

# 考虑纤维弯曲刚度的橡胶-帘线复合材料 各向异性超弹性本构模型<sup>\*</sup>

孙书蕾<sup>1</sup>, 毛建良<sup>2</sup>, 彭雄奇<sup>3</sup>

- (1. 西北工业大学 机电学院, 西安 710072;  
2. 中国南方航空股份有限公司, 广州 510405;  
3. 上海交通大学 材料科学与工程学院, 上海 200030)

(本刊编委彭雄奇来稿)

**摘要:** 针对纤维增强复合材料的有限变形, 基于 Spencer 的连续介质力学不变量理论, 提出了一种考虑纤维弯曲刚度的非线性超弹性本构模型. 通过引入变形后纤维方向向量的梯度项, 把单位体积的自由应变能分解为便于参数识别的体积变形、等容变形、各向异性变形和弯曲刚度 4 部分. 理论和实验分析均表明传统的基于连续介质力学的纤维增强复合材料有限变形理论不适用于弯曲变形, 必须考虑纤维弯曲刚度的影响. 数值仿真结果也验证了在应变能函数中增加弯曲刚度项是必要的.

**关键词:** 复合材料; 本构; 超弹性; 弯曲刚度; 各向异性

**中图分类号:** O331; O34; TB332 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.05.001

## 引言

基于连续介质力学理论的纤维增强复合材料有限变形理论, 由 Adkins 和 Rivlin 首先提出并建立<sup>[1]</sup>. Spencer 采用不变量的方法<sup>[2-3]</sup>, 把纤维方向用参考构型的一个单位向量来表示, 对纤维增强复合材料有限变形的理论进一步细化. 这种方法被广泛地应用于复合材料在有限变形的情况下, 特别是在工业和生物力学界, 橡胶纤维增强材料组成的空气压缩弹簧<sup>[4]</sup>和生物中的椎间盘组织, 并取得了很好的成果, 证明了这种方法的有效性. Peng 等提出一种新的本构方程<sup>[5]</sup>, 把人体椎间盘纤维环单位体积能量函数分为基质、纤维和两者的交互作用 3 部分, 并通过分步的实验确定材料参数, 实验和仿真的数据符合得很好. 在生物力学中另一重要应用是动脉壁本构的建立<sup>[6]</sup>. 但是当把这种基于连续介质力学建立的均质化本构模型用于弯曲模型时, 发现单纯的 Spencer 建立的纤维增强的有限变形理论并不能准确描述弯曲的力学行为, 因为传统的 Spencer 理论有一个前提即假设: 纤维是无限柔软的. 这在大部分情况下, 比如拉伸和

\* 收稿日期: 2013-12-16; 修订日期: 2014-04-04

基金项目: 国家自然科学基金(11172171)

作者简介: 孙书蕾(1980—), 男, 湖北荆门人, 博士生(E-mail: bobsunstuy@gmail.com);  
彭雄奇(1970—), 男, 湖南娄底人, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: xqpeng@sjtu.edu.cn).

压缩情况下是有效的假设.在传统的 Spencer 理论中没有任何尺寸方面的参数,因而也不能解释任何方面的尺寸效应,弯曲变形就是一个例子.Spencer 为此建立了考虑纤维尺寸效应的基于不变量的模型<sup>[7]</sup>,但是模型过于复杂,只具有理论方面的意义,至今没有见到任何实际应用.

本文在 Spencer 建立的不变量理论<sup>[7]</sup>的基础上,试图建立一种考虑纤维弯曲刚度的各向异性超弹性本构模型,即增加依赖于变形后纤维方向向量梯度的参数,从而和曲率建立关系.仿真结果与橡胶帘线复合材料弯曲实验数据的对比证明了模型的正确性.

## 1 橡胶-帘线本构模型

### 1.1 传统的各向异性超弹性纤维增强复合材料本构模型

根据 Spencer 的各向异性纤维增强复合材料理论<sup>[3]</sup>,单位体积的 Helmholtz 应变能量函数依赖于变形梯度和纤维方向:

$$W = W(\mathbf{C}, \mathbf{A}). \quad (1)$$

$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  是右 Cauchy-Green (柯西-格林) 变形张量,  $\mathbf{A}$  代表纤维初始方向的单位向量,这里  $\mathbf{F}$  是变形梯度张量.单位体积的 Helmholtz 应变能量函数也可以写成关于  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{A}$  的不变量的形式:

$$\begin{cases} W = W[I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C}), I_4(\mathbf{C}, \mathbf{A}), I_5(\mathbf{C}, \mathbf{A})], \\ I_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)], I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}), \\ I_4 = (\mathbf{C}, \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}, I_5(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{A}. \end{cases} \quad (2)$$

变形梯度  $\mathbf{F}$  可以分解为等容变形和体积变形,因此可以把应变能量函数分解为以下 3 个部分<sup>[6]</sup>:

$$W = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{\text{ani}}(\bar{I}_4, \bar{I}_5), \quad (3)$$

$W_{\text{vol}}, W_{\text{iso}}, W_{\text{ani}}$  分别代表体积变形、各向同性变形和各向异性变形所引起的弹性变形能.  $J = \sqrt{I_3} = \det(\mathbf{F})$  是变形体积比,  $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_4$  和  $\bar{I}_5$  为相应的偏不变量:

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1, \bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2, \bar{I}_4 = J^{-2/3} I_4, \bar{I}_5 = J^{-4/3} I_5. \quad (4)$$

为了便于参数拟合,也可以把应变能分解为

$$W = W_{\text{F}} + W_{\text{M}} + W_{\text{FM}}, \quad (5)$$

这里,基质贡献的能量  $W_{\text{M}}$  为式(3)中的  $W_{\text{vol}} + W_{\text{iso}}$ ,  $W_{\text{F}} + W_{\text{FM}}$  贡献的能量约为式(3)中的  $W_{\text{ani}}$ .根据上面的分析,对于各向异性的考虑可压缩性的纤维增强复合材料,单位体积应变能的一个常见形式为<sup>[8-10]</sup>

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{D}(J-1)^2 + \sum_{i=1}^3 a_i (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{j=1}^3 b_j (\bar{I}_2 - 3)^j + \\ \sum_{k=2}^6 c_k (\bar{I}_4 - 1)^k + \sum_{l=2}^6 d_l (\bar{I}_5 - 1)^l, \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $D$  是与体积变形相关的参数,  $a, b, c, d$  则分别为不变量相关的参数.根据链导法则,将应变能函数对右 Cauchy-Green 变量  $\mathbf{C}$  求导数,就可以得到二阶 Piola-Kirchhoff 应力张量:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{vol}} + \mathbf{S}_{\text{iso}} + \mathbf{S}_{\text{ani}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}}. \quad (7)$$

对于近似不可压缩材料

$$\mathbf{S}_{\text{iso}} + \mathbf{S}_{\text{ani}} = J^{-2/3} \text{dev} \left( 2 \sum_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq 3}}^5 \frac{\partial W_{\text{iso+ani}}}{\partial \bar{I}_\alpha} \frac{\partial \bar{I}_\alpha}{\partial \mathbf{C}} \right). \quad (8)$$

这里

$$\begin{cases} \text{dev}(\cdot) = (\cdot) - (1/3)[(\cdot) : \mathbf{C}]\mathbf{C}^{-1}, \\ \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \bar{I}_1 \mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}}, \\ \frac{\partial \bar{I}_4}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \quad \frac{\partial \bar{I}_5}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{A} \otimes \bar{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{A}, \\ \mathbf{S}_{\text{vol}} = 2 \frac{\partial W_{\text{vol}}}{\partial \mathbf{C}} = Jp\mathbf{C}^{-1}, \end{cases} \quad (9)$$

$p = dW_{\text{vol}}/dJ$ . 进而可以得到 Cauchy 应力张量:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (10)$$

## 1.2 考虑弯曲刚度的纤维增强复合材料本构模型

传统的本构模型中应变能的形式仅仅依赖于变形梯度  $\mathbf{F}$  和变形前的单位向量  $\mathbf{A}$ . 设变形后的单位向量为  $\mathbf{a}$ , 纤维方向向量变形前后的关系为

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (11)$$

$\lambda$  为纤维的伸长率, 考虑弯曲刚度时, 增加一项变形后纤维方向向量  $\mathbf{b}$  的梯度项  $\mathbf{G} = \partial \mathbf{b} / \partial \mathbf{X}$ ,

$$W = W(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{A}). \quad (12)$$

根据刚体旋转不变性的要求, 即,

$$W(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{A}) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}, \mathbf{A}), \quad (13)$$

这里  $\mathbf{Q}$  为任意正交张量,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  应该写成标量积的形式, 分别为

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{G}^T \cdot \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{G}. \quad (14)$$

可得  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}$ , 再由 Cayley-Hamilton 公式<sup>[11]</sup>:

$$I_3 \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^2 - I_1 \mathbf{C} + I_2 \mathbf{I}, \quad (15)$$

因此  $\mathbf{\Gamma}$  可以由  $\mathbf{A}, \mathbf{C}$  以及  $\mathbf{C}$  的不变量来表示, 最终,  $W$  可以表示为  $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{A}$  的函数:

$$W = W(\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{A}). \quad (16)$$

根据文献[12]中表1的公式,  $W$  为关于  $\mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{A}$  各向同性的不变量一共有33个. 由于其过于复杂, 为了简化本构方程, 现在假设  $W$  更严格依赖于纤维的曲率, 即依赖于变形后纤维方向向量  $\mathbf{b}$  的方向导数  $\mathbf{A}(\partial \mathbf{b} / \partial \mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = \kappa$ , 变形梯度  $\mathbf{F}$  和变形前的单位向量  $\mathbf{A}$ , 即

$$W = W\left(\mathbf{F}, \mathbf{A}, \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{X}}\right). \quad (17)$$

同上,  $\mathbf{F}, \kappa$  应写成乘积的形式, 分别为

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{K} = \kappa \mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}, \quad \kappa^2 = \kappa \kappa. \quad (18)$$

这样  $W$  可以表示为  $\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{K}, \kappa^2$  的函数:

$$W = W(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{K}, \kappa^2). \quad (19)$$

根据张量函数的表示理论<sup>[12]</sup>, 一共可以表示为11个不变量, 其中前5个不变量与公式(2)中的相同.

$$\begin{cases} I_6 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad I_7 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \\ I_8 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad I_9 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \\ I_{10} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \quad I_{11} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{K} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \end{cases} \quad (20)$$

这里  $\mathbf{A} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ , 由式(20)可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial I_6}{\partial \mathbf{C}} = 0, \frac{\partial I_7}{\partial \mathbf{C}} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}), \frac{\partial I_8}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}), \\ \frac{\partial I_9}{\partial \mathbf{C}} = 0, \frac{\partial I_{10}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}), \frac{\partial I_{11}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}), \\ \frac{\partial I_6}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \frac{\partial I_7}{\partial \mathbf{A}} = 2(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, \frac{\partial I_8}{\partial \mathbf{A}} = 2(\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, \\ \frac{\partial I_9}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \frac{\partial I_{10}}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}, \frac{\partial I_{11}}{\partial \mathbf{A}} = (\mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{A}) \otimes \mathbf{A}. \end{cases} \quad (21)$$

综上所述,考虑弯曲刚度的总应变能形式为

$$W = W_{\text{vol}}(J) + W_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{\text{ani}}(\bar{I}_4, \bar{I}_5) + W_G(\bar{I}_{\alpha=6,7,8,9,10,11}), \quad (22)$$

这里  $W_G$  为不变量中与弯曲刚度相关的  $I_6 \sim I_{11}$  部分贡献的能量。

## 2 应变能具体形式的讨论及相应参数的确定

如图1所示的V带,是广泛应用于汽车、机器和机床等传动的传动带,其结构复杂,除橡胶外还含有织物和芯线,因而具有各向异性的特性。Ishikawa 等对其进行了一系列实验及仿真研究<sup>[13]</sup>,下面主要以他们的实验数据为主进行本构模型的参数拟合和仿真。

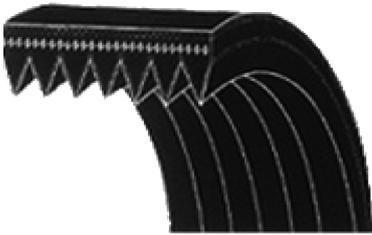


图1 齿形切边V带  
Fig.1 The raw edged cogged V-belt

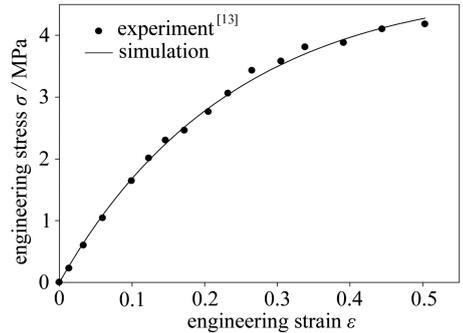


图2 橡胶横向单轴拉伸应力应变曲线  
Fig.2 Transverse uniaxial tensile stress-strain curve of the rubber

### 2.1 基质橡胶的应变能及参数

基质橡胶通常被看作是一种超弹性材料,为了得到准确的材料参数,对V带进行横向的单轴拉伸试验,此时得到的应力-应变关系可以近似表征为超弹性基质橡胶的性能。运用ABAQUS超弹性部分自带的拟合模块,考虑到可压缩性,设定橡胶的Poisson(泊松)比为0.47,采用比较典型的Mooney-Rivlin模型比较符合基质材料的力学性能,拟合曲线如图2所示。考虑可压缩性橡胶的Mooney-Rivlin应变能形式如下所示:

$$W_{\text{iso+vol}} = (J - 1)^2/D + C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3). \quad (23)$$

由上述曲线拟合横向单轴拉伸得到的参数为

$$D = 0.017\ 63\ \text{MPa}^{-1}, C_{10} = -0.875\ \text{MPa}, C_{01} = 4.347\ 8\ \text{MPa}.$$

### 2.2 纤维部分的应变能形式及参数确定

拉伸应变和纤维拉伸率有如下的近似关系:

$$\varepsilon = \lambda - 1 = \sqrt{I_4} - 1, \quad (24)$$

这里,  $\lambda$  为纤维的伸长率, 利用式(24), 通过力-位移曲线得到应力和  $\sqrt{I_4} - 1$  之间的关系, 最后将拉伸应变能表示成  $I_4 - 1$  的函数,  $I_5$  贡献的能量与纤维和基质相互作用有关, 在这里根据式(6)写成如下的形式:

$$W_{ani} = C_2 (\bar{I}_4 - 1)^2 + C_3 (\bar{I}_4 - 1)^4 + C_4 (\bar{I}_5 - 1)^2 + C_5 (\bar{I}_5 - 1)^4. \quad (25)$$

用 MATLAB 编制程序进行数据拟合. 拟合曲线如图 3 所示.

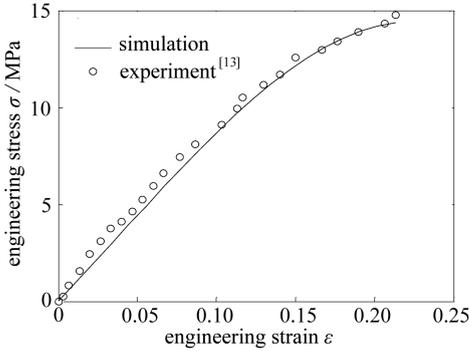


图 3 纤维纵向单轴拉伸应力-应变曲线

Fig.3 Longitudinal uniaxial tensile stress-strain curve of the fiber

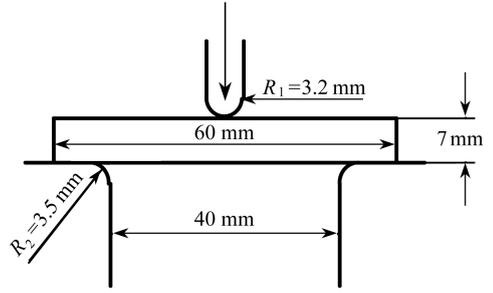


图 4 数值算例几何模型示意图

Fig.4 Geometry of the numerical example

最终得到的材料参数为

$$C_2 = 7.9718 \text{ MPa}, C_3 = -6.7227 \text{ MPa}, C_4 = 0.086 \text{ MPa}, C_5 = -0.027 \text{ MPa}.$$

从上面拟合的结果来看,  $I_4$  贡献的能量要远远大于  $I_5$  所贡献的能量. 关于  $I_5$  更详细的讨论可以参考文献[5].

### 2.3 纤维弯曲刚度贡献的应变能及参数的确定

从方程(14)可以看到, 不变量中  $I_6$  到  $I_{11}$  都与纤维的曲率相关. 为方便起见, 这里假设纤维的变形为线弹性, 忽略二次及以上的项, 这样对于弯曲刚度贡献的应变能仅仅考虑  $I_9$ , 得到

$$W_c = C_6 \bar{I}_9^2. \quad (26)$$

由于加入弯曲刚度的影响后, 导致偶应力的产生及应力矩阵不再对称, 采取 MATLAB 编程进行求解. 由于缺乏相应的实验数据来确定  $C_6$  的具体数值, 采取分别取值的方法来研究  $W_c$  对弯曲变形的影响.

## 3 数值验证

橡胶-帘线增强复合材料在实际使用时会产生弯曲现象, 结合前面参数拟合得到的材料参数, 编制相应有限元程序, 模拟如图 4 所示橡胶帘线复合材料-传动 V 带的弯曲仿真. 尺寸为  $60 \text{ mm} \times 25 \text{ mm} \times 7 \text{ mm}$  的长方体试样从传动 V 带中裁出, 纤维方向为一族纵向增强.

图 5 为 ABAQUS 仿真的有限元模型, 加载速度为  $10 \text{ mm/min}$ , 复合材料单元为 C3D8R 单元, 冲头和支持部分则设置为解析刚体. 考虑对称性, 仿真取一半模型以减少计算量. 从图 5 中可以看出, 试样下部处于拉伸状态时, 与压头接触的部分处于压缩状态. 图 6 为刚性压头质量力与相应位移的曲线图, 可以看出不考虑弯曲刚度, 即  $C_6$  为 0 的时候, 仿真得到的曲线和实验的曲线有很大差距, 这也表明传统的连续介质本构模型只适用于单纯的拉伸和压缩, 对于弯曲

工况并不适用。当分别取  $C_6$  为 5 MPa 和 22.3 MPa 的时候,可以看到仿真得到曲线和实验的曲线渐趋一致。从而证明了考虑弯曲刚度的超弹性本构模型的正确性。

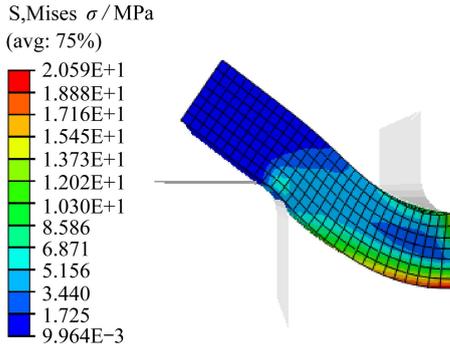


图5 弯曲有限元模型

Fig.5 Finite element model for the bending test

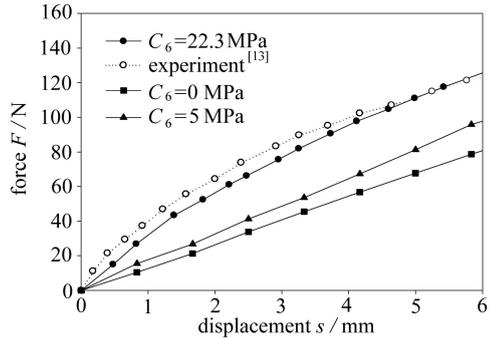


图6 弯曲力-位移曲线

Fig.6 Force-displacement curve of the bending test

## 4 结 论

1) 理论和仿真的结果均表明传统的基于 Spencer 连续介质力学理论的纤维增强大变形理论虽然取得了很大的成果,但仅仅适用于拉伸压缩变形,不适用于弯曲变形。

2) 基于 Spencer 不变量理论,本文引入变形后纤维向量的梯度项,从而提出一种考虑纤维弯曲刚度影响的各向异性橡胶-帘线复合材料超弹性本构模型,数值算例和实验的对比较验证了模型的正确性。

3) 提出一套参数识别方案,用横向单轴拉伸试验对基质材料进行了数据拟合,确定了基质的材料参数。然后用沿帘线方向的单轴试验对本构模型其他参数进行数据拟合,最终确定除弯曲刚度外本构方程的所有材料参数。

## 参考文献 (References) :

- [1] Adkins J E, Rivlin R S. Large elastic deformations of isotropic materials X: reinforcement by inextensible cords[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1955, **248**(944): 201-223.
- [2] Spencer A J M. *Deformations of Fibre Reinforced Materials (Science Research Papers)* [M]. Oxford: Clarendon Press, 1972.
- [3] Spencer A J M. Constitutive theory for strongly anisotropic solids [C]//Spencer A J M ed. *Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites*. CISM Courses and Lectures No 282. Wien: Springer-Verlag, 1984: 1-32.
- [4] Nam T H, Marvalová B. Deformation analysis of inflated cylindrical membrane of composite material with rubber matrix reinforced by cords[C]//*XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM)*. Warsaw, Poland, 2004.
- [5] Peng X Q, Guo Z Y, Moran B. An anisotropic hyperelastic constitutive model with fiber-matrix shear interaction for the human annulus fibrosus[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2006, **73**(5): 815-824.
- [6] Holzapfel G A, Gasser T C, Ogden R W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models[J]. *Journal of Elasticity and the Physical Science of Solids*, 2000, **61**(1/3): 1-48.

- [7] Spencer A J M, Soldatos K P. Finite deformations of fibre-reinforced elastic solids with fibre bending stiffness[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, **42**(2): 355-368.
- [8] Simo J C, Taylor R L. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. continuum basis and numerical algorithms[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, **85**(3): 273-310.
- [9] Weiss J A, Maker B N, Govindjee S. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **135**(1/2): 107-128.
- [10] Kaliske M. A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, **185**(2/4): 225-243.
- [11] Ogden R W. *Nonlinear Elastic Deformations*[M]. Mineola, New York: Dover Publication, 1984.
- [12] Zheng Q S. Theory of representations for tensor functions—a unified invariant approach to constitutive equations[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1994, **47**(11): 545-587.
- [13] Ishikawa S, Tokuda A, Kotera H. Numerical simulation for fibre reinforced rubber[J]. *Journal of Computational Science and Technology*, 2008, **2**(4): 587-596.

## An Anisotropic Hyperelastic Constitutive Model With Fibre Bending Stiffness for Cord-Rubber Composites

SUN Shu-lei<sup>1</sup>, MAO Jian-liang<sup>2</sup>, PENG Xiong-qi<sup>3</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;

2. China Southern Airlines Ltd., Guangzhou 510405, P.R.China;

3. School of Materials Science and Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030, P.R.China)

(Contributed by PENG Xiong-qi, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Based on the invariant theory of continuum mechanics by Spencer, an anisotropic nonlinear hyperelastic constitutive model involving fibre bending effect was developed for cord-reinforced rubber composite materials. Through introduction of the gradient of fiber vector after deformation, the unit-volume strain energy function was decomposed into four parts: volumetric, isochoric, anisotropic and bending deformation energy terms, which were convenient for parameter identification. Both the theoretical analysis and experimental study indicate that the traditional finite deformation theory based on the continuum mechanics for fibre-reinforced composite materials is not suitable for bending deformation. With the fibre bending stiffness taken into consideration, the present constitutive model's correctness is validated by the numerical bending simulation of a previous test.

**Key words:** composite; constitutive; hyperelastic; bending stiffness; anisotropic

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11172171)