

等边三角形微通道内层流的流动特性和换热特性的研究*

何颖, 邵宝东, 程赫明

(昆明理工大学 土木工程学院 工程力学系, 昆明 650500)

摘要: 研究等边三角形截面微通道内充分发展层流的流动特性和换热特性,基于 Navier-Stokes 方程的基本理论,在等边三角形一边向流体加入定常热流密度时,给出了微通道内充分发展层流的速度分布和温度分布的近似解,以及微通道内充分发展对流传热的摩擦因子和 Nusselt 数;并通过商业软件 Fluent 对微通道内的流动和换热进行数值模拟,得到通道内温度和速度的数值解,进而计算得到充分发展对流传热的摩擦因子和 Nusselt 数;二者进行对比,结果吻合很好,验证了计算结果的正确性。

关键词: 等边三角形微通道; Nusselt 数; 摩擦因子; 稳态层流

中图分类号: TK124 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.03.010

引言

微通道换热器是伴随着人们追求高性能、小体积电子产品的需求而出现的,微通道换热器具有结构紧凑、换热效率高、质量轻、运行安全可靠等特点,但由于生产加工的难度,往往微通道使用的圆形和矩形截面管道优于其他任意截面管道,针对不规则管道内的流动和换热特性的研究到目前为止还很少。

在 1950 年到 1970 年间的 20 年里,针对不规则管道内层流的流动传热提出了许多的研究方法,得到了很多不规则管道中入口段和充分发展段的速度和温度分布的近似解,Shah 和 London 最先提出了等边三角形截面管道中的层流速度理论解^[1],但对于任意三角形截面管道至今仍没有得到解析解,兴许根本就不存在,Clairborne^[2]根据 Navier-Stokes 传统理论,得到了一些特殊截面通道在充分发展段层流流动的速度和温度分布理论解,Yilmaz 和 Cihan^[3]利用形状因子的概念推导得到了任意断面通道层流的流动阻力和换热的通用公式,但其精度依旧不够高,分别为-4.0%~7.3%和-8.7%~8.0%,Uzun 和 Unsal^[4]通过数值方法,给出了在任意截面管道内低流速流体的热传递解;Muzychka 和 Yovanovich^[5-6]整理了以往层流管道充分发展段流

* 收稿日期: 2013-10-04; 修订日期: 2013-12-31

基金项目: 云南省应用基础研究重点项目(2007A0015Z)

作者简介: 何颖(1991—),男,云南宣威人,硕士生(E-mail: scdx.heyings@163.com);

邵宝东(1971—),男,黑龙江鸡西人,副教授,博士(通讯作者. E-mail: shbd_1221@163.com).

体的流动阻力和 Nusselt 数,并且采用一种新的方法推导出非圆形管道内对流传热在入口段区域的 Nusselt 数。

本文针对等边三角形截面微通道,在三角形一边向流体加入定常热流密度,轴向为等壁温的理想边界条件下,通过流体的动量微分方程和能量微分方程得到通道内充分发展层流的速度和温度分布解,进而得到对流传热的摩擦因子和 Nusselt 数;并通过 Fluent 软件进行数值计算得到数值解,与前者进行对比,得到吻合的结果。

1 数学模型

微通道内对流体进行分析,流体的结构和坐标如图 1 所示,在三角形上边所在面向流体加入定常热流密度。

流体以一定的速度和温度由入口进入,在本文中对通道内流体的对流传热做如下假设:
① 速度和温度均充分发展;② 流体属性 (ρ, c_p, μ, k) 不变;③ 轴向净导热忽略;④ 流体粘性耗散忽略;⑤ 三角形截面周向温度相等;⑥ 忽略 x, y 方向对流。

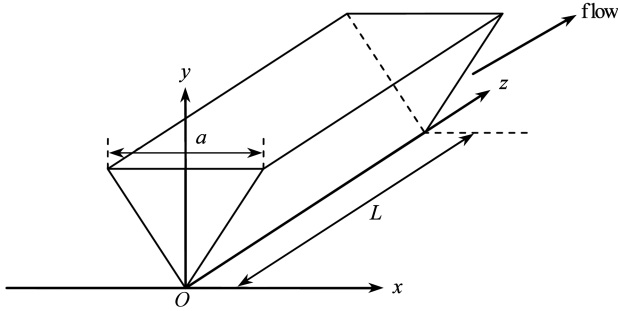


图 1 等边三角形微通道结构

Fig.1 Equilateral triangle micro-channel

1.1 速度分布

根据假设可以得到动量微分方程^[7,9]为

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

设 $\partial p / \partial z = p'$ 则有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{p'}{\mu}. \quad (2)$$

边界条件如下:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} a, \quad y = \sqrt{3}x \quad \text{及} \quad y = -\sqrt{3}x \quad \text{时}, \quad w = 0.$$

根据方程(1),可假设

$$w(x, y) = F \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) (3x^2 - y^2). \quad (3)$$

将式(3)代入式(2)可解得 F , 即可得到通道内充分发展层流的速度分布:

$$w(x, y) = -\frac{p'}{2\sqrt{3}a\mu} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} a \right) (3x^2 - y^2). \quad (4)$$

在截面上积分除以面积可得截面平均速度为

$$w_m = \frac{\dot{m}}{\rho A_c} = -\frac{a^2}{80\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (5)$$

根据摩擦因子的公式可计算得到

$$f = \frac{-(dp/dz)D_h}{\rho w_m^2/2} = \frac{160}{3Re}. \quad (6)$$

由此得到

$$f Re = \frac{160}{3}. \quad (7)$$

1.2 温度分布

在速度和温度充分发展阶段^[10-12],根据假设能量微分方程为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{w}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (8)$$

其中 $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$.

边界条件为

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} a, y = \sqrt{3}x, y = -\sqrt{3}x \text{ 时, } T = T_s(z), \quad (9)$$

则可假设

$$T(x, y, z) = F\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} a\right) (3x^2 - y^2) + T_s(z). \quad (10)$$

将式(10)、(4)、(5)代入式(8)可解得

$$T = -\frac{20w_m}{3a^4\alpha} \frac{\partial T}{\partial z} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} a\right) (3x^2 - y^2) + T_s(z). \quad (11)$$

根据 Newton(牛顿)冷却定律:

$$q_s'' = h(T_s - T_m), \quad (12)$$

h 为局部对流换热系数, T_s 为表面温度, T_m 为截面平均温度, 在充分发展区域, 具有均匀表面热流密度(q_s'') 为常数, h 也为常数. 对式(12)两边同时求导有

$$\frac{dT_s}{dz} = \frac{dT_m}{dz}. \quad (13)$$

引入无量纲温差 $(T_s - T)/(T_s - T_m)$, 在充分发展区域内有

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{T_s(z) - T(y, z)}{T_s(z) - T_m(z)} \right] = 0. \quad (14)$$

展开式(13)有

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_s}{dz} - \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_m)} \frac{dT_s}{dz} + \frac{(T_s - T)}{(T_s - T_m)} \frac{dT_m}{dz}. \quad (15)$$

将式(14)代入有

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_m}{dz}. \quad (16)$$

那么式(11)可写为

$$T = -\frac{20w_m}{3a^4\alpha} \frac{dT_m}{dz} \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a \right) (3x^2 - y^2) + T_s(z). \quad (17)$$

通过温度在通道截面上的积分可得通道截面上的平均温度为

$$T_m = \frac{\int_{A_c} \rho w c_p T dA_c}{\dot{m} c_p} = -\frac{9\sqrt{3}}{308} \frac{dT_m}{dz} w_m a^2 + T_s. \quad (18)$$

由稳态流动的热能平衡方程得到

$$\frac{dT_m}{dz} = \frac{q''_s a}{\dot{m} c_p}. \quad (19)$$

将式(19)代入式(18)有

$$T_m - T_s = -\frac{108}{308\sqrt{3}} \frac{q''_s D_h}{k}. \quad (20)$$

则

$$h = \frac{308\sqrt{3}}{108} \frac{k}{D_h}, \quad (21)$$

即

$$Nu = \frac{hD_h}{k} = 4.94. \quad (22)$$

2 数值模型

2.1 数值模拟

使用 Fluent 软件^[13-14]进行数值模拟,模拟边长为 2 mm 的等边三角形截面,管长为 10 mm 的充分发展层流时的换热与流动特性,入口给定流体速度为 0.1 m/s,上边界 1 000 W/m²的定常热流密度,模拟过程中 Re 在充分发展段约为 115.5,采用层流模型,使用流体的物性参数如表 1 所示.截面网格划分如图 2 所示.

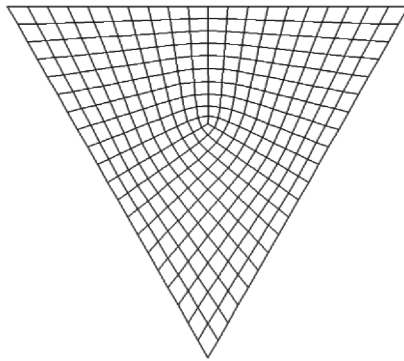


图2 截面网格划分

Fig.2 Mesh generation of the micro-channel cross section

表 1 流体物性参数表

Table 1 Physical parameters of the fluid

	density	specific heat at constant pressure	heat conductivity coefficient	coefficient of kinetic viscosity
	$\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$c_p / (\text{J} \cdot (\text{kg} \cdot \text{K})^{-1})$	$k / (\text{W} \cdot (\text{m} \cdot \text{K})^{-1})$	$\mu / (\text{kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1})$
water	1 000	4 182	0.6	0.001

2.2 流动模拟结果

图 3 为在 $x = 0$ 截面上速度的分布云图,图 4 为充分发展段横截面上的速度分布云图。

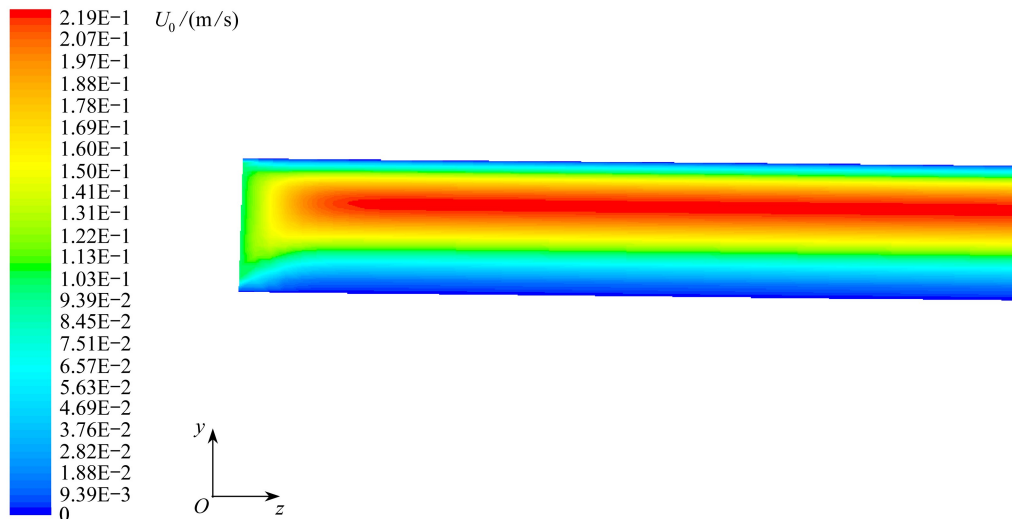
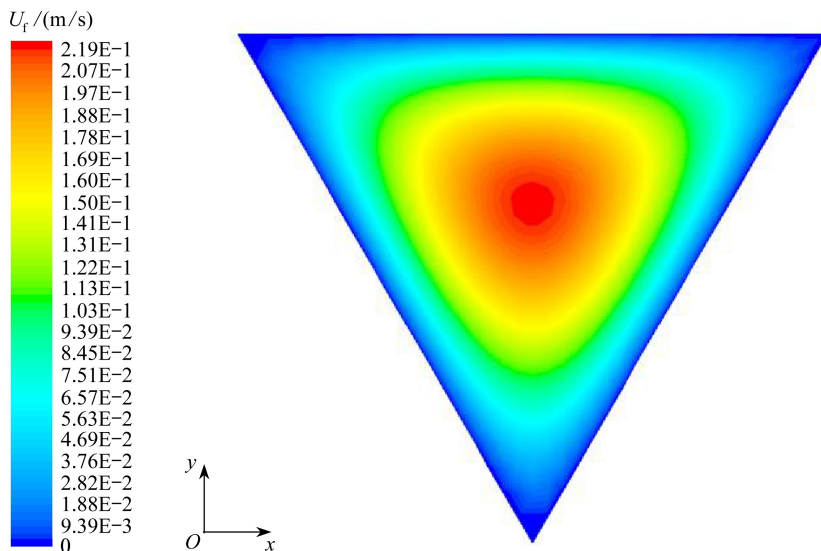
图 3 $x = 0$ 截面速度分布云图Fig.3 Velocity distribution at cross section $x = 0$ 

图 4 充分发展段截面速度分布云图

Fig.4 Velocity distribution at the fully developed cross sections

从数值计算得到的速度分布云图可得到,流体流动充分发展后,速度的分布不再改变,并且速度的最大值位于截面心形处,根据解析解中的速度极值位于 $x = 0$ 和 $y = 2a/\sqrt{3}$,二者是完

全吻合的。

数值模拟得到的管道内流体流动的摩擦因子为 $f = 0.42586$, 那么 $f Re = 49.18683$, 同解析解中的结果的相对误差 7.774%, 这个误差是在允许的范围之内的。

2.3 传热结果

由于在 Fluent 里不能实现周向等壁温的理想假设条件, 因此在数值计算结果中壁面温度选取的是平均壁面温度, 图 5 为壁面平均温度和管道平均温度沿轴向的变化情况。

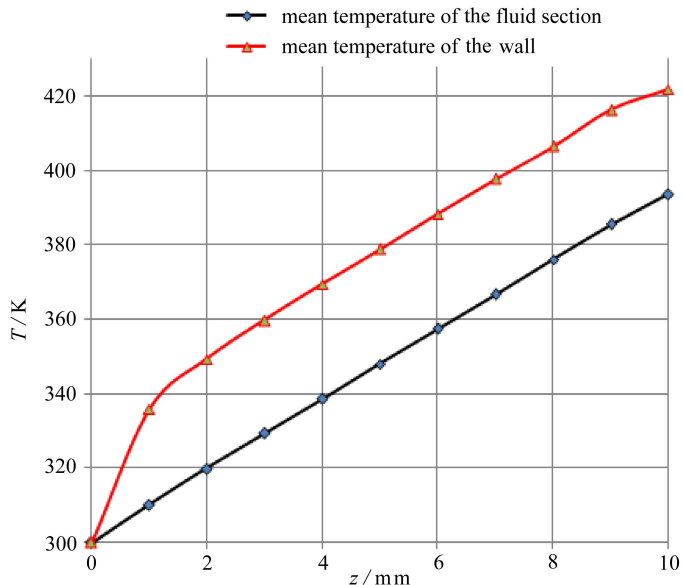


图 5 温度沿程变化

Fig.5 Temperature variation along z direction

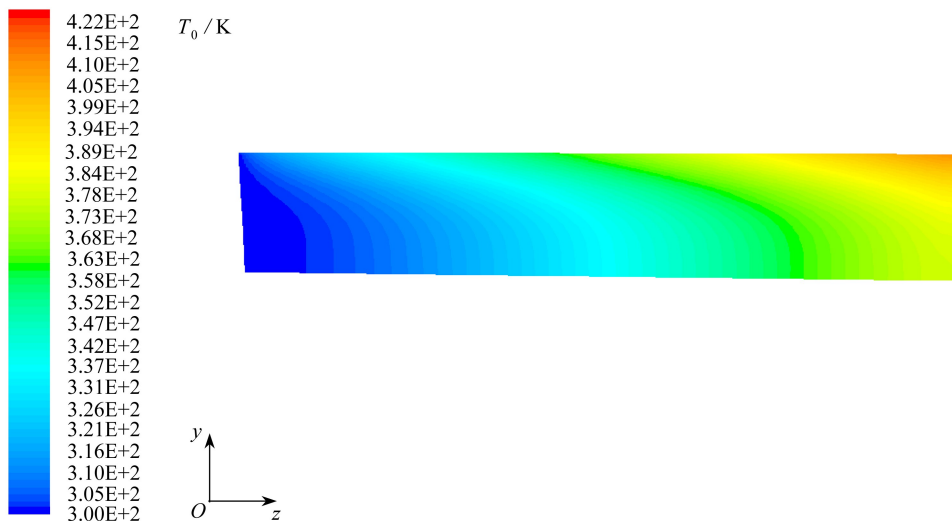


图 6 $x = 0$ 截面温度分布云图

Fig.6 Temperature distribution at cross section $x = 0$

从图 5 中可以看出在温度入口段, 壁面温度和流体温度相差是很小的, 当进入温度发展

段后,二者的温度都是线性增加的,这是由热流密度为常数决定的,和数值解中的稳态流动的热能平衡方程式相对应;壁面温度和截面流体的平均温度的差值保持不变,在本文数值计算的模型中这个差值为 31 K,这也是流体达到速度和温度充分发展的标志.图 6 给出在 $x = 0$ 截面上温度的分布云图,图 7 为充分发展段横截面上的温度分布云图.

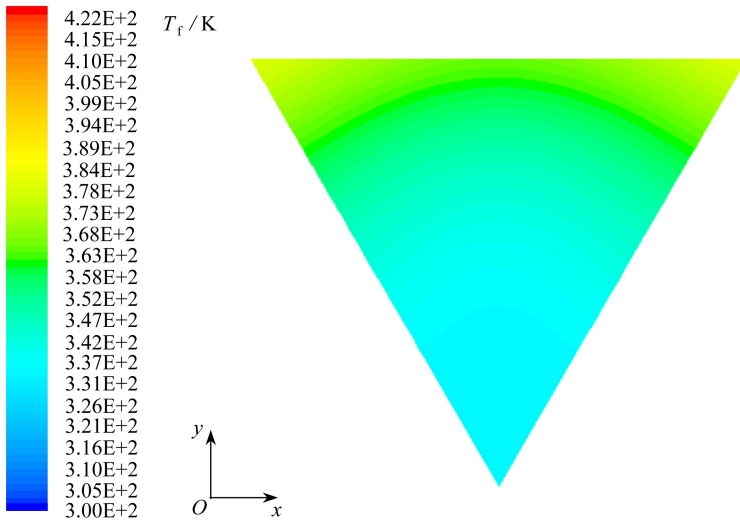


图 7 充分发展段截面温度分布云图

Fig.7 Temperature distribution at the fully developed cross sections

由云图中可以看出周向壁面温度是不可能相等的,但在解析解时假设的理想状态是不可能的,壁面平均温度和截面的平均温度的差值固定,对结果的影响不会很大.通过数值模拟计算的数据结果中有 $q''_s = 77.464 \text{ W/m}^2$, $T_s - T_m = 31 \text{ K}$, $k = 0.6$,由式(12)及(22)可计算得到 Nusselt 数 Nu 为 4.81,与解析解的相对误差为 2.63%,二者结果吻合很好.

3 结 论

本文针对等边三角形截面微通道,在三角形一边向流体加入定常热流密度,轴向为等壁温的理想边界条件下,通过流体的动量微分方程和能量微分方程得到通道内充分发展层流的速度和温度分布解,进而得到对流传热的摩擦因子和 Nusselt 数;并通过 Fluent 软件进行数值计算得到数值解,基于以上的数学计算和数值模拟结果,可以得到以下结论

1) 在放宽等边三角形截面管道内充分发展层流的流体流动和传热的边界条件的情况下,解出动量方程和能量方程,给出管道内流体流动的速度分布和温度分布的解析解,并且使用 Fluent 商业软件进行数值计算,将数值计算结果与解析解进行对比,在误差允许的范围内,结果精确吻合.

2) 通过计算和对比,确定了等边三角形截面管道中充分发展层流流体流动的摩擦因子,给出了传热过程中的 Nusselt 数.

3) 在等边三角形一边给定一个定常热流密度,在等边三角形管道中流体流动温度和速度充分发展区域内,速度最大值位于等边三角形截面形心处,截面的平均温度沿程线性变化.

4) 数值计算结果中,在温度充分发展区域内,壁面的平均温度与截面的平均温度之差为

一固定值,验证了使用周向等壁温的假设是可行的,说明了解析解过程的正确性。

参考文献(References):

- [1] White F M. Laminar flow forced convection in ducts[J]. *Journal of Fluids Engineering*, 1980, **102**(2): 256-257.
- [2] Clairborne H C. *Heat Transfer in Noncircular Ducts*[M]. Oak Ridge, Tennessee: National Laboratory, 1951.
- [3] Yilmaz T, Cihan E. General equation for heat transfer for laminar flow in ducts of arbitrary cross-sections[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1993, **36**(13): 3265-3270.
- [4] Uzun I, Unsal M. A numerical study of laminar heat convection in ducts of irregular cross-sections[J]. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 1997, **24**(6): 835-848.
- [5] Muzychka Y S, Yovanovich M M. Laminar flow friction and heat transfer in non-circular ducts and channels—part I: hydrodynamic problem[C]//Celata G P, Thonon B, Bontemps A, Kandlikar S eds. *Compact Heat Exchangers: A Festschrift on the 60th Birthday of Ramesh K Shah*. Grenoble, France, 2002: 123-130.
- [6] Muzychka Y S, Yovanovich M M. Laminar flow friction and heat transfer in non-circular ducts and channels—part II: thermal problem[C]//Celata G P, Thonon B, Bontemps A, Kandlikar S eds. *Compact Heat Exchangers: A Festschrift on the 60th Birthday of Ramesh K Shah*. Grenoble, France, 2002: 131-139.
- [7] 孙德兴. 高等传热学: 导热与对流的数理解析[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2005. (SUN De-xing. *Advanced Heat Transfer: Mathematical Analysis of Heat Conduction and Convection*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2005. (in Chinese))
- [8] 贾力, 方肇洪, 钱兴华. 高等传热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. (JIA Li, FANG Zhao-hong, Qian Xing-hua. *Advanced Heat Transfer*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003. (in Chinese))
- [9] Thirumaleswar M. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*[M]. New Delhi: Pearson Education India, 2006.
- [10] 宋延熙, 徐进良, 张伟. 三角形并联微通道换热特性研究[J]. 中国科学技术大学学报, 2007, **37**(3): 268-275, 283. (SONG Yan-xi, XU Jin-liang, ZHANG Wei. Heat transfer of parallel triangular microchannels[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2007, **37**(3): 268-275, 283. (in Chinese))
- [11] Heris S Z, Noie S H, Talaii E, Sargolzaei J. Numerical investigation of Al_2O_3 /water nanofluid laminar convective heat transfer through triangular ducts[J]. *Nanoscale Research Letters*, 2011, **6**(1): 1-10.
- [12] 张凯, 王瑞金, 王刚. *Fluent 技术基础与应用实例*[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2010. (ZHANG Kai, WANG Rui-jin, WANG Gang. *The Basis of Fluent Technology and Application* [M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2010. (in Chinese))
- [13] Tunc G, Bayazitoglu Y. Heat transfer in rectangular microchannels[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2002, **45**(4): 765-773.
- [14] Morini G L. Thermal characteristics of slug flow in rectangular ducts[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 1999, **38**(2): 148-159.

Laminar Flow and Heat Transfer in Equilateral Triangle Micro-Channels

HE Ying, SHAO Bao-dong, CHENG He-ming

(*Department of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering,
Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, P.R.China*)

Abstract: Fully developed laminar flow properties and heat transfer characteristics in equilateral triangle micro-channels were studied. Based on the theory of Navier-Stokes equations, in the case that a steady heat flux was imported into the fluid at one side of the equilateral triangle, the approximate analytical results of velocity and temperature distributions of the fully developed laminar flow within the micro-channel, as well as the friction factor and Nusselt number of the fully developed convection, were given through solution of the momentum and energy differential equations. Then the laminar flow and heat transfer within the micro-channel were numerically simulated with the Fluent software to get the corresponding numerical values of velocity, temperature, friction factor and Nusselt number. In comparison, the analytical results fit the numerical ones well to verify the correctness of the presented method.

Key words: equilateral triangle micro-channel; Nusselt number; friction factor; steady laminar flow