文章编号:1000-0887(2014)02-0219-07

ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

高应变率变形的 Johnson-Cook 动态 本构模型参数识别方法^{*}

柳爱群',黄西成2

(1. 鲁东大学 土木工程学院,山东 烟台 264025;2. 中国工程物理研究院 总体工程研究所,四川 绵阳 621900)

摘要: Johnson-Cook 动态模型是非常重要的材料模型,被广泛应用于冲击动力学数值模拟。通过 准静态单轴拉伸和单轴扭转试验获得应变硬化函数中的参数,给出 Johnson-Cook 模型中热软化参 数和应变强化参数的确定方法。采用最优化算法识别材料参数,算法上,在参数空间采用迭代求解, 寻找最优点使得实验数据与模型预测之间的偏差最小。讨论了考虑绝热温升影响的 JC 模型参数 m 的确定方法。

关键词: Johnson-Cook本构模型; 动态力学特性; 流动应力; 高应变率; 参数识别
 中图分类号: 0346.5 文献标志码: A
 doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.02.010

弓|

言

在许多领域,如汽车业和军事上,金属动态变形的数值模拟已变得非常重要,以至能提前预测动态事件,并减少实验研究成本.然而,这些预测的准确性和可靠性依赖于数值算法、物理简化和材料本构模型.其中本构模型将流动应力描述成应变、应变率、温度等的函数.5 参数经验型 JC 本构模型广泛应用于高应变率变形模拟,例如超高速撞击和爆炸驱动的破坏模拟.该模型将流动应力表示为应变硬化函数 $f_1(\varepsilon_p)$ 、应变率强化函数 $f_2(\dot{\varepsilon})$ 和热软化函数 $f_3(T)$ 3个函数的乘积,即 $\sigma = f_1(\varepsilon_p)f_2(\dot{\varepsilon})f_3(T)$,具体形式如下^[1]:

 $\sigma(\varepsilon_{p}, \dot{\varepsilon}, T) = [A + B\varepsilon_{p}^{n}][1 + C\ln(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_{0})][1 - T^{*m}], \qquad (1)$ 式中, A 为参考应变率 $\dot{\varepsilon}_{0}$ 和参考温度 T_{r} 下的初始屈服应力, 即 $\sigma(\varepsilon_{p} = 0, \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{0}, T = T_{r}); B$ 和 n 分别为参考应变率 $\dot{\varepsilon}_{0}$ 和参考温度 T_{r} 下的材料应变硬化模量和硬化指数; C 为材料应变率强 化参数; m 为材料热软化参数; σ 为流动应力, ε_{p} 为等效塑性应变, $\dot{\varepsilon}^{*}$ 为相对等效塑性应变率 ($\dot{\varepsilon}^{*} = \dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_{0}, \dot{\varepsilon}_{0}$ 为参考应变率, 取 $\dot{\varepsilon}_{0} = 1 \text{ s}^{-1}$), T^{*} 为无量纲的温度项($T^{*} = (T - T_{r})/(T_{m} - T_{r}),$ T_{r} 为参考温度, 这里取作 293 K, T_{m} 为材料的熔点温度, T 为试验温度).

JC 模型式(1)中的5个材料参数A,B,n,C和m需要通过实验确定.由于参考应变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 的选取对参数A,B和C的取值有一定的影响,因此,对于不同应变率的变形,应选取不同的 $\dot{\varepsilon}_0$,如

^{*} 收稿日期: 2013-04-23;修订日期: 2013-12-09

基金项目: 国家自然科学基金(重大项目)(11390362)

作者简介: 柳爱群(1965—),女,河北人,副教授,硕士(E-mail: 13220937928@126.com); 黄西成(1966—),男,湖北人,研究员,博士(通讯作者. E-mail: huangxc@caep.ac.cn).

对于准静态,取 $\dot{\varepsilon}_0 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$;对于低速撞击,取 $\dot{\varepsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$;而对于如侵彻过程中的高应变 率变形,取 $\dot{\varepsilon}_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$.取定 $\dot{\varepsilon}_0$ 后,就可具体确定参数A, B, n, C和m.如果取 $\dot{\varepsilon}_0 = 10^4 \text{ s}^{-1}$,式(1) 变为

$$\bar{\sigma} = (1 - 9.2C) \left[A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{n} \right] \left[1 + \frac{C}{1 - 9.2C} \ln \dot{\varepsilon} \right] \left[1 - T^{*m} \right].$$
⁽²⁾

本文讨论基于准静态单轴拉伸、单轴扭转和动态 Hopkinson 杆数据确定 JC 模型中 5 个参数的方法.

1 应变硬化函数的参数确定

应变硬化函数为 $f_1(\varepsilon) = A + B\bar{\varepsilon}_p^n$,表示 $\varepsilon^* = 1.0$ 和 $T^* = 0$ 时的流动应力随应变的变化,也就是说,参数A,B和n分别表示在参考应变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 和参考温度 T_r 下的初始屈服应力、硬化模量和硬化指数.根据选取参考应变率的不同,存在两类实验来确定参数A,B和n,即动态的 Hopkinson 杆实验和准静态试验.由于动态实验中存在绝热温升,并需要对数据进行修正,因此,先采用准静态试验来确定参数A,B和n.

在准静态试验中采用两种应力状态加载:单轴拉伸和单轴扭转.在单轴拉伸试验中,试件可能会出现颈缩,这时可采用 Bridgman 方法进行修正^[2].

在扭转试验中,需将数据转化为等效应力和等效应变下的数据,即 $\sigma = \sqrt{3}\tau \, \pi \, \bar{\epsilon} = \gamma / \sqrt{3}, \tau$ 和 γ 分别为剪应力和剪应变.

这样由拉伸和扭转试验获得了两组参数: $\{A,B,n\}_{tension}$ 和 $\{A,B,n\}_{torsion}$,将它们进行平 均,就获得所需的参数,即

$$A = (A_{\text{tension}} + A_{\text{torsion}})/2, \qquad (3)$$

$$B = (B_{\text{tension}} + B_{\text{torsion}})/2, \qquad (4)$$

(5)

$$n = (n_{\text{tension}} + n_{\text{torsion}})/2.$$

在测试应力-应变曲线的准静态压缩试验中,如试件不发生失稳或者圆筒型变形,也可采用准静态压缩试验来获得参数A,B和n·将压缩试验获得的另一组参数 $\{A,B,n\}_{comp}$ 与 $\{A,B,n\}_{tension}$ 和 $\{A,B,n\}_{tension}$ 进行平均,即得

$$A = (A_{\text{tension}} + A_{\text{comp}} + A_{\text{torsion}})/3,$$
(6)

$$B = (B_{\text{tension}} + B_{\text{comp}} + B_{\text{torsion}})/3, \qquad (7)$$

$$n = (n_{\text{tension}} + n_{\text{comp}} + n_{\text{torsion}})/3.$$
(8)

2 热软化函数中参数 m 的确定

JC 模型中的温度项 $f_3(T)$ 是绝热温升引起的材料软化效应,不能理解为环境温度.热软化函数的形式为: $f_3(T) = [1 - T^{*m}] = \{1 - [(T - T_r)/(T_m - T_r)]^m\}$.要确定材料参数 m,简单的方法是,取同一应变率的实验材料在高温下的屈服应力与参考温度下屈服应力之比

$$f_3(T^*) = \frac{\bar{\sigma}^{(T^*)}}{\bar{\sigma}^{(T_r)}}.$$
(9)

这样得到不同 T^* 的 $f_3(T^*)$ 的值,采用数据拟合可以得到 m,然后对不同应变率试验数据做同样的处理,将获得的参数 m 进行平均即可^[3].

3 应变率强化函数中的参数 C

由式(1)可得

$$C = \left[\frac{\sigma}{(A + B\varepsilon_{p}^{n})(1 - T^{*m})} - 1\right] (\ln(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_{0}))^{-1},$$
(10)

即:针对特定的应变率 $\dot{\epsilon}$,通过选取的应变 ϵ_{p} 和对应的应力 σ 值确定参数C,若取室温下 $\epsilon_{p}^{n}=0$ 的 σ_{0} ,并忽略绝热温升,则有

$$C = \left[\frac{\sigma_0}{A} - 1\right] \left(\ln(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)\right)^{-1}.$$
(11)

JC 本构模型是描述材料动态塑性行为的, 应变率效应实验会使试件发生不同程度的塑性变形.式(11)虽然没有显含 ε_p , 但 $\dot{\varepsilon}$ 是发生在不同 ε_p 的试件中的, σ - $\dot{\varepsilon}$ 曲线上的点对应不同 ε_p .不同的 $\dot{\varepsilon}($ 或 ε_p)是通过改变入射杆的速度而得到的.

对于多发实验,通过压杆实验获得不同塑性应变下(如 $\bar{e}_p = 0, 0.1, 0.2$)在应力-对数应变率坐标中的一组曲线:

$$\frac{\sigma}{A} - 1 = \ln(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)C.$$
⁽¹²⁾

采用线性拟合方法获得曲线的斜率,该斜率表示压缩状态下的应变率强化系数 C_{comp} ;同样通过拉伸和扭转实验得到 $C_{tension}$ 和 $C_{torsion}$,之后,将获得的3个参数 $C_{tension}$, C_{comp} 和 $C_{torsion}$ 进行 平均,即

$$C = (C_{\text{tension}} + C_{\text{comp}} + C_{\text{torsion}})/3,$$
就得到材料 IC 模型的参数 C.
(13)

4 不锈钢 SS2196 材料本构参数的确定

按照上述实验方法获得的不锈钢 SS2196 的材料参数.

1) 通过室温静力试验确定参数 A, B, n



图 1 表示不锈钢 SS2196 在室温拉伸试验下的真应力-应变曲线,是由 3 条曲线平均得到

的,由工程应力-应变曲线以及试验试件测试得知,大约在应变为0.22处发生颈缩,所以在数据处理时笔者选取颈缩前的数据,采用最小二乘法拟合试验数据可得参数^[4],

A = 451 MPa, B = 1.951 MPa, n = 0.77.

2) 确定参数 m

由不同温度的准静态拉伸试验得到不锈钢 SS2196 的屈服应力之比 $f_3(T^*)$,如图 2 所示, 采用函数 $f_3(T^*) = [1 - T^{*m}]$ 来拟合试验数据可以得到 *m* 值为 0.75.

5 参数识别方法

上面讨论的材料参数实验确定方法中存在一些缺点,如:没有考虑实验数据中的所有数据 点、每条曲线之间缺乏有机联系.为了克服这些缺点,本文采用最优化算法来识别材料参数,即 在参数空间采用迭代求解,寻找最优的点使得实验数据与模型预测之间的偏差最小^[5].为简化 起见,暂不考虑热软化参数 m,只对参数 A,B,n 和 C 进行识别.

定义参数向量为: $z = [A, B, n, C]^{T}$,目标函数定义为

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d_i^2(z)}{\sigma_{\exp}^{(i)2}(z)} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\sigma_{\exp}^{(i)}(z) - \sigma_{eal}^{(i)}(z)}{\sigma_{\exp}^{(i)}(z)} \right]^2,$$
(14)

式中, $\sigma_{exp}^{(i)}(z)$ 为实验测试值, $\sigma_{eal}^{(i)}(z)$ 为模型预测值,N为实验数据点, d_i 为实验测试与模型预测之差.优化目标为:minf(z).

采用共轭梯度法[6],即

$$\nabla f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0},\tag{15}$$

梯度矢量为

$$\boldsymbol{g} = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}_j}\right]_{j=A,B,n,C} = \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial A}, \frac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial B}, \frac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial n}, \frac{\partial f(\boldsymbol{z})}{\partial C}\right].$$
 (16)

当不考虑热软化时, JC 模型得以简化,利用下面公式:

 $\frac{\partial \sigma}{\partial A} = (1 + C \ln \dot{\varepsilon}), \qquad (17)$

 $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial R} = \bar{\varepsilon}_{p}^{n} (1 + C \ln \dot{\varepsilon}), \qquad (18)$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial n} = B \bar{\varepsilon}_{p}^{n} \ln \bar{\varepsilon}_{p} (1 + C \ln \dot{\varepsilon}), \qquad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial C} = (A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{n})\ln \dot{\varepsilon}, \qquad (20)$$

可得式(16)中的各项:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial A} = 2(1 + C \ln \dot{\varepsilon}) \sum_{i=1}^{N} \frac{(A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{(i)n})(1 + C \ln \dot{\varepsilon}) - \sigma_{exp}^{(i)}(z)}{\sigma_{exp}^{(i)2}(z)},$$
(21)

$$\frac{\partial f(z)}{\partial B} = 2(1 + C \ln \dot{\varepsilon}) \sum_{i=1}^{N} \left[\varepsilon_{p}^{(i)n} \frac{(A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{(i)n})(1 + C \ln \dot{\varepsilon}) - \sigma_{exp}^{(i)}(z)}{\sigma_{exp}^{(i)2}(z)} \right],$$
(22)

$$\frac{\partial f(z)}{\partial n} = 2B(1 + C\ln \dot{\varepsilon}) \sum_{i=1}^{N} \left[\bar{\varepsilon}_{p}^{(i)n} \ln \varepsilon_{p}^{(i)} \frac{(A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{(i)n})(1 + C\ln \dot{\varepsilon}) - \sigma_{exp}^{(i)}(z)}{\sigma_{exp}^{(i)2}(z)} \right], \quad (23)$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial C} = 2\ln \dot{\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \left[(A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{(i)n}) \frac{(A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{(i)n})(1 + C\ln \dot{\varepsilon}) - \sigma_{exp}^{(i)}(z)}{\sigma_{exp}^{(i)2}(z)} \right].$$
(24)

计算流程为

步骤 0: 令 $z_0 \in R^n$,如果 $\nabla f(z_0) = 0$, 计算停止; 步骤 1: $i = 0, H_0 = Id^n$ (或者任意的非负对称矩阵), $g_0 = \nabla f(z_0)$; 步骤 2: $h_i = -H_i \cdot g_i$; 步骤 3: $f(z_i + \lambda_i h_i) = \min \{f(z_i + \lambda h_i) | \lambda \ge 0\}$; 步骤 4: $\nabla f(z_i + \lambda_i h_i)$; 步骤 5: 如果 $\nabla f(z_i + \lambda_i h_i) = 0$, 中止计算, 否则: $z_{i+1} = z_i + \lambda_i h_i, g_{i+1} = \nabla f(z_{i+1}), \Delta g_i = g_{i+1} - g_i, \Delta z_i = z_{i+1} - z_i,$ $H_{i+1} = H_i - \frac{H_i \cdot \Delta g_i \cdot H_i^T \cdot \Delta g_i}{(\Delta g_i)^T \cdot H_i \cdot \Delta g_i} + \frac{\Delta z_i \cdot (\Delta z_i)^T}{(\Delta z_i)^T \cdot \Delta g_i}$;

步骤 6: i = i + 1; 回到步骤 2.

在设置参数的初始值 z₀ 时,采用以上描述的实验方法确定参数的值,这样可以减少迭代 次数,因为通过实验确定的参数已经接近最优点.

除了上面的两种方法外,还有一种方法是结合数值模拟和优化算法对材料参数进行识别, 如文献[7-8]的工作.这种方法的主要思路是,将 SHPB 系统作为一个结构问题进行数值分析, 在分析中先输入材料参数的初始值,比较某个响应参数如载荷,采用迭代优化方法使得实验获 得的响应和数值分析输出的响应之间的差最小,从而获得材料参数的最优值.Gavrus 等^[9]将试 件两端的作用力作为响应参数,采用 Gauss-Newton 迭代算法,对 35NCD16 钢的 JC 模型参数进 行了识别.

6 考虑绝热温升的 JC 模型参数 m 的确定方法

如果材料的绝热温升现象较为明显,数据处理时就必须考虑这种现象,下面采用 JC 模型 直接解出热软化参数 m

$$m = \ln \left[1 - \frac{\bar{\sigma}}{(A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{n}) \left[1 + C \ln \left(\dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_{0} \right) \right]} \right] \left\{ \ln \left[\frac{T - T_{r}}{T_{m} - T_{r}} \right] \right\}^{-1},$$
(25)

式中的材料当前温度计算采用下面表达式:

$$T = T_0 + \frac{k}{\rho c_p} \int_0^{\bar{\varepsilon}_p^n} \bar{\sigma} \,\mathrm{d}\bar{\varepsilon}_p, \qquad (26)$$

 c_p 为比定压热容, ρ 为材料密度,k为塑性功-热转换系数(可近似取1).

定义一个参数
$$W_{\rm p}$$

 $W_{\rm p} = \int_{0}^{\bar{e}_{\rm p}^{\rm a}} \bar{\sigma} \, \mathrm{d}\bar{e}_{\rm p},$ (27)

W。为单元的塑性功(单位体积的塑性功).

代入式(25)可得

$$m = \ln \left[1 - \frac{\bar{\sigma}}{(A + B\bar{\varepsilon}_{p}^{n}) \left[1 + C \ln \left(\dot{\varepsilon} / \dot{\varepsilon}_{0} \right) \right]} \right] \left\{ \ln \left[\frac{T_{0} - T_{r}}{T_{m} - T_{r}} \left(1 + \frac{kW_{p}}{(T_{0} - T_{r})\rho c_{p}} \right) \right] \right\}^{-1},$$
(28)

如果
$$c_p$$
是温度的函数,即

$$T = T_0 + \frac{kW_p}{\rho f(T)}.$$
(30)

一般情况下,由上式无法获得温度 T 的解析表达式,通过下面的非线性方程可求得温度 T

 $\rho(T - T_0)f(T) - kW_p = 0.$ $\mu =$

$$c_p = c_{p0} + \alpha T, \tag{32}$$

式中, c₁₀ 为室温下材料的热容, α 为材料参数.

求出温度 T

$$T = \frac{1}{2} (T_0 - c_{p0}/\alpha) + \sqrt{(c_{p0}/\alpha - T_0)^2/4 + (c_{p0}T_0\rho + kW_p)/\alpha\rho} .$$
(33)

将式(33)代入式(25)求得参数 m.

这样,在不同环境温度和应变率下可获得 m 的多个取值,求它们的平均值即为材料的热 软化参数.m 和 A, B, n, C 的取值有关.

7 结 论

研究了基于实验测试数据确定 JC 本构模型参数的方法,并针对不锈钢 SS2196 给出了确 定模型参数的实例,得到结论如下:

1) 对试样进行准静态单轴拉伸和扭转实验,得到各自的等效应力和等效应变关系,提取 出各自的应变硬化函数及参数 {A,B,n}_{tension} 和{A,B,n}_{torsion},就可按公式{A,B,n} = ({A, B,n}_{tension} + {A,B,n}_{tension} + {A,B,n}_{tension})/2 确定参数 A,B 和 n.

2)进行同一应变率但不同温度情况下的热软化函数实验测试,得到材料热软化曲线,通 过拟合就可确定参数 m.

3) 分别进行压杆、拉杆和扭转实验,测试不同塑性应变下的应变率强化函数,得到各自的曲线 $\sigma/A - 1 = \ln (\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0)/C$.由线性拟合方法提取 C_{comp} , C_{tension} 和 C_{tension} , 就可以按公式 $C = (C_{\text{tension}} + C_{\text{comp}} + C_{\text{torsion}})/3$ 确定参数 C.

参考文献(References):

- [1] Johnson G R, Cook W H. A constitutive model and data for metals subjected to large strains, high strain-rates and high temperatures [C]//*The Seventh Int Nat Symposium on Ballistics*, 1983.
- [2] Bridgman P W. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture*[M]. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1964.
- [3] 郭伟国. 一种新型奥氏体不锈钢的塑性流变行为研究[J]. 西北工业大学学报, 2001, 19(3):
 476-479.(GUO Wei-guo. Plastic flow behavior of a new austenitic stainless steel AL6-XN under different strain rates and temperatures[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2001, 19(3): 476-479.(in Chinese))
- [4] 刘盼萍, 尹燕, 常列珍, 薛勇. 正火态 50SiMnVB 钢 Johnson-Cook 本构方程的建立[J]. 兵器材
 料科学与工程, 2009, 32(1): 45-49.(LIU Pan-ping, YIN Yan, CHANG Lie-zhen, XUE Yong.
 Establishing of Johnson-Cook constitutive equation for normalized steel 50SiMnVB[J]. Ordnance Material Science and Engineering, 2009, 32(1): 45-49.(in Chinese))
- [5] Mohrmann R. Automated identification and calculation of the parameters of nonlinear material

models[C]//Symposium on Field Analyses for Determination of Material Parameters—Experimental and Numerical Aspects. Solid Mechanics and Its Applications, 2003, 109: 113-122.

- [6] Hestenes M R. Conjugate direction methods in optimization [J]. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1978, 6: 8-27.
- [7] Aoki S, Amaya K, Noguchi T, Ståhle P, Sundin K G. Identification of elastic/visco-plastic material constants under impact loading[C]//Symposium on Field Analyses for Determination of Material Parameters—Experimental and Numerical Aspects. Solid Mechanics and Its Applications, 2003, 109; 63-80.
- [8] Gavrus A, Caestecker P, Ragneau E. Dynamic compression test analysis using an inverse method[C]//EUROMECH' 2001. Cachan, 2001: 24-27.
- [9] Gavrus A, Caestecker P, Ragneau E, Davoodi B. Analysis of the dynamic SHPB test using the finite element simulation [J]. *Journal de Physique IV*, 2003, **110**(1): 353-358.
- [10] MacDonald R A, MacDonald W M. Thermodynamic properties of fcc metals at high temperatures[J]. *Physical Review B*, 1981, 24(4): 1715-1724.

Identification of High-Strain-Rate Material Parameters in Dynamic Johnson-Cook Constitutive Model

LIU Ai-qun¹, HUANG Xi-cheng²

 Shool of Civil Engineering, Ludong University, Yantai, Shandong 264025, P.R.China;
 Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Mianyang, Sichuan 621900, P.R.China)

Abstract: The dynamic Johnson-Cook constitutive model is widely used in numerical simulation of materials under dynamic loading. This model is very important in impact dynamics. The method of determining the parameters of heat softening and strain-strengthening in the Johnson-Cook model was proposed based on the strain-hardening parameters obtained from the material experiments including quasi-static uniaxial tension and uniaxial torsion. The material parameters were identified with the optimization algorithm, in which the parameter space was solved through iteration and the optimal point was found to minimize the difference between the model prediction and the experimental data. In the adiabatic heating case, the determination method of the Johnson-Cook model parameter m was demonstrated.

Key words: Johnson-Cook constitutive model; dynamic mechanical property; flow stress; high strain rate; parameter identification

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (Major Program) (11390362)