

弹性半空间热冲击问题的广义热弹性解^{*}

王颖泽, 王 谦, 刘 栋, 宋新南

(江苏大学 能源与动力工程学院, 江苏 镇江 212013)

摘要: 基于 Laplace 变换技术及其极限定理, 推导了基于分数阶积分的不同广义热弹性理论模型下弹性半空间受热冲击作用的渐近解, 该渐近解可以准确地揭示热量在弹性体内传播的波动特性, 并可以捕捉到受热冲击作用在弹性波波前位置处产生的阶跃现象. 通过对热冲击下弹性波的传播及热弹性响应的渐近求解及结果分析, 比较了不同广义热弹性理论对于热冲击问题的预测能力, 并揭示了热传输能力的不同对于热弹性行为的影响.

关键词: 广义热弹性; 分数阶积分; 渐近解; 热冲击

中图分类号: O343.6 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.06.006

引 言

当热作用时间极其短暂或受热器件结构尺寸微细化而呈现微尺度效应时, 热量将以有限速度传播^[1-2]. 此时, 基于热传播速度为无限大假设的经典热弹性理论将无法对包含该类特征的超常传热行为进行准确地描述. 为了克服经典理论的不足, 相关学者基于超常传热的物理机制, 先后提出了能够描述热量以有限速度传播的广义热弹性理论. 其中, 应用较为广泛的有基于单松弛时间的 L-S 理论^[3]、两松弛时间的 G-L 理论^[4]以及基于能量非耗散效应的 G-N 理论^[5]. 在这些理论中, 原有的抛物型温度控制方程被双曲型方程所取代, 由此可以准确地描述热量传递过程中的波动效应.

受到实验测试手段的限制, 当前对于超常传热行为的研究均以理论分析为主, 即采用上述广义热弹性理论, 对超常传热问题进行求解分析, 给出热波、热弹性波在介质内的传递规律及位移场、温度场和应力场的分布规律, 进而对超常传热行为进行定性分析^[6]. 由于需计及热波的波动效应, 这些广义理论所包含的控制方程往往较为复杂, 在求解方面存在较大的数学困难, 为此, 如何采取有效的手段对控制方程进行准确求解是分析问题的关键所在. 当前围绕超常传热问题展开的研究主要采用以下几种分析方法: 1) 积分变换结合数值反演, 即借助于积分变换对控制方程进行降阶处理, 获取其在变换域内的解, 然后通过数值方法对变换域内的解进行数值反演, 完成控制方程在时间域内的求解. 其中 Bagri 和 Eslami^[7]采用该方法对具有对

* 收稿日期: 2013-10-07; 修订日期: 2014-05-08

基金项目: 国家自然科学基金(11102073); 中国博士后科学基金(2012M511207); 江苏高校优势学科建设项目(PAPD)

作者简介: 王颖泽(1981—), 男, 河北秦皇岛人, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: wyz3701320@ujs.edu.cn).

称特征的一维问题进行了求解分析,给出了实心柱体和球体内部在不同受热条件下的热弹性响应。Babaei 和 Chen^[8]则对一维移动热源激励下的预制功能梯度材料一维耦合热压电问题进行了分析,给出了材料物性参数沿轴向呈指数规律变化条件下各物理场的分布规律。此外, Ezzat 等^[9], Youssef^[10]以及 Kumar 等^[11]分别对一维的变物性问题进行了研究,揭示了物性参数随温度变化时对热弹性行为的影响。在这些问题的求解中,数值反演所引入的离散误差和截断误差将降低求解的精度,致使该方法无法准确地揭示热的波动特征^[12]。2) 有限元直接求解^[13],即依据有限元理论对控制方程进行离散,构建单元节点的有限元方程组,直接在时间域内进行求解。该方法可以避免繁琐的积分变换过程,且能够较好地捕捉到弹性波波前存在的阶跃现象,但其求解精度严重依赖于所选取的差分格式以及网络划分的质量,同时也无法获取特征参量与物理场之间的函数关系。3) 积分变换结合渐近求解,即借助积分变换,在获取变换域内控制方程解的基础上,利用超常传热问题的尺度特征,对变换域内的解进行渐近处理,通过积分逆变换得到时间域内的近似解。Balla 和 Hungary^[14]首先对包含 L-S 理论在内的 6 种典型的热弹性模型进行了求解分析,随后 Wang 等^[15-17]分别推导了基于 L-S, G-L 以及 G-N 模型在内的半无限大体、实心柱体以及实心球体受热冲击作用的广义热弹性解。通过上述分析可知,对于规则结构、简单边界的超常传热问题,该方法能够准确地捕捉到弹性波波前存在的阶跃现象,并可以得到包含波速、波前位置、阶跃峰值以及响应区域在内的各物理量与特征参量之间的函数关系^[15-17],便于超常传热行为的定性分析。

本文采用积分变换结合渐近求解的分析方法对弹性半空间受热冲击问题展开研究,推导了基于分数阶积分的不同广义热弹性理论的广义热弹性解。利用这些理论解不仅可以揭示受热冲击作用诱发的热波及热弹性波在弹性体内的传播规律,而且可以获取不同理论模型对于超常传热行为的预测能力,同时也给出了弹性介质分子热传输能力的不同对于自身热弹性行为的影响。

1 基本方程

基于 L-S, G-L 和 G-N 广义热弹性理论^[3-5],均质、各向同性材料热弹性控制方程可统一写成如下的形式:

运动方程

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + f_i; \quad (1)$$

本构方程

$$\sigma_{ij} = \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij} - \beta(\theta + \tau_1 \dot{\theta}) \delta_{ij}; \quad (2)$$

几何方程

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}); \quad (3)$$

能量方程

$$q_{i,i} = \rho r - \rho c_p(\dot{\theta} + \tau_2 \ddot{\theta}) - T_0 \beta \dot{\gamma}_{ii} + c_i \dot{\theta}_{,i}; \quad (4)$$

热传导方程

$$\eta_1 q_i + \tau_0 \dot{q}_i + \eta_2 \dot{q}_i = -\eta_1 k \theta_{,i} - \eta_2 k^* \theta_{,i} - c_i \dot{\theta}; \quad (5)$$

式中, u_i 为位移分量, σ_{ij} 为应力分量, γ_{ij} 为应变分量, f_i 为体积力分量, q_i 为热流密度, r 为内热源, $\theta = T - T_0$ 为温度增量, T 为绝对温度, T_0 为参考温度, ρ 为密度, c_p 为常应变比热比, k 为热传导系数, λ 和 μ 为 Lamé 常数, $\beta = \alpha_T(3\lambda + 2\mu)$ 为热力系数, α_T 为线性热膨胀系数, τ_0 和 τ_1 ,

τ_2 分别为 L-S 理论和 G-N 理论中的热松弛时间, c_i 和 k^* 分别为 G-L 理论和 G-N 理论与物性相关的常数, 对于各向同性材料 $c_i = 0$, η_1 和 η_2 为归一化参数, 方程中变量的上标“ \cdot ”和下标“ $,$ ”分别表示对时间和物质坐标的偏导数.

根据归一化参数及各物性参数取值的不同, 上述控制方程可分别改写为 L-S, G-L 和 G-N 理论模型:

$$1) \text{ L-S 模型: } \eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \tau_1 = \tau_2 = 0, c_i = 0;$$

$$2) \text{ G-L 模型: } \eta_1 = 1, \eta_2 = 0, \tau_0 = 0;$$

$$3) \text{ G-N 模型: } \eta_1 = 0, \eta_2 = 1, \tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0, c_i = 0.$$

考虑到分数阶积分在工程领域的广泛应用, 分数阶理论也被引入到广义热弹性问题的研究中. 基于分数阶理论^[18-19], 热传导方程(5)可改写为如下的形式:

$$\eta_1 q_i + \tau_0 \dot{q}_i + \eta_2 \ddot{q}_i = -\eta_1 k I^{\alpha-1} \theta_{,i} - \eta_2 k^* I^{\alpha-1} \theta_{,i} - c_i I^{\alpha-1} \dot{\theta}, \quad (6)$$

式中, 分数阶积分 I^α 可定义成如下的形式^[18-19]:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad (7)$$

其中, $\Gamma(\alpha)$ 为 gamma(伽马)函数, α 为分数阶参数, 且具有如下的关系:

$$0 < \alpha < 1, \quad \text{弱传导性};$$

$$\alpha = 1, \quad \text{一般传导性};$$

$$1 < \alpha \leq 2, \quad \text{强传导性}.$$

联立方程(4)和(6), 从中消去热流密度 q_i 及其偏导数项 \dot{q}_i 可得温度控制方程为

$$(\eta_1 k + \eta_2 k^*) I^{\alpha-1} \theta_{,ii} = \rho c_p (\eta_1 \dot{\theta} + \tau_0 \ddot{\theta} + \tau_2 \ddot{\theta} + \eta_2 \ddot{\theta}) + T_0 \beta (\eta_1 \dot{\gamma}_{ii} + \tau_0 \ddot{\gamma}_{ii} + \eta_2 \ddot{\gamma}_{ii}) - 2c_i \dot{\theta}_{,i}. \quad (8)$$

方程(1)~(3)及(8)就构成了基于分数阶积分的各广义热弹性理论的控制方程. 其中, 当分数阶参数 $\alpha = 1$ 时, 上述方程可分别退化为 L-S, G-L 和 G-N 模型.

这里考虑一均质、各向同性的弹性半无限大体 ($x \geq 0$), 初始时刻分布温度为 T_0 , 在 $t = 0$ 时刻, 边界突然施加一个温度为 T_1 的作用. 其中, 弹性体各点的位移具有如下的形式:

$$u_x = u(x, t), \quad u_y = u_z = 0. \quad (9)$$

将其代入几何方程(3)中进行整理, 可得

$$\gamma_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{yy} = \gamma_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (10)$$

根据本构方程(2), 各非零应力的表达式为

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} - \beta \left(\theta + \tau_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \quad (11)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} - \beta \left(\theta + \tau_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right). \quad (12)$$

相应地, 在不计体积力情况下的运动方程(1)和温度控制方程(8)可改写为

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \beta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right), \quad (13)$$

$$(\eta_1 k + \eta_2 k^*) I^{\alpha-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} =$$

$$\rho c_p \left[\eta_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\tau_0 + \tau_2 + \eta_2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] + T_0 \beta \left[\eta_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + (\tau_0 + \eta_2) \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} \right]. \quad (14)$$

方程(11)~(14)就构成了基于分数阶理论的不同广义热弹性理论下弹性半空间受热冲击问题的控制方程组.

取应力自由边界,则边界条件可表示为

$$x = 0: \sigma_{xx} = 0, \theta = \theta_0 H(t), \quad (15)$$

式中, $\theta_0 = T_1 - T_0$, $H(t)$ 为 Heaviside 单位函数.且当 $x \rightarrow \infty$ 时, u_x 和 θ 满足:

$$\{ u_x(x, t), \theta(x, t) \} \rightarrow 0, \quad t > 0. \quad (16)$$

给定齐次初始条件:

$$t = 0: u_x = 0, \frac{\partial u_x}{\partial t} = 0, \theta = 0, \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0. \quad (17)$$

2 方程的解析求解

2.1 变换域内控制方程的求解

为了便于求解分析,引入如下无量纲变量:

$$\begin{cases} x^* = av_e x, t^* = av_e^2 t, \tau_0^* = av_e^2 \tau_0, \tau_i^* = av_e^2 \tau_i & (i = 1, 2), \\ u_x^* = av_e \frac{\lambda + 2\mu}{T_0 \beta}, \theta^* = \frac{\theta}{T_0}, \sigma_{ii}^* = \frac{1}{T_0 \beta} \sigma_{ii} & (i = 1, 2, 3). \end{cases} \quad (18)$$

将上述无量纲变量分别代入控制方程(11)~(14)中进行无量纲化(为了方便表达,去掉无量纲变量右上角的星号),可得

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \left(\theta + \tau_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (19)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \left(\theta + \tau_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial t} \right), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (\eta_1 + \eta_2 v_1^2) I^{\alpha-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \\ \left[\eta_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\tau_0 + \tau_2 + \eta_2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] + \vartheta \left[\eta_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} + (\tau_0 + \eta_2) \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial t^2} \right], \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $a = \rho c_p / k$ 为热黏性系数, $v_e = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ 为弹性波波速, $v_1 = \sqrt{k^* / (\rho c_p v_e^2)}$ 为无量纲热波波速, $\vartheta = T_0 \beta^2 / [\rho c_p (\lambda + 2\mu)]$ 为耦合系数,表征温度与应变率之间的耦合效应, $k_v = \lambda / (\lambda + 2\mu)$ 为无量纲参数.

分别对上述无量纲化的控制方程进行 Laplace 变换,并结合齐次初始条件(17)可得

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{d\bar{u}_x}{dx} - (\bar{\theta} + \tau_1 s \bar{\theta}), \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{zz} = k_v \frac{d\bar{u}_x}{dx} - (\bar{\theta} + \tau_1 s \bar{\theta}), \quad (24)$$

$$s^2 \bar{u}_x = \frac{d^2 \bar{u}_x}{dx^2} - \left(\frac{d\bar{\theta}}{dx} + \tau_1 s \frac{d\bar{\theta}}{dx} \right), \quad (25)$$

$$(\eta_1 + \eta_2 v_i^2) s^{1-\alpha} \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} = [\eta_1 s \bar{\theta} + (\tau_0 + \tau_2 + \eta_2) s^2 \bar{\theta}] + \vartheta \left[\eta_1 s \frac{d\bar{u}_x}{dx} + (\tau_0 + \eta_2) s^2 \frac{d\bar{u}_x}{dx} \right], \quad (26)$$

式中, s 为 Laplace 算子, 变量上标“-”表示对该变量进行 Laplace 变换.

联立方程(25)和(26), 进行消元处理可得

$$\frac{d^4 \bar{\phi}_i}{dx^4} - (s^2 + \omega_1 + \omega_2) \frac{d^2 \bar{\phi}_i}{dx^2} + \omega_1 s^2 \bar{\phi}_i = 0, \quad (27)$$

式中, $\phi_i (i = 1, 2)$ 分别表示 u_x 和 θ ,

$$\omega_1 = \frac{\chi [\eta_1 + (\tau_0 + \tau_2 + \eta_2) s] s}{\eta_1 + \eta_2 v_i^2}, \quad \omega_2 = \frac{\chi \vartheta [\eta_1 + (\tau_0 + \eta_2) s] (1 + \tau_1 s) s}{\eta_1 + \eta_2 v_i^2}, \quad \chi = s^{\alpha-1}.$$

对于上述四阶微分方程, 其通解可写成如下的形式:

$$\bar{\phi}_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij}(s) \exp(-R_j x), \quad (28)$$

式中, R_j 为特征方程

$$R^4 - (s^2 + \omega_1 + \omega_2) R^2 + \omega_1 s^2 = 0 \quad (29)$$

的实数根, 系数 $A_{ij}(s)$ 则由具体的边界条件确定.

考虑到当 $x \rightarrow \infty$ 时, 为保证 u_x 和 θ 有界, 则应舍弃通解(28)中含有负实数根的指数部分, 此时通解可具体写成

$$\bar{u}_x = A_{11}(s) \exp(-R_1 x) + A_{12}(s) \exp(-R_2 x), \quad (30)$$

$$\bar{\theta} = A_{21}(s) \exp(-R_1 x) + A_{22}(s) \exp(-R_2 x), \quad (31)$$

式中, R_1, R_2 为特征方程(29)的正实数根.

将式(30)和(31)代入方程(25)中进行整理, 可得如下的关系:

$$A_{2j}(s) = -\frac{R_j^2 - s^2}{(1 + \tau_1 s) R_j} A_{1j}(s) \quad (j = 1, 2). \quad (32)$$

此时, 通解(31)可改写为

$$\bar{\theta} = -\frac{R_1^2 - s^2}{(1 + \tau_1 s) R_1} A_{11}(s) \exp(-R_1 x) - \frac{R_2^2 - s^2}{(1 + \tau_1 s) R_2} A_{22}(s) \exp(-R_2 x). \quad (33)$$

对边界条件(15)进行 Laplace 变换, 可得

$$x = 0: \bar{\sigma}_{xx} = 0, \quad \bar{\theta} = \theta_0 / s. \quad (34)$$

分别将式(19)、(30)和(33)代入上式中, 可求得系数 $A_{1j}(s) (j = 1, 2)$ 的表达式为

$$A_{11}(s) = -\frac{R_1(1 + \tau_1 s)\theta_0}{(R_1^2 - R_2^2)s}, \quad A_{12}(s) = \frac{R_2(1 + \tau_1 s)\theta_0}{(R_1^2 - R_2^2)s}. \quad (35)$$

将上述表达式回代到通解(30)和(33)以及各应力分量表达式(23)和(24)中进行整理, 即可得到 u_x, θ 和 $\sigma_{ii} (i = 1, 2, 3)$ 在变换域内的解为

$$\bar{u}_x = -\frac{(1 + \tau_1 s)\theta_0}{(R_1^2 - R_2^2)s} [R_1 \exp(-R_1 x) - R_2 \exp(-R_2 x)], \quad (36)$$

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_0}{(R_1^2 - R_2^2)s} [(R_1^2 - s^2) \exp(-R_1 x) - (R_2^2 - s^2) \exp(-R_2 x)], \quad (37)$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{(1 + \tau_1 s) s \theta_0}{R_1^2 - R_2^2} [\exp(-R_1 x) - \exp(-R_2 x)], \quad (38)$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \bar{\sigma}_{zz} = \frac{(1 + \tau_1 s) \theta_0}{(R_1^2 - R_2^2) s} [(k_w R_1^2 + s^2) \exp(-R_1 x) - (k_w R_2^2 + s^2) \exp(-R_2 x)]. \quad (39)$$

2.2 时间域内控制方程的求解

考虑到变换域内各物理场的解的形式(36)~(39)较为复杂,无法直接通过逆 Laplace 变换来获取其在时间域内的解,为此这里需借助热冲击的瞬时特性,依据 Laplace 变换的极限定理对上述通解进行适当的处理.

对特征方程(29)进行求解可得

$$R_{1,2} = \sqrt{\frac{s^2 + \omega_1 + \omega_2 \pm \sqrt{(s^2 + \omega_1 + \omega_2)^2 - 4\omega_1 s^2}}{2}}. \quad (40)$$

根据 Laplace 变换的极限定理可知,当热作用时间 t 取极小时,其影像 s 取极大,此时式(40)可做如下近似^[15-17]:

$$R_{1,2} \approx k_{1,2} s + m_{1,2}, \quad (41)$$

式中

$$k_{1,2} = \left[\frac{1 + \chi(1 + \vartheta)(\tau_0 + \tau_1 + \eta_2/v_1^2) \pm \sqrt{a_1}}{2} \right]^{1/2}, \quad m_{1,2} = \eta_1 \frac{\chi(1 + \vartheta) \pm b_1/\sqrt{a_1}}{4k_{1,2}},$$

$$a_1 = [1 + \chi(\tau_0 + \tau_2 + \eta_2/v_1^2) + \chi\vartheta(\tau_0 + \tau_1 + \eta_2/v_1^2)]^2 - 4\chi(\tau_0 + \tau_2 + \eta_2/v_1^2),$$

$$b_1 = \eta_1 \chi[\chi(1 + \vartheta)(\tau_0 + \tau_2 + \vartheta(\tau_0 + \tau_1)) + \vartheta - 1].$$

将式(41)分别代入通解(36)~(39)中进行整理,即可得到便于逆 Laplace 变换的形式,依据标准的 Laplace 逆变换公式,可分别得到各物理场在时间域内的解为

$$u_x = -\frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_1 x) \left[k_1 \tau_1 + \left(k_1 + m_1 \tau_1 - \frac{b_1}{a_1} k_1 \tau_1 \right) (t - k_1 x) \right] \text{H}(t - k_1 x) +$$

$$\frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_2 x) \left[k_2 \tau_1 + \left(k_2 + m_2 \tau_1 - \frac{b_1}{a_1} k_2 \tau_1 \right) (t - k_2 x) \right] \text{H}(t - k_2 x), \quad (42)$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_1 x) \left[k_3 + \left(m_3 - \frac{b_1}{a_1} k_3 \right) (t - k_1 x) \right] \text{H}(t - k_1 x) -$$

$$\frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_2 x) \left[k_4 + \left(m_4 - \frac{b_1}{a_1} k_4 \right) (t - k_2 x) \right] \text{H}(t - k_2 x), \quad (43)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_1 x) \left\{ \left(1 - \frac{b_1}{a_1} \tau_1 \right) \left[1 - \frac{b_1}{a_1} (t - k_1 x) \right] \text{H}(t - k_1 x) + \tau_1 \delta(t - k_1 x) \right\} -$$

$$\frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_2 x) \left\{ \left(1 - \frac{b_1}{a_1} \tau_1 \right) \left[1 - \frac{b_1}{a_1} (t - k_2 x) \right] \text{H}(t - k_2 x) + \tau_1 \delta(t - k_2 x) \right\}, \quad (44)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} =$$

$$\frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_1 x) \left\{ \left[\left(1 - \frac{b_1}{a_1} \right) (1 + k_w k_5) + k_w m_3 \right] \left[1 - \frac{b_1}{a_1} (t - k_1 x) \right] \text{H}(t -$$

$$\begin{aligned}
 & \left. k_1 x) + k_w m_3(t - k_1 x) H(t - k_1 x) + (1 + k_w k_5) \tau_1 \delta(t - k_1 x) \right\} - \\
 & \frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_2 x) \left\{ \left[\left(1 - \frac{b_1}{a_1} \right) (1 + k_w k_6) + k_w m_4 \right] \left[1 - \frac{b_1}{a_1} (t - k_2 x) \right] H(t - \right. \\
 & \left. k_2 x) + k_w m_4(t - k_2 x) H(t - k_2 x) + (1 + k_w k_6) \tau_1 \delta(t - k_2 x) \right\}, \quad (45)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 k_{3,4} &= \frac{-1 + \chi(1 + \vartheta)(\tau_0 + \tau_1 + \eta_2/v_1^2) \pm \sqrt{a_1}}{2}, \quad m_{3,4} = \eta_1 \frac{\chi(1 + \vartheta) \pm b_1/\sqrt{a_1}}{2}, \\
 k_{5,6} &= \frac{1 + \chi(1 + \vartheta)(\tau_0 + \tau_1 + \eta_2/v_1^2) \pm \sqrt{a_1}}{2},
 \end{aligned}$$

$\delta(x)$ 为广义 Dirac 函数.

3 计算及结果分析

3.1 热波、热弹性波的传播

根据推导得到的各物理场在时间域内的解(42)~(45)可知,当弹性体受热冲击作用时,将产生速度不同的两组波向前传播.依据 Heaviside 单位函数的性质,这两组波的无量纲波速和波前位置可分别表示为

$$v_{1,2} = 1/k_{1,2}, \quad \xi_{1,2} = t/k_{1,2}. \quad (46)$$

结合 $k_{1,2}$ 的表达式,对于基于分数阶理论的 L-S 和 G-L 模型而言,当延迟时间 τ_0 和 τ_2 分别趋于 0 时可得

$$v_1 \rightarrow \{1, 1/(1 + \chi\vartheta\tau_1)\}, \quad v_2 \rightarrow \infty. \quad (47)$$

根据经典热弹性理论,当不计延迟效应时,热量的速度为无限大.结合上式可知, v_2 表征的是计及耦合效应的热波的波速,而 v_1 表征的则是计及耦合效应的热弹性波的波速.且当耦合系数 $\vartheta \rightarrow 0$ 时,即忽略耦合效应时, $v_1 \rightarrow v_e$ (此处 v_1 为有量纲的波速),此时 v_1 为热弹性波的波速.对于基于分数阶理论的 G-N 理论,当 $\vartheta \rightarrow 0, \chi = 1$ 时,可有如下的关系:

$$v_1 \rightarrow 1, \quad v_2 \rightarrow v_1. \quad (48)$$

这表明,对于 G-N 模型, v_1 仍表征的是计及耦合效应的热弹性波波速,而 v_2 表征的则是计及耦合效应的热波波速.

此外,值的注意的一点是,由于分数阶积分的引入,不同模型下的热波及热弹性波的波速及波前位置均受到参数 χ 的影响.结合 χ 的表达式及分数阶参数 α 的物理意义可知,对于弹性介质,分子热传输能力的不同,对热波、热弹性波的传播均会产生影响.考虑到参数 χ 在波速及波前位置表达式(44)中均以 $\chi\tau_i (i = 0, 2)$ 的形式出现,可将其视为延迟时间的影响因子,即弹性介质内分子热传输能力的强弱将以改变延迟效应作用效果的形式作用到热波及热弹性波的传播上.

3.2 位移、温度及应力场的分布

为了便于计算分析,选取各向同性、均质的铜质材料,相关计算参数如下^[15,20]:

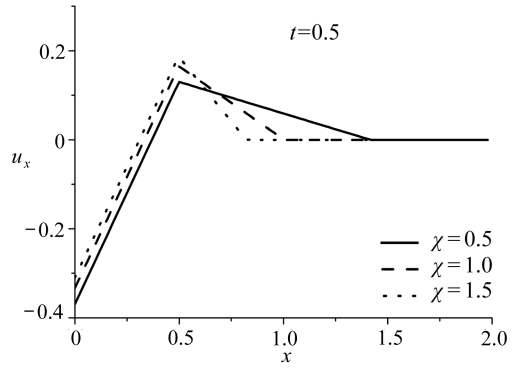
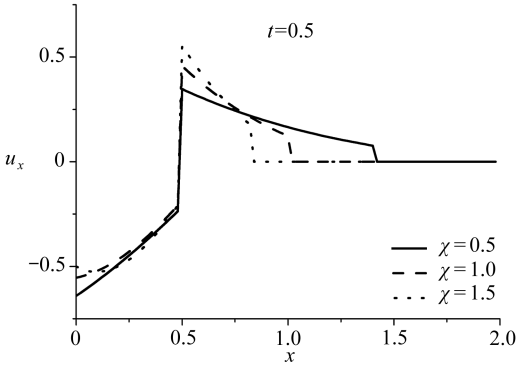
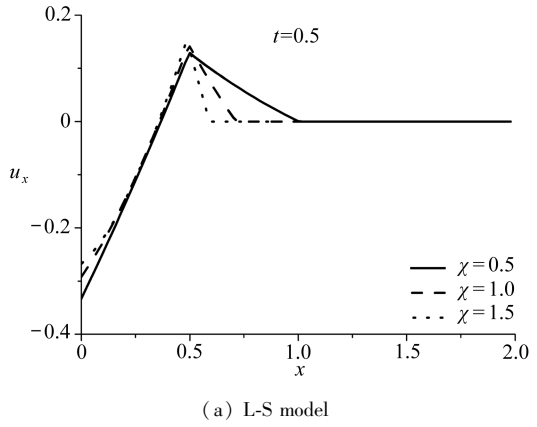
$$\rho = 8954 \text{ kg/m}^3, \quad k = 386 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, \quad \alpha_1 = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1},$$

$$c_p = 383.1 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K}), \lambda = 7.76 \times 10^{10} \text{ Pa}, \mu = 3.86 \times 10^{10} \text{ Pa}.$$

常温下热松弛时间分别取值为 $\tau_0 = \tau_1 = 2\tau_2 = 10^{-11} \text{ s}$. 通过计算, 可得到如下无量纲计算参数:

$$\tau_0 = 0.5, \tau_1 = 0.5, \tau_2 = 0.25, \vartheta = 0.02, v_1^2 = 4.0, \theta_0 = 1.$$

图 1~3 分别给出了在参数 χ 取值不同时 ($\chi = 0.5, 1.0, 1.5$, 分别对应弱传导性、一般传导性及强传导性), 不同理论模型下位移场、温度场及径向应力场的分布规律. 在热冲击的作用下, 随着热波及热弹性波的传播, 在波前到达的区域内分别建立各物理场. 受到热波及热弹性波波速不同的影响, 温度场及应力场在热波波前及热弹性波波前位置处均呈现阶跃现象. 其中, 由图 2 给出的不同模型下温度场的分布可知, 对于温度场而言, 3 种模型均预测出在热弹性波波前位置处的阶跃现象并不明显, 这表明热弹性波的传播对于温度场



(b) G-L model

(c) G-N model

图 1 不同参数值 χ 下无量纲位移分布

Fig.1 Distributions of non-dimensional displacement u_x at different values of parameter χ

的分布影响较小. 此外, 值得注意的是, 由图 1(b) 可知, 对于位移场的分布, G-L 模型同样预测出在波前位置处产生阶跃, 即位移的分布出现间断现象, 这显然与连续性条件不符, 即在预测位移场的分布时, G-L 模型并不能给出满意的结果. 同时, 由应力分量表达式(44)和(45)可知, G-L 模型下推导得到的解中包含广义 Dirac 函数 $\delta(x)$, 这表明在热波及热弹性波波前位置处, 应力分量将趋于无穷, 即应力分布存在奇异点. 为此, 对于径向应力的分布, 图 3 只给出了 L-S 和 G-N 模型下径向应力的预测结果.

根据式(43)和(44)可推得在热波及热弹性波波前位置处 ($\xi_i = t/k_i (i = 1, 2)$), 各模型下温度及径向应力的阶跃值分别为

L-S 和 G-L 模型

$$[\theta]_i = (-1)^{i+1} \frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} k_{i+2} \exp(-m_i \xi_i);$$

G-N 模型

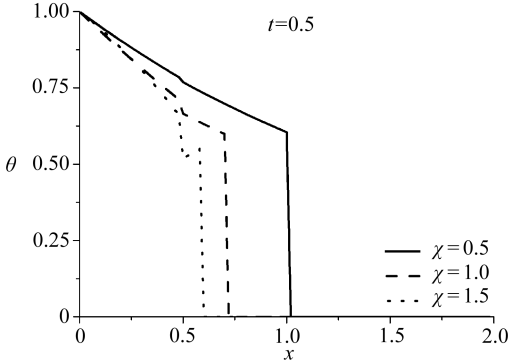
$$[\theta]_i = (-1)^{i+1} \frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} k_{i+2};$$

L-S 模型

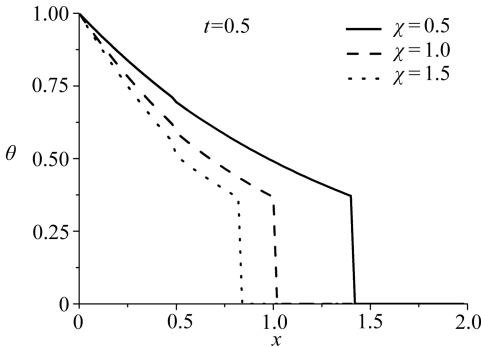
$$[\sigma_{xx}]_i = (-1)^{i+1} \frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}} \exp(-m_i \xi_i);$$

G-N 模型

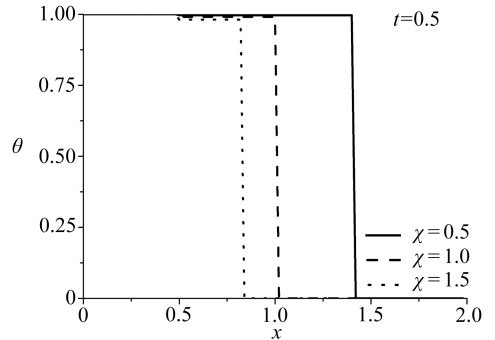
$$[\sigma_{xx}]_i = (-1)^{i+1} \frac{\theta_0}{\sqrt{a_1}}.$$



(a) L-S model



(b) G-L model



(c) G-N model

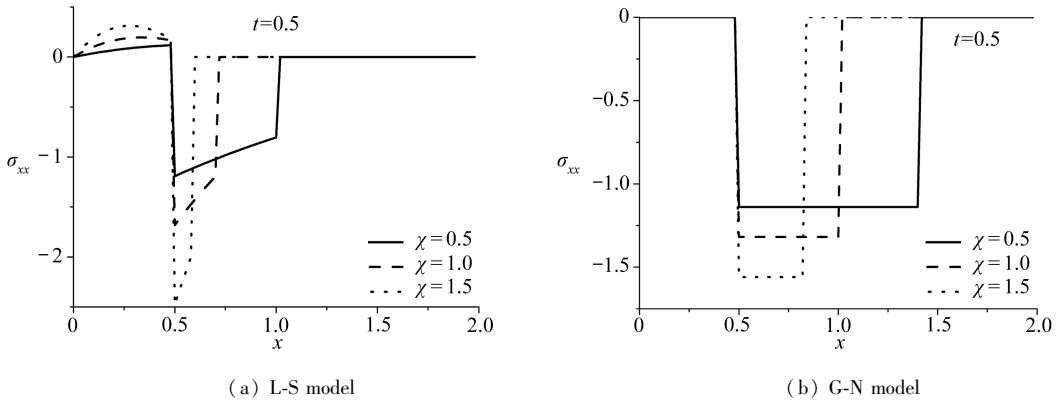
图2 不同参数值 χ 下无量纲温度分布

Fig.2 Distributions of non-dimensional temperature θ at different values of parameter χ

于弱传导情况 ($\chi < 1$), 受到分子间传输热量能力较弱的影响, 在热扰动响应的区域内保持温度的能力较强, 进而形成较小的温度梯度, 并导致较小的尖峰应力. 与之相反, 对于强传导情况 ($\chi > 1$), 随着分子间传输热量能力的增强, 将形成较大的温度梯度, 并导致大的尖峰应力的出现. 此外, 当参数 χ 取值不同时, 热冲击的作用区域、两次阶跃的间隔也有所不同. 但值得注意的一点是, 参数 χ 对于两次阶跃出现的位置的影响并不相同, 其中随着参数 χ 取值的增大, 二次阶跃出现的位置不断前移, 而一次阶跃位置几乎不变. 结合上面对热波及热弹性波传播的分析, 温度场及应力场两次阶跃出现的位置分别对应于热弹性波及热波的波前, 由此可推知, 参数 χ 取值的不同对于热波及热弹性波的传播影响有所不同, 分子热传输能力的强弱对于热波的传播影响较为显著.

从中可以发现, 随着热波及热弹性波的传播, 对于 L-S 和 G-L 模型而言, 温度和应力的阶跃峰值呈指数函数形式衰减, 这表明受外部热冲击作用产生的作用效果将逐渐减弱, 而 G-N 模型下的温度和应力峰值保持不变, 即热扰动在传播的过程中并无能量损失, 这和 G-N 模型中能量非耗散假设是相吻合的.

考虑到参数 χ 取值不同时对于热波及热弹性波传播的影响, 当弹性介质内分子热传输能力不同时, 各物理场的分布也有所不同. 从图 2 和图 3 给出的温度场和径向应力场分布中可以看到, 对

图3 不同参数值 χ 下无量纲径向应力分布Fig.3 Distributions of non-dimensional radial stress σ_{xx} at different values of parameter χ

4 结 论

本文基于 Laplace 变换技术及其极限定理,借助热冲击的瞬时特性,推导了基于分数阶积分的不同广义热弹性理论模型下弹性半空间外表面受热冲击问题的广义热弹性解,并对不同分数阶参数下的热弹性行为进行了求解分析.结果表明:

1) 推导得到的广义热弹性解可以清楚地揭示出热量在弹性体内部传播的波动特性,并可以捕捉到受热冲击作用在热波及热弹性波波前位置处的阶跃现象.

2) 对于热弹性响应的预测,L-S 和 G-N 理论给出了相近的结果,而 G-L 理论则在预测位移及应力的分布时,由于控制方程中 $\tau_1 \dot{T}$ 项的存在得到了反常的结果.此外,L-S 和 G-L 理论均认为热扰动在传播过程中存在耗散性,而 G-N 理论则认为热扰动在传播过程中并无能量的损失.

3) 因分数阶参数取值的不同,热冲击作用下的热弹性行为有所不同,其中,分子热传输能力的不同,对于热波的传播、各物理场的响应区域、温度场及应力场的阶跃峰值影响较为显著,而对于热弹性波的传播影响则极其有限,且针对不同的理论模型,分数阶参数产生的影响是相似的.

致谢 作者对江苏大学高级人才专项基金(10JDG055)对本文的资助表示衷心的感谢.

参考文献(References):

- [1] 过增元. 国际传热研究前沿——微细尺度传热[J]. 力学进展, 2000, **30**(1): 1-6. (GUO Zengyuan. Frontier of heat transfer—microscale heat transfer[J]. *Advance in Mechanics*, 2000, **30**(1): 1-6. (in Chinese))
- [2] Herwig H, Beckert K. Experiment evidence about the controversy concerning Fourier and non-Foureir heat conduction in materials with a nonhomogeneous inner structure[J]. *Heat Mass Transfer*, 2000, **36**(5): 387-392.
- [3] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, **15**(5): 299-309.
- [4] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. *Journal of Elasticity*, 1972, **2**(1): 1-7.
- [5] Green A E, Naghdi P M. Thermoelasticity without energy dissipation[J]. *Journal of Elastic-*

- ity, 1993, **31**(3): 189-208.
- [6] 田晓耕, 沈亚鹏. 广义热弹性问题研究进展[J]. 力学进展, 2012, **42**(1): 1-11. (TIAN Xiao-geng, SHEN Ya-peng. Research progress in generalized thermoelastic problems[J]. *Advance in Mechanics*, 2012, **42**(1): 1-11. (in Chinese))
- [7] Bagri A, Eslami M R. A unified generalized thermoelasticity solution for cylinders and spheres [J]. *International Journal of Mechanics and Sciences*, 2007, **49**(12): 1325-1335.
- [8] Babaei M H, Chen Z T. Transient thermopiezoelectric response of a one-dimensional functionally graded piezoelectric medium to a moving heat source[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, **80**(7): 803-813.
- [9] Ezzat A M, El-Karamany A S, Samaan A A. The dependence of the modulus of elasticity on reference temperature in generalized thermoelasticity[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **147**(1): 169-189.
- [10] Youssef H M. Generalized magneto-thermoelasticity in a conducting medium with variable material properties[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **173**(2): 822-833.
- [11] Kumar R, Devi S. Thermomechanical deformation in porous generalized thermoelastic body with variable material properties[J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2010, **34**(2): 285-300.
- [12] Ei-caramany A S, Ezzat M A. Thermal shock problem in generalized thermoviscoelasticity under four theories[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2004, **42**(7): 649-671.
- [13] TIAN Xiao-geng, SHEN Ya-peng, CHEN Chang-qing, HE Tian-hu. A direct finite element method study of generalized thermoelastic problems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(7/8): 2050-2063.
- [14] Balla M, Hungary B. Analytical study of the thermal shock problem of a half-space with various thermoelastic models[J]. *Acta Mechanica*, 1991, **89**(1/4): 73-92.
- [15] Wang Y Z, Zhang X B, Song X N. A unified generalized thermoelasticity solution for the transient thermal shock problem[J]. *Acta Mechancia*, 2012, **223**(4): 735-743.
- [16] 王颖泽, 张小兵, 宋新南. 圆柱体外表面受热冲击问题的广义热弹性分析[J]. 力学学报, 2012, **44**(2): 317-325. (WANG Ying-ze, ZHANG Xiao-bing, SONG Xin-nan. Research on generalized thermoelastic problems of a solid cylinder subjected to thermal shock[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2012, **44**(2): 317-325. (in Chinese))
- [17] 王颖泽, 张小兵, 刘栋. 轴对称平面应变问题的广义热弹性解[J]. 中国科学:物理学, 力学, 天文学, 2013, **43**(8): 956-964. (WANG Ying-ze, ZHANG Xiao-bing, LIU Dong. Generalized thermoelastic solutions for the axisymmetric plane strain problem[J]. *Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica*, 2013, **43**(8): 956-964. (in Chinese))
- [18] Youssef H M. Theory of fractional order generalized thermoelasticity[J]. *ASME Journal of Heat Transfer*, 2010, **132**(6): 061301.
- [19] Sherief H H, El-Sayed A M A, Abd El-Latif A M. Fractional order theory of thermoelasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(2): 269-275.
- [20] Youssef H M. Generalized thermoelasticity of an infinite body with a cylindrical and variable material properties[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2005, **28**(5): 521-532.

Generalized Thermoelastic Solutions to the Problems of Thermal Shock on Elastic Half Space

WANG Ying-ze, WANG Qian, LIU Dong, SONG Xin-nan

*(School of Energy and Power Engineering, Jiangsu University,
Zhenjiang, Jiangsu 212013, P.R.China)*

Abstract: Based on the Laplace transform technique and its limit theorem, the asymptotic solutions to the problems of thermal shock on elastic half space were derived according to different generalized thermoelasticity models with the fractional order calculus introduced. The wave-like properties of heat propagation in elastic media were revealed accurately by these asymptotic solutions, and the jumps at the elastic wave fronts induced by thermal shock were also captured. The elastic wave propagation and the thermoelastic responses of displacement, temperature and stress fields were studied. The predictive abilities of the different generalized thermoelasticity models for thermal behaviors under thermal shock were compared, and the influence of the fractional order parameter on thermal behaviors was also analyzed. The results show that, the molecular diffusion of heat has notable influence on the heat wave propagation, the response zones of related physical fields and the jump peak values of the temperature and stress fields, but it has little effect on the thermoelastic wave propagation.

Key words: generalized thermoelasticity; fractional calculus; asymptotic solutions; thermal shock

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11102073); China Post-doctoral Science Foundation(2012M511207)