

# 一种新的有杆抽油泵功图诊断 模型及计算方法\*

孙仁远<sup>1</sup>, 张云飞<sup>1</sup>, 范坤坤<sup>1</sup>, 王 剑<sup>2</sup>, 刘 卓<sup>1</sup>, 陆雪皎<sup>1</sup>

(1. 中国石油大学(华东)石油工程学院, 山东 青岛 266580;  
2. 中石化河南油田工程院, 河南 南阳 473132)

**摘要:** 通过对多级杆柱上的微元体进行动力学分析,对现有的 Gibbs 模型进行了改进,建立了一个新的有杆抽油泵功图诊断数学模型.采用隐式差分格式和变步长有限差分格式对模型进行求解,得到了接箍上、下分界面处和抽油杆均质段任意位置处的位移及载荷表达式,推导了等效阻尼系数的计算公式,建立了相应的迭代算法来计算井下泵功图.以某油井地面示功图为例,利用该模型进行了实例计算,与 Gibbs 方法对比结果表明,该模型及算法得到的泵功图更接近实际.

**关键词:** 数学模型; 泵功图; 等效阻尼系数; 迭代算法

**中图分类号:** TE358; O302      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.04.008

## 引 言

泵功图可以准确地反映有杆抽油泵的工作状况,直接测量泵功图时,需将动力仪下到井下进行测量,工艺复杂、成本较高.因此,如果建立泵功图诊断模型,可以把悬点示功图转化为杆上任意点的示功图并最终确定泵功图,以准确诊断油井的工作状况,对于加强油田管理、提高抽油泵工作性能具有重要意义<sup>[1-3]</sup>.

Gibbs 等<sup>[4]</sup>把抽油杆柱看作一根井下动态的传导线,在动力学特性分析的基础上,建立了抽油杆柱波动方程,根据悬点示功图确定了边界条件,提出一种井下泵功图的诊断模型,并利用 Fourier(傅里叶)级数展开和分离变量法对模型进行了求解.该方法的不足在于:① 模型没有考虑抽油杆柱重力和管柱接箍的影响;② 使用 Fourier 展开求解,求解精度受到 Fourier 级数的影响;③ 利用经验公式计算等效阻尼系数,计算结果缺乏针对性.

针对上述问题,本文对 Gibbs 模型进行了改进,建立了一种新的泵功图诊断模型,采用隐式差分格式对抽油杆柱均质段进行求解,采用变步长有限差分格式对杆柱组合段进行求解,并以该模型为基础,推导出了等效阻尼系数的公式,建立了等效阻尼系数的迭代算法.

\* 收稿日期: 2013-07-25; 修订日期: 2013-11-06

基金项目: 长江学者和创新团队发展计划(IRT1294); 国家科技重大专项(2011ZX05031-002-007HZ)

作者简介: 孙仁远(1968—),男,山东招远人,教授,博士(通讯作者. Tel: +86-532-86981166;

E-mail: sunrenyuan@126.com).

# 1 有杆抽油泵功图诊断模型的建立

## 1.1 抽油杆柱波动方程的建立

假设:1) 油井为直井; 2) 接箍对整个杆柱弹性无影响; 3) 油管与抽油杆柱不接触. 图 1 为多级杆柱示意图, 在其中取一微元体, 受力分析如图 2 所示.

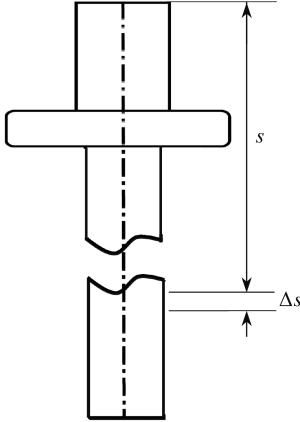


图 1 多级抽油杆柱示意图

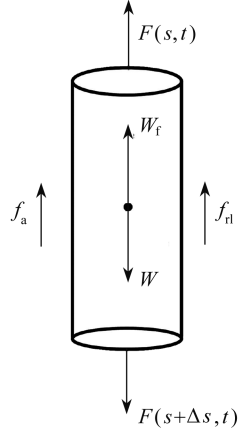


图 2 微元体受力示意图

Fig.1 Schematic diagram of a multi-level sucker rod Fig.2 Force diagram of a micro unit

由图 2 可见, 在任意位置  $s$  处, 抽油杆受到以下 6 个力的作用, 即

1) 微元体自重  $W$

$$W = \rho_r g A_{rk} \Delta s_k; \tag{1}$$

2) 微元体在液体中的浮力  $W_f$

$$W_f = \rho_l g A_{rk} \Delta s_k; \tag{2}$$

3) 微元体的惯性力  $f_a$

$$f_a = \rho_r A_{rk} \left[ \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2} \right] \Delta s_k; \tag{3}$$

4) 微元体上截面轴向力  $F(s, t)$

$$F(s, t) = EA_{rk} \left[ \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \right]_s; \tag{4}$$

5) 微元体下截面的轴向力  $F(s + \Delta s, t)$

$$F(s + \Delta s, t) = EA_{rk} \left[ \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} \right]_{s+\Delta s}; \tag{5}$$

6) 液体对微元体的粘滞阻尼力  $f_{rl}$

$$f_{rl} = V_{ek} \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} \Delta s_k; \tag{6}$$

其中,  $k$  表示第  $k$  级管柱;  $A_{rk}$  为第  $k$  级抽油杆柱的截面积,  $m^2$ ;  $E$  为杆柱弹性模量,  $N/m^2$ ;  $g$  为重力加速度,  $m/s^2$ ;  $\Delta s$  为微元体的长度,  $m$ ;  $u(s, t)$  为截面  $s$  处管柱在  $t$  时刻的位移,  $m$ ;  $\rho_r$  为杆柱在空气中的密度,  $kg/m^3$ ;  $\rho_l$  为液体密度,  $kg/m^3$ ;  $V_e$  为单位长度杆柱的粘滞阻尼系数,  $kg/(s \cdot m)$ .

微元体在液体中的密度差  $\rho'_r$  为

$$\rho'_r = \rho_r - \rho_l. \tag{7}$$

由 D' Alembert(达朗伯)原理可以得到微元体的平衡条件为

$$W - W_f + F(s + \Delta s, t) - F(s, t) - f_{rl} - f_a = 0. \quad (8)$$

由此可得到多级杆柱的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} - c \frac{\partial u(s, t)}{\partial t} + g', \quad (9)$$

其中,  $a = \sqrt{E/\rho_r}$ ,  $g' = \rho'_r g/\rho_r$ ,  $c$  为阻尼系数.

## 1.2 边界条件

假设光杆和悬点的运动规律一致,地面悬点在不同时刻的位移为  $u_j$ ,悬点运动载荷为  $F_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .以下死点为位移的零点,悬点向上运动方向为位移正方向,则边界条件为

$$u_{(0, j)} = -u_j, \quad (10)$$

$$F_j = EA_{vj} \left. \frac{\partial u}{\partial s} \right|_{1, j} = EA_{vj} \frac{u_{(1, j)} - u_{(0, j)}}{\Delta s}. \quad (11)$$

将接箍看成一级管柱,在杆柱与接箍连接界面处,需满足以下连续性条件:

$$u(s, t)_i = u(s, t)_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (12)$$

$$F(s, t)_i = F(s, t)_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots. \quad (13)$$

## 2 有杆抽油泵功图诊断模型的求解

### 2.1 均质杆段位移求解

在均质杆段,将抽油杆柱轴线离散成等步长的  $m$  个单元,步长为  $\Delta s$ ,各单元以下标  $i$  表示,  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ;将时间  $t$  离散成  $n$  个时间段,时间步长为  $\Delta t$ ,各时间点以下标  $j$  表示,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ,则  $u_{i, j}$  表示抽油杆柱上第  $i$  个节点在时刻  $j$  的位移.根据 Newton(牛顿)差分公式可得  $u(s, t)$  对时间  $t$  和井深  $s$  的二阶中心差分格式分别为

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i, j} = \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{\Delta t^2}, \quad (14)$$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)_{i, j} = \frac{u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}}{\Delta s^2}. \quad (15)$$

$u(s, t)$  对时间  $t$  的一次导数为

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i, j} = \frac{u_{i, j+1} - u_{i, j-1}}{2\Delta t}. \quad (16)$$

采用 3 层隐式差分格式,整理得

$$u_{i+1, j} = \kappa(u_{i, j+1} - 2u_{i, j} + u_{i, j-1}) + \frac{\kappa \Delta t c}{2}(u_{i, j+1} - u_{i, j-1}) + 2u_{i, j} - u_{i, j-1} - \kappa g' \Delta t^2, \quad (17)$$

其中  $\kappa = \frac{\Delta s^2}{a^2 \Delta t^2}$ .

如果有限差分式(17)中  $u_{i, j}$  项的系数为负<sup>[5]</sup>,则其解是不稳定的,因此有限差分解的收敛条件为  $\kappa \leq 1$ .

### 2.2 组合杆段位移的求解

把接箍看作为一级杆柱,图 3 所示的第一、二级杆柱波动方程可写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - c_k \frac{\partial u}{\partial t} + g'_k, \quad k = 1, 2. \tag{18}$$

将  $u_{i-1,j}, u_{i+1,j}$  分别在  $u_{i,j}$  处 Taylor(泰勒)展开得

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{i1} \Delta s_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)_{i1} (\Delta s_1)^2, \tag{19}$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{i2} \Delta s_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)_{i2} (\Delta s_2)^2. \tag{20}$$

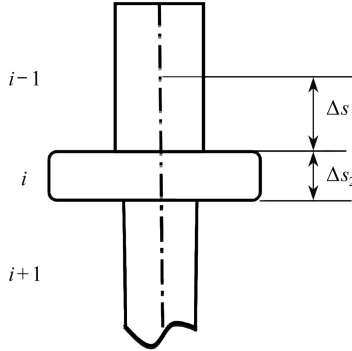


图3 组合杆段示意图

Fig.3 Schematic diagram of a box coupling on the sucker rod

联立式(12)、(13)、(18)、(19)、(20)推导出界面处的位移方程如下:

$$u_{i+1,j} = \frac{\alpha_s + \beta_s}{\nu_2} u_{i,j+1} - \frac{2\alpha_s - \nu_1 - \nu_2}{\nu_2} u_{i,j} + \frac{\alpha_s - \beta_s}{\nu_2} u_{i,j-1} - \frac{\nu_1}{\nu_2} u_{i-1,j} - \frac{r_1 g'_1 + r_2 g'_2}{\nu_2}, \tag{21}$$

式中

$$\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_2; \beta_s = \beta_1 + \beta_2, \\ \alpha_k = \frac{(\Delta s EA_r)_k}{2(\alpha_k \Delta t)^2}, \beta_k = \frac{(\Delta s EA_r c)_k}{4\alpha_k^2 \Delta t}; \nu_k = \frac{(EA_r)_k}{\Delta s_k} \quad (k = 1, 2),$$

$r_1, r_2$  为每级管半径, m.

### 2.3 泵载荷求解

根据边界条件(10)、(11),利用文献[6]中的差分网格算法(图4),得到泵载荷公式为

$$P_{m,j} = E_r A_r \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{m,j} = E_r A_r \left(\frac{3}{2} u_{m,j} - 2u_{m-1,j} + \frac{1}{2} u_{m-2,j}\right). \tag{22}$$

### 2.4 阻尼系数确定

上述推导得到了抽油杆柱任意位置处的位移和载荷的计算公式,但公式中的阻尼系数  $c$  还是未知量,需要确定公式中的阻尼系数,才能递推计算得到泵功图.系统的阻尼系数受到温度、液体粘度、密度、流速等的影响,而液体粘度、密度会随温度、流速的变化而改变,实际阻尼系数很难测得,通常以等效阻尼系数代替<sup>[7-8]</sup>.目前,确定等效阻尼系数的方法主要有3种:①经验算法,根据经验输入不同的阻尼系数,由计算机试算,直至得出理想泵功图为止;②根据不同假设推导出等效阻尼系数,如 Everitt 公式<sup>[9]</sup>,余国安公式<sup>[8]</sup>;③根据示功图计算阻尼系数,如 Chacin 方法<sup>[10]</sup>.

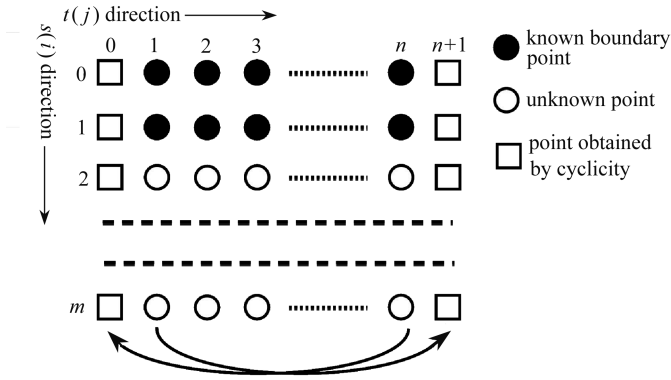


图4 差分网格图

Fig.4 The difference grid used

为了比较准确地计算等效阻尼系数,以抽油杆柱波动方程为基础,利用数值积分法,推导出与实际泵功图参数有关的等效阻尼系数计算公式,并建立相应的迭代算法来计算等效阻尼系数.

将式(9)改写成如下形式:

$$EA_r \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} ds = \rho_r A_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds + c \rho_r A_r \frac{\partial u}{\partial t} ds - \rho'_r A_r g ds. \quad (23)$$

假设上冲程时间为0到  $T_1$ ,下冲程时间为从  $T_1$  到  $T$ ,将式(23)沿  $s$  方向数值积分,等式左边积分为

$$\int_0^L EA_r \frac{\partial^2 u(s,t)}{\partial s^2} ds = \sum_{i=1}^n EA_{ri} \left[ \frac{\partial u(s_i,t)}{\partial s} - \frac{\partial u(s_{i-1},t)}{\partial s} \right] = \sum_{i=1}^n [F(s_i,t) - F(s_{i-1},t)] = F(s_n,t) - F(s_0,t) = F_p(t) - F_o(t), \quad (24)$$

式中,  $F_p(t)$  为泵的动载荷, N;  $F_o(t)$  为光杆动载荷, N.

对式(23)积分后可以得到

$$F_p(t) - F_o(t) = \int_0^L \rho_r A_r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ds + \int_0^L c \rho_r A_r \frac{\partial u}{\partial t} ds - \int_0^L \rho'_r A_r g ds. \quad (25)$$

对式(25)在上冲程对时间积分并变换积分次序可得

$$\int_0^{T_1} [F_p(t) - F_o(t)] dt = \int_0^L \rho_r A_r \int_0^{T_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt ds + \int_0^L c \rho_r A_r \int_0^{T_1} \frac{\partial u}{\partial t} dt ds - T_1 \int_0^L \rho'_r A_r g ds. \quad (26)$$

令  $\bar{F}_{pu} = \left[ \int_0^{T_1} F_p(t) dt \right] / T_1$  为上冲程泵的平均动载荷, N;  $\bar{F}_{ou} = \left[ \int_0^{T_1} F_o(t) dt \right] / T_1$  为上冲程光杆的平均动载荷, N.

则式(26)可写为

$$T_1 (\bar{F}_{pu} - \bar{F}_{ou}) = c \int_0^L \rho_r A_r [u(s, T_1) - u(s, 0)] ds +$$

$$\int_0^L \rho_r A_r \left[ \frac{\partial u(s, T_1)}{\partial t} - \frac{\partial u(s, 0)}{\partial t} \right] ds - T_1 \int_0^L \rho'_r A_r g ds \cdot \quad (27)$$

同理在下冲程对时间积分并变换可得

$$(T - T_1)(\bar{F}_{pd} - \bar{F}_{od}) = c \int_0^L \rho_r A_r [u(s, T) - u(s, T_1)] ds + \int_0^L \rho_r A_r \left[ \frac{\partial u(s, T)}{\partial t} - \frac{\partial u(s, T_1)}{\partial t} \right] ds - (T - T_1) \int_0^L \rho'_r A_r g ds, \quad (28)$$

其中

$$\bar{F}_{pd} = \left[ \int_{T_1}^T F_p(t) dt \right] / (T - T_1) \text{ 为下冲程泵的平均动载荷, N;}$$

$$\bar{F}_{od} = \left[ \int_{T_1}^T F_o(t) dt \right] / (T - T_1) \text{ 为下冲程光杆的平均动载荷, N.}$$

假设: ①  $T_1 = \theta T (0.5 \leq \theta < 1)$ ,  $\theta$  可根据抽油机型号或者地面示功图数据确定; ②  $u(s, T_1) - u(s, 0) = -(S_o + S_p)/2$ ,  $S_o$  为光杆冲程, m;  $S_p$  为泵冲程, m. 结合初始条件, 由式(27) ~ (28) 推出等效阻尼系数公式如下:

$$c = \frac{T(1 - \theta)(\bar{F}_{pd} - \bar{F}_{od}) - \theta(\bar{F}_{pu} - \bar{F}_{ou}) - (T - 2T_1) \sum_{i=1}^n \rho'_{ri} A_{ri} g}{S_o(1 + S_p/S_o) \sum_{i=1}^n \rho_i A_r s_i}, \quad (29)$$

其中,  $\bar{F}_{ou}, \bar{F}_{od}$  根据光杆示功图上、下冲程面积积分除以光杆冲程长度求得;  $\bar{F}_{pu}, \bar{F}_{pd}$  根据泵功图上、下冲程面积积分除以泵冲程长度求得。

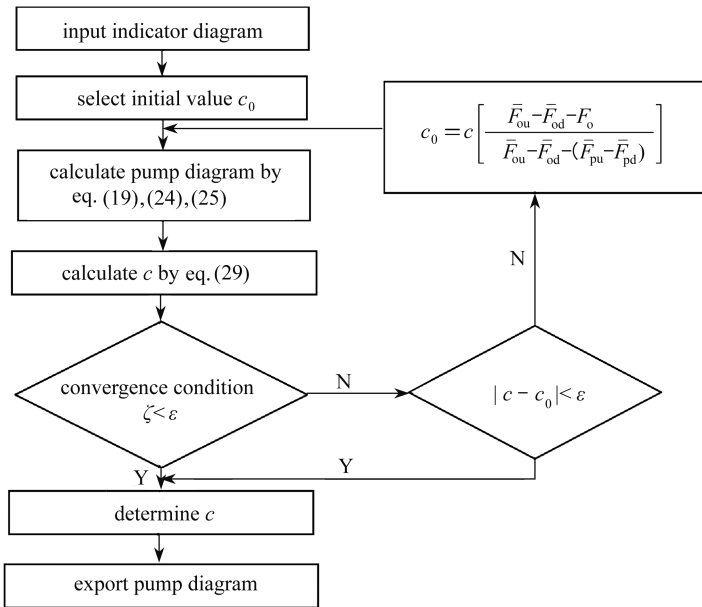


图5 泵功图计算流程图

Fig.5 Calculation flowchart for the pump diagram

## 2.5 泵功图的计算

利用迭代法计算泵功图的流程如图5所示, 其中,  $\zeta$  表示收敛条件,  $\epsilon$  为允许误差:

$$\zeta = \left| \frac{\bar{F}_{ou} - \bar{F}_{od} - F_o}{\bar{F}_{ou} - \bar{F}_{od} - (\bar{F}_{pu} - \bar{F}_{pd})} - 1 \right| < \varepsilon^{[11]}.$$

### 3 实例验证

根据新建立的泵功图诊断模型及计算方法,利用 MATLAB 编制了计算泵功图的程序,以某抽油井(油管锚定)地面示功图为例,分别用上述方法和 Gibbs 方法计算了 3 级杆柱的泵功图,结果如图 6、图 7 所示。

对比图 6、图 7 可知,利用同一地面示功图,本模型求得的泵功图与 Gibbs 模型所得结果相比,泵功图更加接近油管锚定时理论泵功图,即柱塞的无效移动距离较短;同时泵功图曲线更加光滑,有利于分析影响泵功图变化的主要因素.这说明本模型建模方法正确,对多级杆柱连接界面处的连续性条件处理更加合理,计算方法稳定,所得结果与实际吻合。

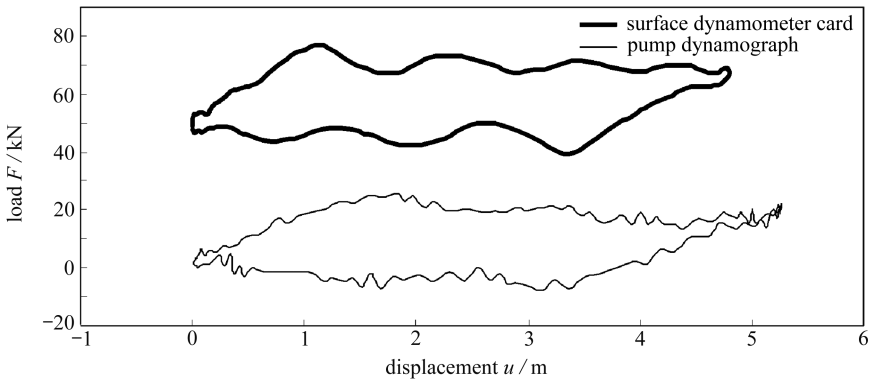


图 6 Gibbs 模型得到的泵功图

Fig.6 The pump dynamograph obtained with Gibbs model

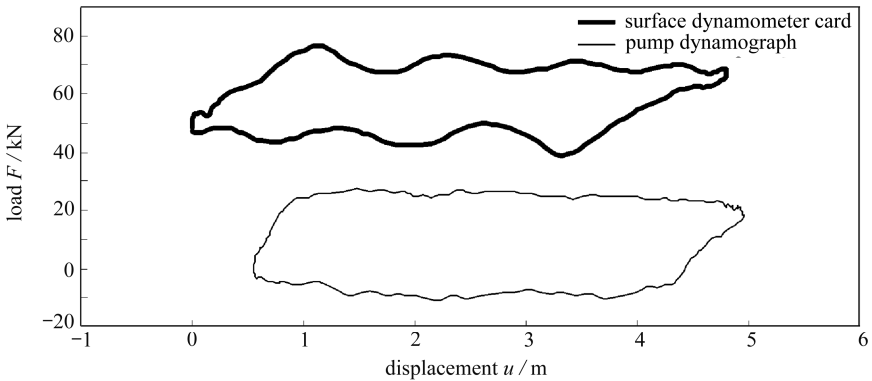


图 7 新模型得到的泵功图

Fig.6 The pump dynamograph obtained with the new model

### 4 结 论

- 1) 考虑接箍、重力、浮力等因素的影响建立了一种新的有杆抽油泵功图诊断数学模型。
- 2) 建立了一种基于均质管段隐式差分、接箍连接界面处变步长有限差分的模型求解方法,得到了任意位置的位移及载荷表达式。

3) 利用数值积分的方法,推导了等效阻尼系数计算公式,采用迭代算法实现了等效阻尼系数的计算。

4) 与 Gibbs 方法相比,本模型得到的泵功图更接近实际,验证了模型的可靠性和算法的准确性。

5) 由于模型没有考虑油管柱、液柱与抽油杆的相互作用,今后需要进一步加以完善。

#### 参考文献(References):

- [1] 张琪. 采油工程原理与设计[M]. 山东:中国石油大学出版社, 2006:157-163.(ZHANG Qi. *Principles of Petroleum Production Engineering and Design*[M]. Shandong: China University of Petroleum Press, 2006: 157-163.(in Chinese))
- [2] 刘磊明, 张发强, 闫成玉, 殷进垠, 黄学斌. 有杆抽油系统通用数学模型研究[J]. 石油学报, 2008, **29**(5): 769-772.(LIU Lei-ming, ZHANG Fa-qiang, YAN Cheng-yu, YIN Jin-yin, HUANG Xue-bin. Study on a general mathematical model for suck and pumping system[J]. *Acta Petrolei Sinica*, 2008, **29**(5): 769-772.(in Chinese))
- [3] 李子丰, 李敬元, 马兴瑞, 黄文虎. 油气井杆管柱动力学基本方程及应用[J]. 石油学报, 1999, **20**(3): 87-90.(LI Zi-feng, LI Jing-yuan, MA Xing-rui, HUANG Wen-hu. Fundamental equations and its applications for dynamical analysis of rod and pipe string in oil and gas wells[J]. *Acta Petrolei Sinica*, 1999, **20**(3): 87-90.(in Chinese))
- [4] Gibbs S G, Neely A B. Computer diagnosis of down-hole conditions in sucker rod pumping wells[J]. *Journal of Petroleum Technology*, 1966, **18**(1): 91-98.
- [5] 崔振华. 有杆抽油系统[M]. 北京:石油工业出版社, 1994: 253-254.(CUI Zhen-hua. *Sucker Rod Pumping System*[M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 1994: 253-254.(in Chinese))
- [6] 王凯. 定向井有杆抽油泵系统诊断模型的建立[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2010, **34**(2): 130-135.(WANG Kai. Modeling method for fault diagnosis to sucker rod pumping system in directional well[J]. *Journal of China University of Petroleum (Edition of Natural Science)*, 2010, **34**(2): 130-135.(in Chinese))
- [7] 曹钧合. 抽油杆柱动态方程等效粘滞阻尼系数的确定[J]. 石油钻采工艺, 1988, **15**(2): 97-101.(CAO Jun-he. Sucker rod dynamics equations to determine the equivalent viscous damping [J]. *Oil Drilling & Production Technology*, 1988, **15**(2): 97-101.(in Chinese))
- [8] 余国安, 高国华. 利用示功图计算抽油井阻尼系数[J]. 石油钻采工艺, 1991, **5**(5): 57-64.(YU Guo-an, GAO Guo-hua. Calculating viscous damping factor of pumping wells with dynamometer cards[J]. *Oil Driling & Production Technology*, 1991, **5**(5): 57-64.(in Chinese))
- [9] Everitt T A, Jennings J W. An improved finite-difference calculation of downhole dynamometer cards for sucker-rod pumps[J]. *SPE Production Engineering*, 1992, **7**(1): 121-127.
- [10] Chacin J E, Purcupile J C. A new model for studying oilwell pumping installations[C]//*SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Dallas, Texas: Society of Petroleum Engineers, 1987: 395-405.
- [11] 李冬平. 有杆抽油系统杆柱动特性的预测与计算机仿真[D]. 硕士学位论文. 西安:西安理工大学, 2003: 35-38.(LI Dong-ping. Prediction of sucker rod string dynamic characteristics and computer simulation research for rod pumping system[D]. Master Thesis. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2003: 35-38.(in Chinese))



# A New Model and Calculating Method for Pump Dynamograph Diagnosis of Sucker Rod Pumping Systems

SUN Ren-yuan<sup>1</sup>, ZHANG Yun-fei<sup>1</sup>, FAN Kun-kun<sup>1</sup>,  
WANG Jian<sup>2</sup>, LIU Zhuo<sup>1</sup>, LU Xue-jiao<sup>1</sup>

- (1. *School of Petroleum Engineering, China University of Petroleum,  
Qingdao, Shandong 266580, P.R.China;*  
2. *Engineering Institute of Henan Oilfield Company, Sinopec,  
Nanyang, Henan 473132, P.R.China*)

**Abstract:** The existing Gibbs model was improved through analysis of the dynamic characteristics of the micro units out of hybrid sucker rods. A new pump dynamograph diagnosis mathematical model was established for sucker rod pumping systems. The model was solved with the methods of implicit difference scheme and variable step size finite difference scheme. The displacement and load expressions at the interface of the box coupling and at any position of the uniform sucker rod segments were obtained. The formula of equivalent damping coefficient was derived and calculated through the corresponding iterative algorithm. With a well surface dynamometer card as an example, the pump dynamograph was calculated by means of the new model, and the results were compared with those from the Gibbs method. The comparison indicates that the new model and algorithm is stable and reliable, and the resulting pump dynamograph fits the actual situation better than that from the Gibbs model.

**Key words:** mathematical model; pump dynamograph; equivalent damping coefficient; iterative algorithm

**Foundation item:** The National Science and Technology Major Project of China  
(2011ZX05031-002-007HZ)