

反演极限与 Lauwerier 吸引子(I)^{*}

郭 峰, 李登辉, 谢建华

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

摘要: 通过研究两维的 Lauwerier 映射,得到 Lauwerier 奇怪吸引子的一个解析表达式.研究了二次映射的反演极限空间上移位映射的动力学性质,建立了投影映射,运用反演极限空间理论研究 Lauwerier 映射,证明了 Lauwerier 映射限制在其吸引子上与二次映射的反演极限上的移位映射是拓扑半共扼的,从而得到 Lauwerier 吸引子是 Devaney 意义下混沌的.

关键词: Lauwerier 映射; 不稳定流形; 奇怪吸引子; 反演极限; 移位映射

中图分类号: O189; O313 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.02.009

引 言

近些年来,混沌动力学理论的研究有了很大地发展,与之密切相关的是人们发现了混沌运动中的奇怪吸引子,它是 1971 年由 Ruelle 和 Takens^[1]提出来的.在很多实际工程问题中,如碰撞振动、干摩擦^[2-3]等一些非光滑的系统都有复杂的动力学行为,其中会蕴含着奇怪吸引子.系统的吸引子理论是混沌动力学的重要组成部分,是混沌运动的主要特征之一.对于奇怪吸引子的研究,有助于了解混沌系统中存在形态的规律问题.研究奇怪吸引子的结构及它的动力学性质成了研究混沌的基本课题,将有助于研究系统的全局动力学性质.

1963 年, Lorenz 在研究对流实验时,将无穷维动力系统 Rayleigh-Benard 热对流问题进行三维截断而得到了 Lorenz 吸引子^[4], Guckenheimer^[5]引入了 Lorenz 方程的几何模型,建立 Poincaré 映射进行研究, Guckenheimer 和 Williams^[6]利用文献[5]的几何模型对 Lorenz 吸引子的结构进一步地研究,运用揉搓理论和文献[7]中提出的反演极限空间理论研究了吸引子的动力学性质. Misiurewicz^[8]研究了分段线性 Lozi 映射,证明了当参数满足一些取值范围时, Lozi 映射存在奇怪吸引子,并从几何和拓扑的角度刻划了吸引域和吸引子的形状,证明了该吸引子的双曲性. Cao 等(曹永罗、刘曾荣)在文献[9]中对参数 $b < 0$ 时保向的 Lozi 映射研究表明,也存在着奇怪吸引子,证明了(弱)横截同宿点在吸引子中是稠密的. 2009 年,文献[10]对一定参数下,构造描述了 Lozi 映射的吸引域的特征. Lauwerier^[11]构造了一个平面映射,证明该映射在一定的参数区域内存在一个奇怪吸引子,给出了该吸引子的解析表达式. 刘曾荣等^[12]在文献[11]研究的基础上完善了对 Lauwerier 奇怪吸引子的研究.

Williams 首先在文献[13]中用反演极限来研究扩张吸引子,研究了 n 维螺线管扩张吸引

* 收稿日期: 2013-09-17; 修订日期: 2013-12-05

基金项目: 国家自然科学基金(11172246; 11272268)

作者简介: 郭峰(1976—)男,山东人,博士生(通讯作者. E-mail: mathguofeng@163.com).

子,证明了该吸引子与螺线管映射的反演极限是拓扑共轲的.文献[6]将反演极限理论应用到对 Lorenz 吸引子的研究中,文献[14]对反演极限空间的基本动力学性质进行了研究;最近几年,Keesling^[15]研究了单位区间上帐篷映射的反演极限的动力学性质,Raines 和 Stimac^[16]对一类没有回归临界点的帐篷映射的反演极限进行了详细地研究.

本文运用定义的二次映射的反演极限来研究 Lauwerier 映射的动力学行为,证明了二次映射的反演极限与 Lauwerier 吸引子是拓扑半共轲的,从而可知 Lauwerier 吸引子是 Devaney 意义下混沌的.

1 Lauwerier 吸引子

Lauwerier 考虑了正方形区域 $Q = [0,1] \times [0,1]$ 上如下形式的映射:

$$F: \begin{cases} x_{n+1} = bx_n(1 - 2y_n) + y_n, \\ y_{n+1} = 4y_n(1 - y_n), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $0 < b < 1/2$. 映射(1)把垂直线段 $0 \leq y \leq 1, x = \xi$ 映成抛物线:

$$y = 1 - \left(\frac{1 - 2x}{1 - 2b\xi} \right)^2. \quad (2)$$

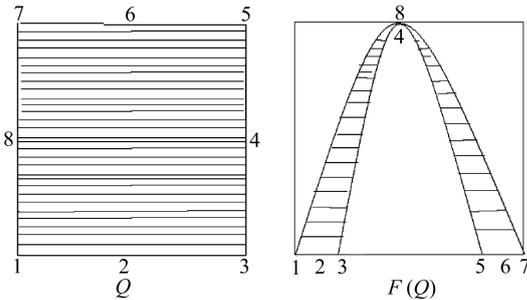


图1 Q 和 $F(Q)$

Fig.1 Q and $F(Q)$

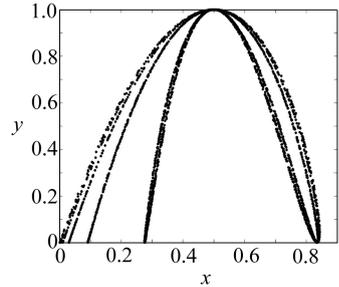


图2 $b = 0.33$ 时 Lauwerier 映射的奇怪吸引子

Fig.2 The strange attractor of Lauwerier mapping ($b = 0.33$)

把水平线段 $0 \leq x \leq 1, y = \eta$ 映成水平线段 $\eta \leq x \leq \eta + b(1 - 2\eta), y = 4\eta(1 - \eta)$, 形成一个类似 Smale 马蹄形状的像 $F(Q)$, 见图 1. 并且有 $F(Q) \subset Q$. F 有两个不动点 $(0,0)$ 和 $(3/(4 + 2b), 3/4)$, F 的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} b(1 - 2y) & 1 - 2bx \\ 0 & 4(1 - 2y) \end{pmatrix},$$

当 $0 < b < 1/2$ 时, 两个不动点均为鞍点, 除点 $(1/2, 1)$ 外, 对任何 $Z \in F(Q)$ 其原像是唯一的, 而点 $(1/2, 1)$ 的原像是水平线段 $0 \leq x \leq 1, y = 1/2$.

作如下变换:

$$T: \begin{cases} 2bx_n = b - (1 - b)u_n, \\ 2y_n = 1 - v_n; \end{cases} \quad (3a)$$

$$T^{-1}: \begin{cases} u_n = b(1 - 2x_n)/(1 - b), \\ v_n = 1 - 2y_n. \end{cases} \quad (3b)$$

式(1)化为

$$\tilde{F}: \begin{cases} u_{n+1} = bv_n(1 + u_n), \\ v_{n+1} = 2v_n^2 - 1, \end{cases} \quad \tilde{F} = T^{-1} \circ F \circ T, \quad (4)$$

这里 \tilde{F} 是定义在 $T^{-1}(Q) = \tilde{Q}, \tilde{Q} = \{(u, v) \mid |u| \leq b/(1-b), |v| \leq 1\}$ 上的. 对式(3)进行迭代, 再取极限得到

$$A_0: \begin{cases} u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^k \frac{\sin t}{\sin(2^{-k}t)}, \\ v(t) = \cos t. \end{cases} \quad (5)$$

再由式(3)的变换, 将式(5)带回原来的变量, 就可得到 F 的不变曲线 A 的表达式为

$$A: \begin{cases} 2x = 1 - \left(\frac{1}{b} - 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^k \frac{\sin t}{\sin(2^{-k}t)}, \\ 2y = 1 - \cos t. \end{cases} \quad (6)$$

由吸引子的定义和文献[12]的分析, 可知对 Q 内任一点 x , 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $F^n(x) \rightarrow \bar{A}$, 不变曲线 A 的闭包 \bar{A} 构成了 Lauwerier 吸引子. 图 2 中, 当参数 $b = 0.33$ 时, 数值模拟得到 Lauwerier 映射的奇怪吸引子, 它具有自相似和分形等复杂的动力学行为.

2 二次映射的反演极限

以下用文献[8]中提出的反演极限空间对 F 的性质进行讨论, 定义二次映射 $f: I \rightarrow I, I = [0, 1], f(y) = 4y(1-y)$ 的反演极限空间.

定义 1 记 $\Sigma = \{\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \mid t_j \in I: f(t_{j+1}) = t_j\}$, 其中对每个 j, t_{j+1} 是 t_j 的原像, 即 $f(t_{j+1}) = t_j$, 在 Σ 上定义映射 $\hat{f}(t_0, t_1, t_2, \dots) = (f(t_0), t_0, t_1, t_2, \dots)$, (Σ, \hat{f}) 称为 $f: I \rightarrow I$ 的反演极限.

在 Σ 上定义距离 $d(\underline{t}, \underline{\tilde{t}}) = \sum_{j=0}^{\infty} |t_j - \tilde{t}_j|/2^j$, 其中

$$\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots), \underline{\tilde{t}} = (\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \dots) \in \Sigma,$$

对每一个 $j \geq 0$, 定义投影 $\pi_j: \Sigma \rightarrow I$, 即

$$\pi_j(\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)) = t_j,$$

π_j 是连续的开映射, 且 $\pi_j \circ \hat{f} = f \circ \pi_j$.

定理 1 (Σ, \hat{f}) 是一个同胚, \hat{f} 的周期点在 Σ 中稠密, 且在 Σ 上是拓扑传递的.

2.1 证明 (Σ, \hat{f}) 是一个同胚

2.1.1 (Σ, \hat{f}) 是一致连续的

由于 f 在 I 上是一致连续的, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 且 $\delta < \varepsilon$, 对任何的 $|t_0 - \tilde{t}_0| < \delta$, 有

$$|f(t_0) - f(\tilde{t}_0)| < \varepsilon/2. \quad (7)$$

对任何的 $\underline{t}, \underline{\tilde{t}}$, 若 $d(\underline{t}, \underline{\tilde{t}}) < \delta$, 则

$$d(\hat{f}(\underline{t}), \hat{f}(\underline{\tilde{t}})) = |f(t_0) - f(\tilde{t}_0)| + \frac{1}{2} d(\underline{t}, \underline{\tilde{t}}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad (8)$$

因此 (Σ, \hat{f}) 是一致连续的.

2.1.2 (Σ, \hat{f}) 是一对一的

若两个序列 $\underline{t} \neq \underline{\tilde{t}}$, 则一定会存在 j , 使得 $t_j \neq \tilde{t}_j$, 由反演极限的定义可知

$$(\hat{f}(\underline{t}))_{j+1} \neq (\hat{f}(\underline{\tilde{t}}))_{j+1}, \quad (9)$$

所以 $\hat{f}(\underline{t}) \neq \hat{f}(\underline{\tilde{t}})$, 即 \hat{f} 是一对一的.

2.1.3 (Σ, \hat{f}) 是满的

设 $\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma$, 则有 $f(t_1) = t_0$, 取 $\underline{t}' = (t_1, t_2, t_3, \dots) \in \Sigma$, 由定义得 $\hat{f}(\underline{t}') = \underline{t}$, 所以 (Σ, \hat{f}) 是满的.

2.1.4 \hat{f}^{-1} 是连续的

由定义 $\hat{f}(t_0, t_1, t_2, \dots) = (f(t_0), t_0, t_1, t_2, \dots)$, 可知 $\hat{f}^{-1}(t_0, t_1, t_2, \dots) = (t_1, t_2, t_3, \dots)$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$. 令 $\delta < \varepsilon/2$, 对任何的 $\underline{t}, \underline{\tilde{t}}$, 若 $d(\underline{t}, \underline{\tilde{t}}) < \delta$, 则

$$\begin{aligned} d(\hat{f}^{-1}(\underline{t}), \hat{f}^{-1}(\underline{\tilde{t}})) &= |t_1 - \tilde{t}_1| + |t_2 - \tilde{t}_2|/2 + |t_3 - \tilde{t}_3|/2^2 + \dots = \\ &= 2(|t_1 - \tilde{t}_1|/2 + |t_2 - \tilde{t}_2|/2^2 + |t_3 - \tilde{t}_3|/2^3 + \dots) = \\ &= 2(d(\underline{t}, \underline{\tilde{t}}) - |t_0 - \tilde{t}_0|) < 2\delta < \varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

故 \hat{f}^{-1} 是连续的.

2.1.5 Σ 是紧致的

由定义 $\Sigma = \prod_{j=1}^{\infty} I_j$, ($I_j = I, j = 1, 2, 3, \dots$), Σ 是可列个紧致集的积, 所以是紧致的.

由 2.1.1~2.1.5, 可知 (Σ, \hat{f}) 是同胚.

2.2 证明 \hat{f} 的周期点在 Σ 中稠密

根据定义 1 可知, 对任意的序列 \underline{t} 有

$$\begin{aligned} \underline{t} &= (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots) = (f(t_1), t_1, t_2, \dots, t_n, \dots) = \\ &= (f^2(t_2), f(t_2), \dots, t_n, \dots), \end{aligned} \quad (11)$$

递推式(11), 序列 \underline{t} 变为

$$\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots) = (f^n(t_n), f^{n-1}(t_n), \dots, t_n, \dots) \in \Sigma. \quad (12)$$

设非空开集 $\tilde{U} \subset \Sigma$ 是 t 的 ε 邻域, 取充分大的 n , 使 $\sum_{j=n+1}^{\infty} 1/2^j < \varepsilon/2$, 由于 f 的周期点在 I 中稠密, 一定存在一个与 t_n 接近 f 的周期点 t_m , 假设其周期为 N , 即 $f^N(t_m) = t_m$. 由反演极限的定义和式(12)的关系可知, t_m 的所有原像组成的序列中必存在一个序列是周期性的. 取序列

$$\underline{\tilde{t}} = (f^n(t_m), f^{n-1}(t_m), \dots, t_m, f^{N-1}(t_m), f^{N-2}(t_m), \dots, t_m, \dots), \quad (13)$$

则有 $\hat{f}^N(\underline{\tilde{t}}) = \underline{\tilde{t}}$. 由 t_n 与 t_m 充分地接近及 f 的连续性, 所以

$$\sum_{j=0}^n |f^{n-j}(t_n) - f^{n-j}(t_m)|/2^j < \varepsilon/2, \text{ 且 } \sum_{j=n+1}^{\infty} 1/2^j = 1/2^n < \varepsilon/2$$

成立.

那么

$$\begin{aligned} d(\underline{t}, \underline{\tilde{t}}) &= \sum_{j=0}^{\infty} |f^{n-j}(t_n) - f^{n-j}(t_m)|/2^j \leq \\ &= \sum_{j=0}^n |f^{n-j}(t_n) - f^{n-j}(t_m)|/2^j + \sum_{j=n+1}^{\infty} 1/2^j < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned} \quad (14)$$

从而 $\underline{\tilde{t}} \in \tilde{U} \subset \Sigma$, 所以 \hat{f} 的周期点在 Σ 中是稠密的.

2.3 证明 \hat{f} 在 Σ 上是拓扑传递的

设 $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \Sigma$ 且为非空开集, 则存在 $\tilde{t} \in \tilde{V}$ 及一个小球形邻域 $O(\tilde{t}, \delta) \subset \tilde{V}$, 对充分大的 n , 使 $1/2^n < \delta/2$, π_n 是开映射, $\pi_n(\tilde{U}), \pi_n(O(\tilde{t}, \delta))$ 是 I 的两个非空开集. 由于二次映射 f 在 I 上是拓扑传递的, 故存在整数 k , 使得

$$f^k(\pi_n(\tilde{U})) \cap \pi_n(O(\tilde{t}, \delta)) \neq \emptyset,$$

取 $\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \tilde{U}, \underline{\tilde{s}} = (\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots) \in O(\tilde{t}, \delta)$, 使 $f^k(t_n) = \tilde{s}_n$, 则有

$$\begin{cases} f^k(t_j) = \tilde{s}_j & (0 \leq j \leq n), \\ d(\hat{f}^k(\underline{t}), \underline{\tilde{s}}) \leq d(\hat{f}^k(\underline{t}), \underline{\tilde{s}}) + d(\underline{\tilde{s}}, \underline{\tilde{t}}) \leq \\ \sum_{j=0}^n d(\hat{f}^k(t_j), \tilde{s}_j)/2^j + \sum_{j=n+1}^{\infty} d(\hat{f}^k(t_j), \tilde{s}_j)/2^j + \delta/2 < \delta. \end{cases} \quad (15)$$

所以 $\hat{f}^k(\underline{t}) \in O(\tilde{t}, \delta) \subset \tilde{V}$, 即 $\hat{f}^k(\tilde{U}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, 因而 \hat{f} 在 Σ 上是拓扑传递的.

3 Lauwerier 吸引子与二次映射的反演极限的关系

为了讨论 Λ 的动力学性质, 将单位区域 Q 沿着水平方向纤维化, 任意的点 $p \in Q, I_p$ 表示过 p 点的纤维. 映射 F 沿着纤维方向是压缩的, 所以有 $F(I_p) \subset I_{F(p)}$.

定义映射 $\varphi: \Sigma \rightarrow \bar{\Lambda}$ 如下: 任取 $\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma$, 令 $\varphi(\underline{t}) = p$, 使得

$$F(I_{t_{k+1}}) \subset I_{t_k}, p \in \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(I_{t_k}),$$

其中 I_{t_k} 为 Q 上 t_k 对应的纤维.

定理 2 φ 是 (Σ, \hat{f}) 到 $(\bar{\Lambda}, F)$ 的一个拓扑半共轭.

3.1 证明 $\varphi \circ \hat{f} = F \circ \varphi$

任取 $\underline{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in \Sigma$, 令 $\varphi(\underline{s}) = p$, 即 $p \in \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(I_{s_k})$, 显然右边 $F \circ \varphi(\underline{s}) = F(p)$, 由 φ 的定义, 左边

$$\begin{aligned} \varphi(f(s_0), s_0, s_1, \dots) &= I_{f(s_0)} \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F^k(I_{s_{k-1}}) \right) = \\ &= I_{f(s_0)} \cap \{F(p)\} = F(p), \end{aligned} \quad (16)$$

因此有 $\varphi \circ \hat{f} = F \circ \varphi$.

3.2 证明 φ 是 Σ 到 $\bar{\Lambda}$ 的一个满射

定义投影 $\pi: Q \rightarrow I, \pi(z) = y, \forall z = (x, y) \in Q, y \in I$, 有 $f(y) = \pi F(\pi^{-1}(y))$, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, $F^k(\pi^{-1}(\pi(z)))$ 的宽度趋于 0.

取 $p \in \bar{\Lambda}$, 任意取一个序列 $(p, F^{-1}(p), F^{-2}(p), \dots)$, 其中 $F^{-j}(p)$ 是 p 的 j 阶原像之一, 由于 Q 内任一点 x , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $F^n(x) \rightarrow \bar{\Lambda}$, 所以 $F^{-j}(p)$ 必为 Q 的某一纤维上的一点. 此序列在 y 坐标轴上的投影为 $\underline{s} = (s_0, s_1, s_2, \dots)$, 其中 $s_k = \pi F^{-k}(p)$, 显然有 $s_k = f(s_{k+1})$, 故 $\underline{s} \in \Sigma$. 又由于对任意的 $k \in \mathbf{N}_+$, 有 $F^{-k}(p) \in I_{s_k}$, 即 $p \in F^k(I_{s_k})$, 从而 $p \in \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(I_{s_k})$, 由 $f(s_{k+1}) = s_k$, 可知 $F(I_{s_{k+1}}) \subset I_{s_k}$, 因为 F 沿着纤维方向压缩, 故无穷交集 $\bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(I_{s_k})$ 为一个点, 所以

$$\varphi(\underline{s}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(I_{s_k}) = p, \quad (17)$$

这就证明了 φ 是一个满射.

3.3 证明 φ 是连续的

任取两个序列 $\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots), \underline{t}' = (t'_0, t'_1, t'_2, \dots) \in \Sigma$, 令 $\varphi(\underline{t}) = p, \varphi(\underline{t}') = p'$. 不妨设 $t_k = t'_k (k = 0, 1, 2, \dots, N)$, 此时有 $I_{t_k} = I_{t'_k} (k = 0, 1, 2, \dots, N)$. 又因为 $F^{-k}(p) \in I_{t_k}, F^{-k}(p') \in I_{t'_k} (k = 0, 1, 2, \dots, N)$ 成立, 记 $I_{t_k} = I_{t'_k} = I_k (k = 0, 1, 2, \dots, N)$. 所以有 $p, p' \in \bigcap_{k=0}^N F^k(I_k)$, 由于映射 F 沿着纤维方向压缩, 且压缩率小于 b , 所以有

$$\ell\left(\bigcap_{k=0}^N F^k(I_k)\right) \leq b^N, \quad \text{这里 } \ell \text{ 表示长度.} \quad (18)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $d(p, p') \rightarrow 0$. 因而 φ 是连续的.

综上所述 φ 是从 (Σ, \hat{f}) 到 $(\bar{\Lambda}, F)$ 的拓扑半共轭.

4 结 论

本文研究了二次映射的反演极限空间上移位映射的动力学性质, 通过建立投影映射, 将两维的 Lauwerier 映射降成一维的二次映射, 运用反演极限空间理论研究 Lauwerier 映射, 证明了二次映射的反演极限与 Lauwerier 吸引子是拓扑半共轭的, 由半共轭的性质, 可知 Lauwerier 吸引子是 Devaney 意义下混沌的, 进一步研究了 Lauwerier 映射的动力学性质.

参考文献 (References):

- [1] Ruelle D, Takens F. On the nature of turbulence[J]. *Commun Math Phys*, 1971, **20**(3): 167-192.
- [2] 乐源, 谢建华. 一类双面碰撞振子的对称性尖点分岔与混沌[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(8): 991-998. (YUE Yuan, XIE Jian-hua. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of an impact oscillator between two rigid sides[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(8): 991-998. (in Chinese))
- [3] Leine R I, Nijmeijer H. *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*[M]. Berlin: Springer, 2004.
- [4] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. *Journal of Atmospheric Sciences*, 1963, **20**(2): 130-141.
- [5] Guckenheimer J. A strange, strange attractor[C]//Marsden J E, McCracken M eds. *The Hopf Bifurcation and Its Applications. Applied Mathematical Sciences*, Vol **19**. Springer-Verlag New York Inc, 1976: 368-381.
- [6] Guckenheimer J, Williams R F. Structure stability of Lorenz attractors [J]. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1979, **50**(1): 307-320.
- [7] Williams R F. One-dimensional non-wandering sets[J]. *Topology*, 1967, **6**(4): 473-487.
- [8] Misiurewicz M. Strange attractors for the Lozi mapping[J]. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1980, **375**: 348-358.
- [9] CAO Yong-luo, LIU Zeng-rong. Strange attractor in the orientation-preserving Lozi map[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1998, **9**(11): 1857-1863.
- [10] Baptista D, Severino R, Vinagre S. The basin of attraction of Lozi mapping[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2009, **19**(3): 1043-1049.
- [11] Lauwerier H A. The structure of a strange attractor[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, **21**(1): 146-154.

- [12] 刘曾荣, 秦文新, 谢惠民. Lauwerier 吸引子的结构和动力学行为[J]. 科学通报, 1992, **37**(14): 1269-1271. (LIU Zeng-rong, QIN Wen-xin, XIE Hui-min. The structure and dynamics of Lauwerier attractor[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1992, **37**(14): 1269-1271. (in Chinese))
- [13] Williams R F. Expanding attractors[J]. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1974, **43**(1): 169-203.
- [14] LI Shi-hai. Dynamical properties of the shift maps on the inverse limit space[J]. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1992, **12**(1): 95-108.
- [15] Keesling J. Attractors and inverse limits[J]. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicasy Naturales. Serie A. Matematicas*, 2008, **102**(1): 21-38.
- [16] Raines B E, Stimac S. A classification of inverse limit space of tent maps with a non-recurrent critical point[J]. *Algebraic and Geometric Topology*, 2009, **9**(2): 1049-1088.

Inverse Limit and Lauwerier Attractor(I)

GUO Feng, LI Deng-hui, XIE Jian-hua

(*School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P.R.China*)

Abstract: A two dimensional Lauwerier mapping was studied and an analytical expression of the strange attractor was obtained. The dynamic properties of the shift map on the inverse limit space of the quadratic mapping were investigated. The projection mapping was established. Then the Lauwerier mapping was studied based on the theory of inverse limit space. It is proved that the Lauwerier mapping restricted to its attractor is topologically semi-conjugate to the shift map on the inverse limit space of the quadratic mapping; therefore the Lauwerier strange attractor is chaotic in the sense of Devaney.

Key words: Lauwerier mapping; unstable manifold; strange attractor; inverse limit space; shift map

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11172246;11272268)