文章编号:1000-0887(2014)02-0202-10

D-η- 半预不变凸映射的性质与应用*

彭再云[1], 王堃颖[1], 赵 勇[2], 张石生[3]

(1. 重庆交通大学 理学院, 重庆 400074;
2. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331;
3. 云南财经大学 数学与统计学院, 昆明 650224)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 提出了一类新的向量值映射—— D-η- 半预不变凸映射,它是 D- 预不变凸映射的真推广. 首先,用例子说明了 D-η- 半预不变凸映射的存在性,并说明其区别于 D-η- 半严格半预不变凸映射;然后,给出了 D-η- 半预不变凸映射的判定定理,并建立了 D-η- 半预不变凸映射与 D-η- 严格/半严格半预不变凸映射间的关系;最后,讨论了 D-η- 半严格半预不变凸映射在优化问题中的应用,并举例验证了所得结论的正确性.

关 键 词: D-η- 半预不变凸映射; 判定定理; 优化问题; 应用
中图分类号: O221.1 **文献标志码:** A
doi:10.3879/j.issn.1000-0887.2014.02.008

引 言

凸性和广义凸性在数理经济、管理科学和最优化理论中起着非常重要的作用,有关凸性和广义凸性的研究是数学规划最重要的方向之一.Hanson[1] 在 1981 年给出了一类广义凸函数——不变凸函数,它是凸函数的推广.其后,大量文献借助于这类函数讨论了一些数学规划问题的最优性结果.Ben-Israel 和 Mond[2] 考虑了一类非可微函数,Weir 和 Jeyakumar[3] 将其称为预不变凸函数.Yang 和 Li[4] 在条件 C 下讨论了预不变凸函数的一些性质.Yang 和 Li[5] 给出了严格预不变凸函数、半严格预不变凸函数的概念,并讨论了其与预不变凸函数之间的相互关系.1992 年,Yang 和 Chen[6] 提出了半预不变凸函数的概念,这类函数可看作预不变凸函数的真推广.Peng 和 Chang[7] 在已有文献基础上提出了 G- 半预不变凸函数的概念,它统一了 G- 预不变凸函数[8] 与半预不变凸函数,并讨论了 G- 半预不变凸函数的性质及其重要刻画.Kazmi[9] 提出了向量值情形下的 D- 预不变凸映射的重要概念.Peng 和 Zhu[10] 给出了 D- 预不变凸映射的一些性质,并讨论了 D- 预不变凸性、D- 严格预不变凸性和 D- 半严格预不变凸性之间的关系.之后,一些文献(如文献[11-13])继续对向量值广义凸映射进行了研究.

受文献[6-7,10]的启发,本文提出了一类新的向量值广义凸映射—— D-η- 半预不变凸映

* **收稿日期:** 2013-07-16; **修订日期:** 2013-08-27
基金项目: 国家自然科学基金(11271389; 11301571); 重庆市自然科学基金(CSTC2012jjA00016);重庆市教委基金(KJ130428)
作者简介: 彭再云(1980—),男,重庆人,副教授,博士(E-mail: pengzaiyun@126.com);
张石生(1934—),男,云南曲靖人,教授(通讯作者. E-mail: changss@yahoo.cn).

射,它是 D- 预不变凸映射[10]的真推广.首先,用例子说明了 D-η- 半预不变凸映射的存在性,并举例说明了它区别于 D-η- 半严格半预不变凸映射;然后,给出了 D-η- 半预不变凸映射的判定定理,并建立了 D-η- 半预不变凸映射与 D-η- 严格半预不变凸映射、D-η- 半严格半预不变凸映射间的关系;最后,讨论了 D-η- 半严格半预不变凸映射在一类隐约束向量优化问题中的应用,并举例验证了所得结论的正确性.本文结果是文献[6-7,10-13]中相应结果的推广.

1　定义及其例子

本文均假定 X,Y 是实局部凸拓扑线性空间,K 是 X 中给定的任意非空子集,D 是 Y 中的非空尖闭凸锥,$f:K\to Y$ 是向量值映射.D 的对偶锥 D^* 定义为

$$D^* = \{f \in Y^*: f(y) \geqslant 0, \forall y \in D\}.$$

为了后面讨论的需要,先给出几个定义.

定义 1　称集合 K 是 X 中的半不变凸集,若存在向量值映射 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$(当 $x\neq y$ 时,$\eta\neq 0$),使得 $\forall x,y\in K,\forall\alpha\in[0,1],\lambda\in[0,1]$,有 $y+\alpha\eta(x,y,\lambda)\in K$.

定义 2　设 K 是 X 中关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集.称向量值映射 $f:K\to Y$ 在 K 上(关于 η)是 D-η- 半预不变凸的,如果对任意的 $x,y\in K,\alpha\in[0,1],\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-D.$$

定义 3　设 K 是 X 中关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集.称向量值映射 $f:K\to Y$ 在 K 上(关于 η)是 D-η- 半严格半预不变凸的,如果对任意的 $x,y\in K,f(x)\neq f(y),\alpha\in(0,1)$, $\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\operatorname{int}D.$$

定义 4　设 K 是 X 中关于 $\eta: X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集.称向量值映射 $f:K\to Y$ 在 K 上(关于 η)是 D-η- 严格半预不变凸的,如果对任意的 $x,y\in K,x\neq y,\alpha\in(0,1),\lambda\in[0,1]$, 有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\operatorname{int}D.$$

注 1　显然,当 $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$(即 η 与 λ 无关)时,D-η- 半预不变凸映射就退化为 D- 预不变凸映射[10],所以 D-η- 半预不变凸映射是 D- 预不变凸映射的真推广.

下面通过例子来说明向量值 D-η- 半预不变凸映射是大量存在的.

例 1　令 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$,
其中

$$f_1(x)=-2|x|,\ f_2(x)=-4|x|,$$

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases} x-y+\lambda, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ x-y-\lambda, & x\leqslant 0,\ y\leqslant 0;\\ y-x+\lambda, & x\leqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ y-x-\lambda, & x\geqslant 0,\ y\leqslant 0.\end{cases}$$

容易验证 $K=\mathbf{R}$ 是一个半不变凸集, 且根据定义 2, 显然可以验证 f 是 K 上的 D-η- 半预不变凸映射.

下面的例子说明 D-η- 半严格半预不变凸映射可能既不是关于同一 η 的 D-η- 半预不变凸映射也不是关于同一 η 的 D-η- 严格半预不变凸映射.

例 2　令 $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$,

其中

$$f_1(x)=\begin{cases}-|x|, & |x|\leqslant 1;\\ -1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}-3|x|, & |x|\leqslant 1;\\ -3, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y+\lambda, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ x-y-\lambda, & x\leqslant 0,\ y\leqslant 0;\\ x-y+\lambda, & x>1,\ y<-1;\\ x-y-\lambda, & x<-1,\ y>1;\\ y-x+\lambda, & -1\leqslant x\leqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ y-x-\lambda, & -1\leqslant y\leqslant 0,\ x\geqslant 0;\\ y-x-\lambda, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\leqslant 0;\\ y-x+\lambda, & 0\leqslant y\leqslant 1,\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

容易验证 $K=\mathbf{R}$ 是一个半不变凸集,由定义 3 不难验证 f 是 K 上的 D-η- 半严格半预不变凸映射.然而,当取 $x=3,y=-3,\alpha=1/2,\lambda=1/2$ 时,有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))=f\left(\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right),$$

$$f(x)=f(3)=(-1,-3)=f(y)=f(-3),$$

即有

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\notin\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-D$$

及

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\notin\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\operatorname{int}D.$$

据定义 2 与定义 4 可知,f 在 K 上既不是 D-η- 半预不变凸映射, 也不是 D-η- 严格半预不变凸映射.

注 2 由例 1 可知 D-η- 半预不变凸映射是大量存在的,由例 2 可以发现 D-η- 半预不变凸映射与 D-η- 半严格半预不变凸映射是不相同的映射.

定义 5[13] 称向量值映射 $f:K\to Y$ 是 $*$-上半连续的,如果对任意的 $q\in D^*$,$q(f)(\cdot)$ 在 K 上是上半连续的.

2 D-η- 半预不变凸映射的判定定理

为了得到向量值 D-η- 半预不变凸性的判定,我们先给出条件 A 的定义.

条件 A 称向量值映射 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 满足条件 A,若对任意的 $x,y\in X$, 任意的 $\alpha\in[0,1],\lambda\in[0,1]$, 有

(A1) $\eta(y,y+\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda)=-\alpha\eta(x,y,\lambda)$,

(A2) $\eta(x,y+\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda)=(1-\alpha)\eta(x,y,\lambda)$.

下面用例 3 说明满足条件 A 的向量值映射 η 是大量存在的.

例 3 令

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0;\\ x-y, & x<0,\ y<0;\\ -\dfrac{1}{2}-y, & x>1,\ y<0;\\ \dfrac{1}{2}-y, & x<0,\ y\geqslant 0;\\ -\dfrac{1}{2}-y-2\lambda, & x=0,\ y<0.\end{cases}$$

根据以上定义,可以验证向量值映射 η 是满足条件 A 的.

引理 1　设 K 是 X 中关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的半不变凸集,其中 η 满足条件 A.若 $f:K\to Y$ 满足对任意的 $x,y\in K$, $f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$ 且存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-D,\qquad\forall x,y\in K,$$

则集合

$$A=\{\gamma\in[0,1]\,|\,f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))\in\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)-D\}$$

在区间$[0,1]$中稠密.

证明　容易知道$f(y)\in f(y)-D$及条件$f(y+\eta(x,y,\lambda))\in f(x)-D$可知,$0,1\in A$.反设$A$在区间$[0,1]$中不稠密,则存在$\gamma_0\in(0,1)$和$\gamma_0$的邻域$N(\gamma_0)$使得$N(\gamma_0)\cap A=\varnothing$.定义$\gamma_1=\inf\{\gamma\in A\,|\,\gamma\geqslant\gamma_0\}$, $\gamma_2=\sup\{\gamma\in A\,|\,\gamma\leqslant\gamma_0\}$, 则有$0\leqslant\gamma_2<\gamma_1\leqslant 1$.因为$\{\alpha,(1-\alpha)\}\subset(0,1)$,所以可选择$v_1,v_2\in A$满足$v_1\geqslant\gamma_1,v_2\leqslant\gamma_2$使得$\max\{\alpha,(1-\alpha)\}(v_1-v_2)<\gamma_1-\gamma_2$.于是$v_2\leqslant\gamma_2<\gamma_1\leqslant v_1$.令$\bar{\gamma}=\alpha v_1+(1-\alpha)v_2$, 由条件 A,有

$$\begin{aligned}&y+v_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta(y+v_1\eta(x,y,\lambda),y+v_2\eta(x,y,\lambda),\lambda)=\\&\quad y+v_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta(y+v_1\eta(x,y,\lambda),y+v_1\eta(x,y,\lambda)-\\&\quad(v_1-v_2)\eta(x,y,\lambda),\lambda)=\\&\quad y+v_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta\Big(y+v_1\eta(x,y,\lambda),y+v_1\eta(x,y,\lambda)+\\&\quad\frac{v_1-v_2}{v_1}\eta(y,y+v_1\eta(x,y,\lambda),\lambda),\lambda\Big)=\\&\quad y+v_2\eta(x,y,\lambda)-\alpha\frac{v_1-v_2}{v_1}\eta(y,y+v_1\eta(x,y,\lambda),\lambda)=\\&\quad y+(v_2+\alpha(v_1-v_2))\eta(x,y,\lambda)=\\&\quad y+\bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&f(y+\bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda))=\\&\quad f(y+v_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta(y+v_1\eta(x,y,\lambda),y+v_2\eta(x,y,\lambda),\lambda))\in\\&\quad\alpha f(y+v_1\eta(x,y,\lambda))+(1-\alpha)f(y+v_2\eta(x,y,\lambda))-D\subset\\&\quad\alpha[v_1f(x)+(1-v_1)f(y)-D]+(1-\alpha)[v_2f(x)+(1-v_2)f(y)-D]-D=\\&\quad\bar{\gamma}f(x)+(1-\bar{\gamma})f(y)-D-D\subset\\&\quad\bar{\gamma}f(x)+(1-\bar{\gamma})f(y)-D.\end{aligned}$$

即有 $\bar{\gamma}\in A$,

如果$\bar{\gamma}\geqslant\gamma_0$,则$\bar{\gamma}-v_2=\alpha(v_1-v_2)<\gamma_1-\gamma_2$.从而$\bar{\gamma}<\gamma_1$.因为$\bar{\gamma}\geqslant\gamma_0$和$\bar{\gamma}\in A$,这与

γ_1 的定义矛盾.如果 $\bar{\gamma} \leqslant \gamma_0$,则 $\bar{\gamma} - v_1 = (1-\alpha)(v_2 - v_1) > \gamma_2 - \gamma_1$,所以 $\bar{\gamma} > \gamma_2$.由于 $\bar{\gamma} \leqslant \gamma_0$ 和 $\bar{\gamma} \in A$,这与 γ_2 的定义矛盾.

引理 2[13] $\forall q \in D^*, q(d) \geqslant 0 \Leftrightarrow d \in D$.

定理 1 设 K 是 X 中的关于 $\eta: X \times X \times [0,1] \to X$ 的开半不变凸集,其中 η 满足条件 A.若 $f: K \to Y$ 是 $*$-上半连续的且满足对任意的 $x, y \in K$, $f(y + \eta(x,y,\lambda)) \in f(x) - D$.则 f 在 K 上是 D-η- 半预不变凸映射的充要条件为存在 $\alpha \in (0,1)$, 使得

$$f(y + \alpha\eta(x,y,\lambda)) \in \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) - D, \qquad \forall x,y \in K, \forall \lambda \in [0,1].$$

证明 由 f 在 K 上是 D-η- 半预不变凸映射,可知必要性显然成立.下面只须证明充分性.如果假设成立且 f 不是 D-η- 半预不变凸映射,则存在 $x, y \in K, \lambda \in (0,1)$ 及 $\bar{\gamma} \in (0,1)$ 使得

$$f(y + \bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda)) \notin \bar{\gamma} f(x) + (1-\bar{\gamma})f(y) - D. \tag{1}$$

令 $z = y + \bar{\gamma}\eta(x, y, \lambda)$, 由引理 1 可知存在序列 $\{\gamma_n\}$ 满足 $\gamma_n \in A$ 且 $\gamma_n < \bar{\gamma}$ 使得 $\gamma_n \to \bar{\gamma}(n \to \infty)$.定义 $y_n = y + ((\bar{\gamma} - \gamma_n)/(1-\gamma_n))\eta(x,y,\lambda)$.则 $y_n \to y(n \to \infty)$.注意 K 是关于 η 的开半不变凸集,所以当 n 充分大时,有 $y_n \in K$.则由条件 A,有

$$\begin{aligned} & y_n + \gamma_n\eta(x,y_n,\lambda) = \\ & \quad y + \left(\frac{\bar{\gamma} - \gamma_n}{1-\gamma_n}\right)\eta(x,y,\lambda) + \gamma_n\eta\left(x, y + \left(\frac{\bar{\gamma} - \gamma_n}{1-\gamma_n}\right)\eta(x,y,\lambda), \lambda\right) = \\ & \quad y + \bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda) = z. \end{aligned}$$

由于 $\gamma_n \in A$, 故

$$\begin{aligned} & f(z) = f(y + \bar{\gamma}\eta(x,y,\lambda)) = \\ & \quad f(y_n + \gamma_n\eta(x,y_n,\lambda)) \in \gamma_n f(x) + (1-\gamma_n)f(y_n) - D. \end{aligned}$$

由 f 在 K 上的 $*$-上半连续性, 可知对每一个 $q \in D^*$, $q \circ f(\cdot)$ 是上半连续的.因此, 对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$ 使得

$$q \circ f(y_n) \leqslant q \circ f(y) + \varepsilon, \qquad \forall n > N.$$

于是

$$\begin{aligned} & q \circ f(z) \leqslant \gamma_n q \circ f(x) + (1-\gamma_n) q \circ f(y_n) \leqslant \\ & \quad \gamma_n q \circ f(x) + (1-\gamma_n)[q \circ f(y) + \varepsilon] \to \\ & \quad \bar{\gamma} q \circ f(x) + (1-\bar{\gamma})[q \circ f(y) + \varepsilon] \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可充分小,于是对所有的 $q \in D^*$, 有

$$q \circ f(z) \leqslant \bar{\gamma} q \circ f(x) + (1-\bar{\gamma}) q \circ f(y).$$

由 q 的线性性及引理 2,可得

$$f(z) \in \bar{\gamma} f(x) + (1-\bar{\gamma})f(y) - D. \tag{2}$$

这与式(1)矛盾.即结论得证.

注 3 如果向量值映射 $f: S \to Y$ 退化为标量函数 $f: S \to \mathbf{R}$,且 $D = \{\alpha \geqslant 0: \alpha \in \mathbf{R}\}$, 则定理 1 就退化为文献[4]中提出的半预不变凸函数的判定定理.

3 D-η- 半预不变凸性与相关广义凸性的关系

本节将对 D-η- 半预不变凸映射与 D-η- 严格半预不变凸映射、D-η- 半严格半预不变凸映射的关系进行讨论.

定理 2 设 K 是 X 中关于 $\eta: X \times X \times [0,1] \to X$ 的非空半不变凸集,其中 η 满足条件 A.假

设 $f:K\to Y$ 是 D-η- 半预不变凸映射,且存在 $\alpha\in(0,1)$,对任意的 $x,y\in K,x\neq y$ 满足

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\operatorname{int}D,\qquad\forall\lambda\in[0,1].$$

则 f 在 K 上是 D-η- 严格半预不变凸映射.

证明　假设 f 不是 D-η- 严格半预不变凸映射,则存在 $\lambda\in(0,1)$,$x,y\in K(x\neq y)$,$\gamma\in(0,1)$ 使得

$$f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))\notin\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)-\operatorname{int}D.$$

选取 β_1,β_2 满足 $0<\beta_1<\beta_2<1$ 使得 $\gamma=\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2$.令 $\bar{x}=y+\beta_1\eta(x,y,\lambda)$,$\bar{y}=y+\beta_2\eta(x,y,\lambda)$.因为 f 是 D-η- 半预不变凸的,则有

$$\begin{cases}f(\bar{x})\in\beta_1f(x)+(1-\beta_1)f(y)-D,\\f(\bar{y})\in\beta_2f(x)+(1-\beta_2)f(y)-D.\end{cases}\tag{3}$$

由条件 A 得

$$\begin{aligned}&\bar{y}+\alpha\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda)=\\&\quad y+\beta_2\eta(x,y,\lambda)+\\&\quad\alpha\eta(y+\beta_1\eta(x,y,\lambda),y+\beta_1\eta(x,y,\lambda)+(\beta_2-\beta_1)\eta(x,y,\lambda),\lambda)=\\&\quad y+\beta_2\eta(x,y,\lambda)+\alpha\eta\Big(y+\beta_1\eta(x,y,\lambda),y+\beta_1\eta(x,y,\lambda)+\\&\quad\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\eta(x,y+\beta_1\eta(x,y,\lambda),\lambda),\lambda\Big)=\\&\quad y+\beta_2\eta(x,y,\lambda)-\alpha\frac{\beta_2-\beta_1}{1-\beta_1}\eta(x,y+\beta_1\eta(x,y,\lambda),\lambda)=\\&\quad y+(\beta_2-\alpha(\beta_2-\beta_1))\eta(x,y,\lambda)=\\&\quad y+\gamma\eta(x,y,\lambda).\end{aligned}$$

即,$\bar{y}+\alpha\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda)=y+\gamma\eta(x,y,\lambda)$.据假设有

$$f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))=f(\bar{y}+\alpha\eta(\bar{x},\bar{y},\lambda))\in\alpha f(\bar{x})+(1-\alpha)f(\bar{y})-\operatorname{int}D.$$

于是由式(3)可得

$$\begin{aligned}f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))&\in\alpha[\beta_1f(x)+(1-\beta_1)f(y)-D]+\\&\quad(1-\alpha)[\beta_2f(x)+(1-\beta_2)f(y)-D]-\operatorname{int}D\subset\\&\quad(\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2)f(x)+(1-\alpha\beta_1-(1-\alpha)\beta_2)f(y)-\operatorname{int}D=\\&\quad\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)-\operatorname{int}D.\end{aligned}$$

这与假设矛盾,所以 f 在 K 上是 D-η- 严格半预不变凸映射.

注 4　定理 2 将文献[13]中定理 5.3.1 推广到 D-η- 半预不变凸情形,且去掉了定理 5.3.1 中所要求的 $f(y+\eta(x,y))\in f(x)-D(\forall x,y\in K)$ 假设.

定理 3　设 K 是 X 中的关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to X$ 的非空半不变凸集,其中 η 满足条件 A.$f:K\to Y$ 是 D-η- 半预不变凸映射,若对任意的 $x,y\in K$, $f(x)\neq f(y)$,存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得

$$f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))\in\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\operatorname{int}D,\qquad\forall\lambda\in[0,1],\tag{4}$$

则 f 是 K 上的 D-η- 半严格半预不变凸映射.

证明　由假设,对任意的 $x,y\in K$, $f(x)\neq f(y)$ 和 $\gamma\in(0,1)$,有

$$f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))\in\gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)-D,\qquad\forall\lambda\in[0,1].\tag{5}$$

(I) 若 $\gamma\leqslant\alpha$,则由条件 A,有

$$
\begin{aligned}
& y+\frac{\gamma}{\alpha}\eta(y+\alpha\eta(x,y,\lambda),y,\lambda)= \\
& \quad y+\frac{\gamma}{\alpha}\eta(y+\alpha\eta(x,y,\lambda),y+\alpha\eta(x,y,\lambda)-\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda)= \\
& \quad y+\frac{\gamma}{\alpha}\eta(y+\alpha\eta(x,y,\lambda),y+\alpha\eta(x,y,\lambda)+\eta(y,y+\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda),\lambda)= \\
& \quad y-\frac{\gamma}{\alpha}\eta(y,y+\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda)= \\
& \quad y+\gamma\eta(x,y,\lambda).
\end{aligned}
$$

由式(4)、(5)及 f 的 D-η- 半预不变凸性,可得

$$
\begin{aligned}
& f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))= \\
& \quad f\left(y+\frac{\gamma}{\alpha}\eta(y+\alpha\eta(x,y,\lambda),y,\lambda)\right)\in \\
& \quad \frac{\gamma}{\alpha}f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))+\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)f(y)-D\subset \\
& \quad \frac{\gamma}{\alpha}[\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\operatorname{int}D]+\left(1-\frac{\gamma}{\alpha}\right)f(y)-D\subset \\
& \quad \gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)-\operatorname{int}D.
\end{aligned}
$$

(Ⅱ) 若 $\gamma>\alpha$,即有 $0<(1-\gamma)/(1-\alpha)<1$.于是由条件 A,得

$$
\begin{aligned}
& y+\alpha\eta(x,y,\lambda)+\left(1-\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)\eta(x,y+\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda)= \\
& \quad y+\gamma\eta(x,y,\lambda).
\end{aligned}
$$

由式(4)和式(5)及 f 的 D-η- 半预不变凸性有

$$
\begin{aligned}
& f(y+\gamma\eta(x,y,\lambda))= \\
& \quad f\left(y+\alpha\eta(x,y,\lambda)+\left(1-\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)\eta(x,y+\alpha\eta(x,y,\lambda),\lambda)\right)\in \\
& \quad \frac{1-\gamma}{1-\alpha}f(y+\alpha\eta(x,y,\lambda))+\left(1-\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)f(x)-D\subset \\
& \quad \frac{1-\gamma}{1-\alpha}[\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)-\operatorname{int}D]+\left(1-\frac{1-\gamma}{1-\alpha}\right)f(x)-D\subset \\
& \quad \gamma f(x)+(1-\gamma)f(y)-\operatorname{int}D.
\end{aligned}
$$

综上可得 f 是 K 上的 D-η- 半严格半预不变凸映射

注 5 当 $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$ 时,D-η- 半预不变凸映射就退化为 D- 预不变凸映射.显然,上述结果推广了文献[10]中关于 D- 预不变凸映射的相应结果.

4 D-η- 半预不变凸性在优化问题中的应用

考虑如下的隐约束向量优化问题:

(VP) $\min_{x\in K}f(x)$.

首先给出向量优化中的关于解的一个基本定义.

定义 6 令 $f(K)=\cup_{x\in K}f(x)$.

(i) 称点 $\bar{x} \in K$ 是(VP)的全局有效解,如果 $(f(\bar{x}) - D\setminus\{0_Y\}) \cap f(K) = \varnothing$.称点 $\bar{x} \in K$ 是(VP)的局部有效解,如果存在 $\bar{x}$ 的邻域 U 使得 $(f(\bar{x}) - D\setminus\{0_Y\}) \cap f(K \cap U) = \varnothing$.

(ii) 称 $\bar{x}$ 为(VP)的全局弱有效解,若 $\bar{x} \in K$ 且 $(f(\bar{x}) - \operatorname{int} D) \cap f(K) = \varnothing$.称 $\bar{x}$ 为(VP)的局部弱有效解,若存在 $\bar{x} \in K$ 且存在邻域 $U \subset X$,使得 $(f(\bar{x}) - \operatorname{int} D) \cap f(K \cap U) = \varnothing$.

下面给出 D-η- 半严格半预不变凸映射在向量优化中的应用.

定理 4　设 K 是 X 中的关于 $\eta: X \times X \times [0,1] \to X$ 的半不变凸集,$f: K \to Y$ 是一向量值映射.若 f 是 K 上的 D-η- 半严格半预不变凸映射,则向量优化问题(VP)的局部有效解一定也是(VP)的全局有效解.

证明　若 $\bar{x}$ 是(VP)的局部有效解,则存在 $\bar{x}$ 的邻域 U 使得

$$(f(\bar{x}) - D\setminus\{0_Y\}) \cap f(K \cap U) = \varnothing. \tag{6}$$

假设 $\bar{x}$ 不是(VP)的全局有效解,即 $(f(\bar{x}) - D\setminus\{0_Y\}) \cap f(K) \neq \varnothing$.则存在 $x \in K$ 满足 $f(x) \in f(\bar{x}) - D\setminus\{0_Y\}$.由于 K 是关于 η 的半不变凸集且 $f: K \to Y$ 是 D-η- 半严格半预不变凸映射,则对任意的 $\alpha \in (0,1)$,$\lambda \in [0,1]$,有 $\bar{x} + \alpha\eta(x,\bar{x},\lambda) \in K$ 且

$$\begin{aligned} & f(\bar{x} + \alpha\eta(x,\bar{x},\lambda)) \in \\ & \quad \alpha f(x) + (1-\alpha) f(\bar{x}) - \operatorname{int} D \subset \\ & \quad \alpha(f(\bar{x}) - D\setminus\{0_Y\}) + (1-\alpha) f(\bar{x}) - \operatorname{int} D \subset f(\bar{x}) - D\setminus\{0_Y\}. \end{aligned}$$

即,对任意的 $\alpha \in (0,1)$,$\lambda \in [0,1]$,有

$$f(\bar{x} + \alpha\eta(x,\bar{x},\lambda)) \in f(\bar{x}) - D\setminus\{0_Y\}. \tag{7}$$

$\lim_{\alpha\to 0} \bar{x} + \alpha\eta(x,\bar{x},\lambda) = \bar{x}$.因此存在 $\delta(1 > \delta > 0)$ 对所有的 $\alpha \in (0,\delta)$ 满足 $\bar{x} + \alpha\eta(x,\bar{x},\lambda) \in U \cap K$.则式(6)与式(7)矛盾,因此 $\bar{x}$ 是优化问题(VP)的全局有效解.

下面通过例 4 来验证定理 4 的正确性.

例 4　令 $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$,
其中

$$f_1(x) = \begin{cases} -|x|/2, & |x| \leqslant 1; \\ -1/2, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -2|x|, & |x| \leqslant 1; \\ -2, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\eta(x,y,\lambda) = \begin{cases} x - y + \lambda, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \\ x - y - \lambda, & x \leqslant 0,\ y \leqslant 0; \\ x - y + \lambda, & x > 1,\ y < -1; \\ x - y - \lambda, & x < -1,\ y > 1; \\ y - x + \lambda, & -1 \leqslant x \leqslant 0,\ y \geqslant 0; \\ y - x - \lambda, & -1 \leqslant y \leqslant 0,\ x \geqslant 0; \\ y - x - \lambda, & 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \leqslant 0; \\ y - x + \lambda, & 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x \leqslant 0. \end{cases}$$

由定义 3,显然 f 是 K 上的 D-η- 半严格半预不变凸映射.由局部/全局有效解的定义可验证 $\bar{x} = (1,1)$ 是优化问题(VP)的一个局部有效解,也是(VP)的全局有效解,故定理 4 可行.

注 6　利用与定理 4 类似的方法,我们还可以获得关于优化问题(VP)的全局弱有效解的充分条件.

5 结 语

本文提出了 D-η- 半预不变凸映射,说明它的存在性,给出此类映射的判定及关系刻画,并讨论其在隐约束优化问题中的应用,所得结果推广了文献[6-7,10-13]中相应结果.那么能否研究此类映射在约束(显约束)向量优化问题中的应用?这将是有待研究的后续课题!

参考文献(References):

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1981, **80**(2): 545-550.

[2] Ben-Israel A, Mond B. What is invexity? [J]. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 1986, **28**: 1-9.

[3] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 1988, **38**: 177-189.

[4] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **256**(1): 229-241.

[5] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, **258**(1): 287-308.

[6] Yang X Q, Chen G Y. A class of nonconvex functions and pre-variational inequalities[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, **169**(2): 359-373.

[7] Peng Z Y, Chang S S. Some properties of semi-G-preinvex functions[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2013, **17**(3): 873-884.

[8] Antczak T. G-pre-invex functions in mathematical programming[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, **217**(1): 212-226.

[9] Kazmi K R. Some remarks on vector optimization problems[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1998, **96**(1): 133-138.

[10] Peng J W, Zhu D L. On D-preinvex-type functions[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2006, **2006**: 093532. doi: 10.1155/JIA/2006/93532.

[11] Long X J, Peng Z Y, Zeng B. Remark on cone semistrictly preinvex functions[J]. *Optimization Letters*, 2009, **3**(3): 337-345.

[12] 彭建文. 向量值映射 D-η- 预不变真拟凸的性质[J]. 系统科学与数学, 2003, **23**(3): 306-314. (PENG Jian-wen. Properties of D-η- properly prequasi-invex functions[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2003, **23**(3): 306-314.(in Chinese))

[13] 彭建文. 广义凸性及其在最优化问题中的应用[D]. 博士学位论文. 呼和浩特: 内蒙古大学理工学院, 2005.(PENG Jian-wen. Generalized convexity with application optimization problems [D]. PhD Thesis. Hohhot: Inner Mongolia University, 2005.(in Chinese))

Characterizations and Applications of D-η- Semipreinvex Mappings

PENG Zai-yun[1], WANG Kun-ying[1], ZHAO Yong[2], ZHANG Shi-sheng[3]

(1. *School of Science*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*;

2. *School of Mathematics Science*, *Chongqing Normal University*, *Chongqing* 401331, *P.R.China*;

3. *Department of Statistics and Mathematics*, *Yunnan University of Finance and Economics*, *Kunmin* 650224, *P.R.China*)

(Contributed by ZHANG Shi-sheng, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A class of new vector valued generalized convex mappings— D-η- semipreinvex mappings, which was a true generalization of D- preinvex mapping, was given. Firstly, examples were given to show the existence of D-η- semipreinvexmappings and illustrate the differences between D-η- semistrictly semi-preinvex and D-η- semipreinv exmapping. Secondly, a criterion of D-η- semipreinv exity was given, and the relationships among D-η- semipreinvexity, D-η- strict semipreinvexity and D-η- semistrict semipreinvexity were discussed. Finally, an important application of D-η- semistrict semipreinvexity in vector optimization was discussed, then give an example was given to illustrate the result.

Key words: D-η- semipreinvex mappings; criterion; vector optimization; applications

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11271389; 11301571)