  是  $U^d$  上的有界线性形. 于是, 由 Lax-Milgram 定理<sup>[15]</sup>知, 问题 VI 存在唯一的解序列  $Q_d^n \in U^d (L+1 \leq n \leq N)$ . 故问题 V 存在唯一的解.

由式(28)和定理 4 即得式(32)当  $n = 1, 2, \dots, L$  时的情形. 当  $n = L+1, L+2, \dots, N$  时, 在问题 V 中取  $w_d = Q_d^n + Q_d^{n-1}$ , 由式(2)、引理 2, 3 和 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned} & 2(\| |Q_d^n| \|_0^2 - \| |Q_d^{n-1}| \|_0^2) + kM_1 \|\nabla(Q_d^n + Q_d^{n-1})\|_0^2 \leq \\ & 2(Q_d^n - Q_d^{n-1}, \Pi_h^*(Q_d^n + Q_d^{n-1})) + ka(Q_d^n + Q_d^{n-1}, Q_d^n + Q_d^{n-1}) = \\ & 2k(G^{n-1/2}, \Pi_h^*(Q_d^n + Q_d^{n-1})) + 2k(Q_d^{n-1}, \partial_y(Q_d^n + Q_d^{n-1})) \leq \\ & 2M_4 k \|G^{n-1/2}\|_{-1} \|\nabla(Q_d^n + Q_d^{n-1})\|_0 + 2k \|Q_d^{n-1}\|_0 \|\nabla(Q_d^n + Q_d^{n-1})\|_0 \leq \\ & \frac{1}{2} kM_1 \|\nabla(Q_d^n + Q_d^{n-1})\|_0^2 + \frac{4M_4^2 k}{M_1} \|G^{n-1/2}\|_{-1}^2 + \frac{4k}{M_1 M_3^2} \| |Q_d^{n-1}| \|_0^2, \end{aligned} \quad (36)$$

即得

$$\begin{aligned} & 4(\| |Q_d^n| \|_0^2 - \| |Q_d^{n-1}| \|_0^2) + kM_1 \|\nabla(Q_d^n + Q_d^{n-1})\|_0^2 \leq \\ & \frac{8M_4^2 k}{M_1} \|G^{n-1/2}\|_{-1}^2 + \frac{8k}{M_1 M_3^2} \| |Q_d^{n-1}| \|_0^2. \end{aligned} \quad (37)$$

对式(37)两边从  $L+1$  至  $n$  求和有

$$\begin{aligned} & 4\| |Q_d^n| \|_0^2 + kM_1 \sum_{i=L+1}^n \|\nabla(Q_d^i + Q_d^{i-1})\|_0^2 \leq \\ & \frac{8M_4^2 k}{M_1} \sum_{i=L+1}^n \|G^{i-1/2}\|_{-1}^2 + \frac{8k}{M_1 M_3^2} \sum_{i=L}^{n-1} \| |Q_d^i| \|_0^2 + 4\| |Q_d^L| \|_0^2. \end{aligned} \quad (38)$$

将引理 7 应用于式(38)得

$$\| |Q_d^n| \|_0^2 + kM_1 \sum_{i=L+1}^n \|\nabla(Q_d^i + Q_d^{i-1})\|_0^2 \leq$$



$$4 \left\| |Q_d^n| \right\|_0^2 + kM_1 \sum_{i=L+1}^n \left\| \nabla(Q_d^i + Q_d^{i-1}) \right\|_0^2 \leq \left[ 4 \left\| |Q_d^L| \right\|_0^2 + \frac{8M_4^2 k}{M_1} \sum_{i=L+1}^n \left\| G^{i-1/2} \right\|_{-1}^2 \right] \exp[8nk(M_3^2 M_1)^{-1}]. \quad (39)$$

注意到  $\left\| \nabla(Q_d^n + Q_d^{n-1}) \right\|_0 \geq \left\| \nabla Q_d^n \right\|_0 - \left\| \nabla Q_d^{n-1} \right\|_0$  和  $(\sum_{n=0}^n b^2)^{1/2} \geq \sum_{n=0}^n |b| / \sqrt{n}$ . 对式(39)两边开方得

$$\left\| |Q_d^n| \right\|_0 + k\sqrt{M_1} \left\| \nabla Q_d^n \right\|_0 \leq k\sqrt{M_1} \left\| \nabla Q_d^L \right\|_0 + 2 \left\| |Q_d^L| \right\|_0 + \left( 8kM_4^2 M_1^{-1} \sum_{i=1}^n \left\| G^{i-1/2} \right\|_{-1}^2 \right)^{1/2} \exp[4nk(M_3^2 M_1)^{-1}], \quad L+1 \leq n \leq N. \quad (40)$$

由式(40)和引理3及式(32)当  $n=1, 2, \dots, L$  时的情形, 即得式(32)当  $n=L+1, L+2, \dots, N$  时的情形.

当  $k=O(h)$  和  $L^2=O(N)$  时, 由引理6即得式(33)当  $n=1, 2, \dots, L$  时的情形. 当  $n=L+1, L+2, \dots, N$  时, 由于  $U^d \subset U_h$ , 在问题IV中取  $w_h = w_d \in U_h$ , 并与问题V相减得下面的误差方程:

$$(Q_h^n - Q_d^n - (Q_h^{n-1} - Q_d^{n-1}), w_d) + ka(\bar{Q}_h^n - \bar{Q}_d^n, w_d) = k(Q_h^{n-1} - Q_d^{n-1}, \partial_y w_d) + k(G^{i-1/2}, w_d - \Pi_h^* w_d) - (Q_h^{n-1} - Q_d^{n-1}, w_d - \Pi_h^* w_d), \quad \forall w_d \in U^d. \quad (41)$$

令  $e^n = P^d Q_h^n - Q_d^n$  和  $\rho^n = Q_h^n - P^d Q_h^n$ . 这样, 由式(41)、(27), Hölder 不等式和 Cauchy 不等式及引理3有

$$\begin{aligned} 2(\left\| e^n \right\|_0^2 - \left\| e^{n-1} \right\|_0^2) + kM_1 \left\| \nabla(e^n + e^{n-1}) \right\|_0^2 &\leq \\ 2(\rho^{n-1} - \rho^n, e^n + e^{n-1}) + 2(Q_h^n - Q_d^n - (Q_h^{n-1} - Q_d^{n-1}), e^n + e^{n-1}) &+ \\ 2ka(\bar{Q}_h^n - \bar{Q}_d^n, e^n + e^{n-1}) - ka(\rho^n + \rho^{n-1}, e^n + e^{n-1}) &= \\ 2(\rho^{n-1} - \rho^n, e^n + e^{n-1}) + 2(G^{i-1/2}, e^n + e^{n-1} - \Pi_h^*(e^n + e^{n-1})) &+ \\ 2k(Q_h^{n-1} - Q_d^{n-1}, \partial_y(e^n + e^{n-1})) - 2(Q_h^{n-1} - Q_d^{n-1}, e^n + e^{n-1} - \Pi_h^*(e^n + e^{n-1})) &\leq \\ M(k^{-1} \left\| \rho^{n-1} - \rho^n \right\|_{-1}^2 + k \left\| \rho^{n-1} + \rho^n \right\|_0^2) + Mkh^4 \left\| G^{i-1/2} \right\|_1^2 &+ \\ Mk \left\| e^{n-1} \right\|_0^2 + \frac{kM_1}{2} \left\| \nabla(e^n + e^{n-1}) \right\|_0^2. & \end{aligned} \quad (42)$$

当  $h=O(k)$  时, 由式(42)和(29)得

$$4(\left\| e^n \right\|_0^2 - \left\| e^{n-1} \right\|_0^2) + kM_1 \left\| \nabla(e^n + e^{n-1}) \right\|_0^2 \leq Mkh^4 + Mk \left\| \rho^{n-1} + \rho^n \right\|_0^2 + Mk \left\| e^{n-1} \right\|_0^2. \quad (43)$$

对式(43)两边从  $L+1$  到  $n$  求和得

$$4 \left\| e^n \right\|_0^2 + kM_1 \sum_{i=L+1}^n \left\| \nabla(e^i + e^{i-1}) \right\|_0^2 \leq 4 \left\| e^L \right\|_0^2 + Mk \left( h^4 + \sum_{i=L}^n \left\| \rho^i \right\|_0^2 + \sum_{i=L}^{n-1} \left\| e^i \right\|_0^2 \right). \quad (44)$$

当  $h=O(k)$  时, 将引理7应用于式(44), 并化简后得

$$\left\| e^n \right\|_0^2 + k \sum_{i=1}^N \left\| \nabla(e^i + e^{i-1}) \right\|_0^2 \leq M \left[ kh^4 + \left\| e^L \right\|_0^2 + k \sum_{i=L}^n \left\| \rho^i \right\|_0^2 \right] \exp(M(n-L)k). \quad (45)$$

对式(45)两边开方,并由  $(\sum_{n=0}^n b^2)^{1/2} \geq \sum_{n=0}^n |b|/\sqrt{n}$  和  $\|\nabla(e^n + e^{n-1})\|_0 \geq \|\nabla e^n\|_0 - \|\nabla e^{n-1}\|_0$  得

$$\|e^n\|_0 + k \|\nabla e^n\|_0 \leq M \left( k \sum_{i=L}^n \|\rho^i\|_0^2 \right)^{1/2} + k \|\nabla e^L\|_0 + M \|e^L\|_0. \tag{46}$$

此外,由引理 4 和定理 2 有

$$\|Q_h^i - P^d Q_h^i\|_0 \leq \|Q_h^i - c(t_i)\|_0 + \|c(t_i) - P^h c(t_i)\|_0 + \|P^h(c(t_i) - Q_h^i)\|_0 \leq C[\|c(t_i) - P^h c(t_i)\|_0 + \|c(t_i) - Q_h^i\|_0] \leq C(h^2 + k^2). \tag{47}$$

由式(46)、(47)和引理 6 及式(33)当  $n = 1, 2, \dots, L$  时的情形即得式(33)当  $n = L + 1, L + 2, \dots, N$  时的情形.定理 8 证毕.

注意到  $k(n - L) \leq kN \leq T$  是常数.结合定理 4 和定理 8 得下面的结论.

**定理 9** 在定理 8 的条件下,问题 II 的解  $Q$  和问题 V 的解  $Q_d^n$  之间有下面的误差估计:

$$\|Q(t_n) - Q_d^n\|_0 + k \|\nabla(Q(t_n) - Q_d^n)\|_0 \leq M(k^2 + h^2) + M \left( k \sum_{j=d+1}^l \lambda_j \right)^{1/2}, \quad 1 \leq n \leq N.$$

**附注 3** 定理 8 的式(32)表明问题 V 的解是稳定的.定理 8 和定理 9 中的因子  $(k \sum_{j=d+1}^l \lambda_j)^{1/2}$  是由降维产生的,它可作为 POD 基数目选取的准则,即只要选取  $d$  使得  $k \sum_{j=d+1}^l \lambda_j = O(k^4, h^4)$ , 这时的误差估计是最优阶的.

### 3.2 降阶外推仿真模型的算法实现

降阶外推仿真模型的算法可按下面 7 个步骤实现:

**步 1** 生成瞬像集合  $U_i(x, y) = Q_h^i (i = 1, 2, \dots, L = O(N^{1/2}))$ , 它们可以是问题 IV 的经典 CN 有限体积元解或从物理系统轨迹中抽取的样本或已有的结果.

**步 2** 构造相关矩阵  $A = (A_{ij})_{L \times L}$ , 其中  $A_{ij} = (\nabla U_i, \nabla U_j)/L$ , 而且  $(\cdot, \cdot)$  是  $L^2$  内积.

**步 3** 记  $v = (a_1, a_2, \dots, a_L)^T$ . 解特征问题  $Av = \lambda v$  获得正特征值  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l > 0 (l = \dim\{U_1, U_2, \dots, U_L\})$  及对应的特征向量  $v^j = (a_1^j, a_2^j, \dots, a_L^j) (j = 1, 2, \dots, l)$ .

**步 4** 对于给定的三角剖分参数  $h$ 、时间步长  $k$  及所需的误差限  $\delta$ , 确定 POD 基数目  $d$  使得  $(k \sum_{j=d+1}^l \lambda_j)^{1/2} + k^2 + h^2 \leq \delta$ .

**步 5** 构造 POD 基  $\psi_j = \sum_{i=1}^L a_i^j Q_h^i / \sqrt{L\lambda_j} (j = 1, 2, \dots, d)$ .

**步 6** 取  $U^d = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d\}$ , 解仅含  $d$  个自由度的问题 V 得降阶外推仿真模型解  $Q_d^n (n = 1, 2, \dots, N)$ .

**步 7** 如果  $\|Q_d^{n-1} - Q_d^n\|_0 \geq \|Q_d^n - Q_d^{n+1}\|_0 (n = L, L + 1, \dots, N - 1)$ , 那么  $Q_d^n (n = 1, 2, \dots, N)$  就是问题 V 满足误差不超过  $k^2 + h^2 + (k \sum_{j=d+1}^l \lambda_j)^{1/2}$  的降阶外推仿真模型解. 否则, 即如果  $\|Q_d^{n-1} - Q_d^n\|_0 < \|Q_d^n - Q_d^{n+1}\|_0 (n = L, L + 1, \dots, N - 1)$ , 令  $U_i = Q_d^{n-i} (i = L, L - 1, \dots, 1)$ , 返回步 2.

## 4 数值例子

下面用二维非饱和土壤水流问题的一个数值例子去验证降阶外推仿真模型的有效性.

为了方便起见,取二维非饱和土壤水流问题的源项  $G = 0$ , 计算域为  $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$  的垂直剖面正方形,即  $\bar{\Omega} = [0, 50] \times [0, 50]$ . 初始土壤水分含量均为  $Q_0 = Q_r = 0.03$ , 土壤饱和水分含量  $Q_s = 0.41$ , 而且  $D(Q) = 278.3(Q/Q_s)^{8.05} \text{ (cm}^2/\text{min)}$ ,  $\tilde{K}(Q) = 1.42(Q/Q_s)^{10.24} \text{ (cm/min)}$ .

首先将区域  $\bar{\Omega}$  剖分为  $5\,000 \times 5\,000$  个边长  $\Delta x = \Delta y = 0.01$  的小正方形,然后在同一方向连接其对角线将每个小正方形剖分为两个小三角形构成  $h = \sqrt{2} \times 0.01$  的三角形剖分  $\mathfrak{S}_h$ . 对偶剖分  $\mathfrak{S}_h^*$  取为重心对偶剖分. 这样,时间二阶精度的经典 CN 有限体积元格式在每个时间层有  $25 \times 10^6$  个自由度. 为了使得  $h = O(k)$ , 取时间步长为  $k = 0.01 \text{ h}$ .

用问题IV求出的经典 CN 有限体积元解  $Q_h^n (n = 1, 2, \dots, 200, \text{即 } t = 0.01 \text{ h}, 0.02 \text{ h}, \dots, 2 \text{ h})$ , 然后选取最初的 20 个解  $Q_h^n (n = 1, 2, \dots, 20)$  作为瞬像. 当  $d = 6$  及  $k = 0.01$  时, 通过计算得到  $(k \sum_{j=7}^{20} \lambda_j)^{1/2} \leq 4 \times 10^{-4}$ . 这就指导本文只要取最初 6 个 POD 基就能满足精度要求. 这时,降阶外推仿真模型在每个时间层仅有 6 个自由度,按照 3.2 节的算法实现 7 个步骤获得当  $t = 2 \text{ h}$  时降阶外推仿真模型的解,画在图 3 中. 图 4 是当  $t = 2 \text{ h}$  时经典 CN 有限体积元解图. 比较图 3 和图 4 可看出,它们很相像,但归咎于经典 CN 有限体积元格式的自由度太多,造成计算过程中截断误差的积累,使得经典的 CN 有限体积元解有明显的耗散. 因此,降阶外推仿真模型的解比经典的 CN 有限体积元解更优.

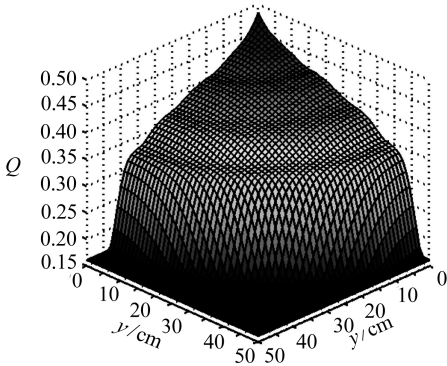


图 3 降阶外推仿真模型解

Fig.3 Reduced-order extrapolating simulation model solution

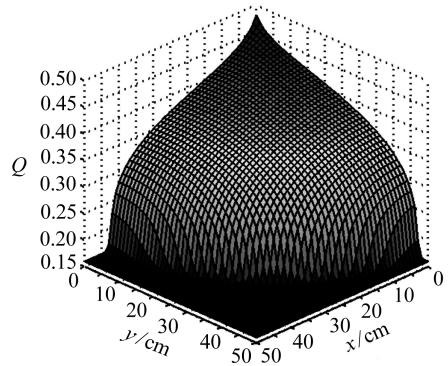


图 4 经典 CN 有限体积元解

Fig.4 Classical CN finite volume element solution

图 5 给出的是当时间  $t = 2 \text{ h}$  时降阶外推仿真模型取不同的 POD 数目时的解与问题IV的经典 CN 有限体积元解的误差. 图 5 表明理论结果与数值结果相吻合(因为当 POD 基数目取为 6 时,数值解和理论解的误差都不超过  $4 \times 10^{-4}$ ).

从计算量来看,基于 POD 方法和 CN 有限体积元法的降阶外推仿真模型在每个时间层只有 6 个自由度(即未知量),而经典的 CN 有限体积元格式在每个时间层有  $25 \times 10^6$  个自由度(即未知量). 因此,降阶外推仿真模型能极大地减少自由度、简化计算、节省计算量和存储要求,减少计算过程中截断误差的积累和计算时间的耗费,是求解二维非饱和土壤水流问题很有效和可行的方法.

此外,如果采用文献[13]中的时间一阶精度的降阶有限体积元格式,为了得到时间二阶精度的降阶外推仿真模型相同精度的近似解,必须取  $k = \Delta x = \Delta y = 10^{-4}$ . 这样,用文献[13]中

的时间一阶精度的降阶有限体积元格式计算  $t = 2$  h 时的解,需要计算 20 000 步,是时间二阶精度的降阶外推仿真模型(计算步数 200 步)的 100 倍.因此,用时间二阶精度的降阶外推仿真模型求解二维非饱和土壤水流问题能极大地减少计算迭代步数,也能减少计算过程中截断误差的积累,提高计算精度.从而时间二阶精度的降阶外推仿真模型远比文献[13]中的时间一阶精度的降阶有限体积元格式(没有采用外推)优越.

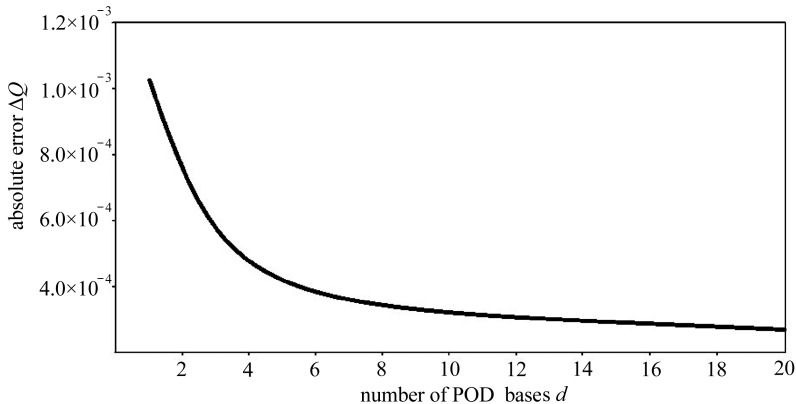


图5 经典 CN 有限体积元解与具有不同 POD 基降阶外推仿真模型解之间误差

Fig.5 Errors between solutions of the reduced-order extrapolating simulation model with different numbers of POD bases and the classical CN finite volume element solutions

## 5 结 论

本文利用 CN 有限体积元方法和 POD 方法建立了二维非饱和土壤水流问题的一种具有足够高精度、自由度很少的降阶外推仿真模型,并给出这种降阶外推仿真模型解的误差估计和解降阶外推仿真模型的算法实现.最后用数值例子验证了数值结果与理论结果相吻合.二维非饱和土壤水流问题时间二阶精度的降阶外推仿真模型能比时间二阶精度的经典 CN 有限体积元格式节省大量自由度.此外,本文模型也比文献[13]中的时间一阶精度的降阶有限体积元格式提高了时间离散的精度、极大地减少时间方向的迭代步、减少实际计算中截断误差的积累、提高计算精度和计算效率.特别是,本文仅用很短时段  $[0, T_0]$  ( $T_0 \ll T$ ) 上已求出的经典 CN 有限体积元解组成瞬像和构造 POD 基函数及建立降阶外推仿真模型,以计算总体时间段  $[0, T]$  上的降阶数值解,没有重复计算.这是对现有基于 POD 方法的降阶方法(例如,文献[10-13]等的降阶方法)的改进和创新.

## 参考文献(References):

- [1] 雷志栋, 杨诗秀, 谢森传. 土壤水动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998. (LEI Zhi-dong, YANG Shi-xiu, XIE Sen-chuan. *Soil Water Dynamics* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998. (in Chinese))
- [2] 谢正辉, 曾庆存, 戴永久, 王斌. 有限元集中质量法在非饱和土壤水流中的应用[J]. 气候与环境研究, 1998, 3(1): 73-81. (XIE Zheng-hui, ZENG Qing-cun, DAI Yong-jiu, WANG Bin. An application of the mass-lumped finite element method to the unsaturated soil water flow problem[J]. *Climatic and Environmental Research*, 1998, 3(1): 73-81. (in Chinese))

- [3] 李焕荣, 罗振东. 二维非饱和土壤水分运动问题的半离散有限体积元模拟[J]. 计算数学, 2011, **33**(1): 57-68. (LI Huan-rong, LUO Zhen-dong. Self-discrete finite volume element simulation for two-dimensional unsaturated soil water flow problem[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2011, **33**(1): 57-68. (in Chinese))
- [4] Li R H, Chen Z Y, Wu W. *Generalized Difference Methods for Differential Equations— Numerical Analysis of Finite Volume Methods*[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 2000.
- [5] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [6] Fukunaga K. *Introduction to Statistical Recognition*[M]. New York: Academic Press, 1990.
- [7] Jolliffe I T. *Principal Component Analysis*[M]. 2nd ed. New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
- [8] Selten F M. Baroclinic empirical orthogonal functions as basis functions in an atmospheric model[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1997, **54**(16): 2099-2114.
- [9] Sirovich L. Turbulence and the dynamics of coherent structures: I -coherent structures; II -symmetries and transformations; III -dynamics and scaling[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, **45**(3): 561-571; 573-590.
- [10] LUO Zhen-dong, XIE Zheng-hui, SHANG Yue-qiang, CHEN Jing. A reduced finite volume element formulation and numerical simulations based on POD for parabolic equations[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**(8): 2098-2111.
- [11] LUO Zhen-dong, LI Hong, ZHOU Yan-jie, HUANG Xiao-ming. A reduced FVE formulation based on POD method and error analysis for two-dimensional viscoelastic problem[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, **385**(1): 310-321.
- [12] LUO Zhen-dong, LI Hong, SUN Ping. A reduced-order Crank-Nicolson finite volume element formulation based on POD method for parabolic equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, **219**(11): 5887-5900.
- [13] 罗振东, 李宏, 陈静. 非饱和土壤水流问题基于 POD 方法的降阶有限体积元格式及外推算法实现[J]. 中国科学 A 辑: 数学, 2012, **42**(12): 1263-1280. (LUO Zhen-dong, LI Hong, CHEN Jing. A reduced-order finite volume element formulation based on POD method and implementation of its extrapolation algorithm for unsaturated soil water flow equation[J]. *Sci Sin Math*, 2012, **42**(12): 1263-1280. (in Chinese))
- [14] Adams R A. *Sobolev Spaces*[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [15] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006. (LUO Zhen-dong. *Mixed Finite Element Methods and Applications*[M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))
- [16] Ciarlet P G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematic, 2002.
- [17] Rudin W. *Functional and Analysis*[M]. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Companies, Inc, 1973.

# A Reduced-Order Extrapolating Simulation Model for Unsaturated Soil Water Flow Problem

TENG Fei<sup>1</sup>, LUO Zhen-dong<sup>2</sup>

(1. *School of Mathematical Science, Kaili University, Kaili, Guizhou 556011, P.R.China;*

2. *School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, P.R.China*)

**Abstract:** A reduced-order extrapolating simulation model with sufficiently high accuracy and few degrees of freedom for the two-dimensional unsaturated soil water flow problem was established by means of the Crank-Nicolson finite volume element (CNFVE) method and POD technique. The error estimates of the reduced-order approximate solutions and the algorithm implementation for the reduced-order extrapolating simulation model were provided. Finally, a numerical example was taken to illustrate that the results of numerical computation are consistent with those of theoretical solutions. Moreover, the advantage of the reduced-order extrapolating simulation model lies in its simpler computation and higher accuracy.

**Key words:** unsaturated soil water flow problem; reduced-order extrapolating simulation model; second-order time accuracy; error estimate

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11271127)