

双稳态压电能量获取系统的分岔混沌阈值*

李海涛, 秦卫阳

(西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

摘要: 建立了双稳态压电能量获取系统动力学模型并且分析了系统的同宿分岔和混沌等非线性动力学行为,根据受压梁的双稳态特性,提出了等效双稳态压电能量获取系统的数学模型,基于 Melnikov 理论,获得了谐波激励作用下的能量获取系统关于同宿分岔的定性研究方法,通过优化系统参数,得到了发生同宿分岔的阈值曲线,数值结果显示系统在临界阈值处由单阱运动演变为双阱运动,验证了理论分析的有效性,结果表明 Melnikov 方法可为能量获取系统的参数设计提供有效的理论依据。

关键词: 双稳态能量获取系统; Melnikov 方法; 同宿分岔

中图分类号: O322 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.06.007

引 言

环境能量获取是将环境振动能量转化为电能的过程,压电式能量获取系统以其结构简单、无电磁干扰等优点成为国内外能量获取领域研究的热点。

早期振动能量获取系统的研究是基于线性振动理论,线性能量获取系统只适用于固有频率附近的窄带激励和确定性激励情形,但是当环境振动为宽频时,能量获取效果较差^[1-2]。出于拓宽频带的考虑,能量获取系统的设计越来越关注非线性因素,代显智等^[3]采用磁电换能器设计了能量获取系统,使用 Lindstedt-Poincaré (林斯泰德-庞加莱)法分析了系统的非线性振动,陈仲生等^[4]建立了非线性压电振动能量获取模型,针对不同的非线性刚度,非线性阻尼和机电耦合常数进行了数值仿真。

非线性双稳态压电能量获取系统和同类装置相比,能利用结构的非线性因素提高能量获取效果^[5]。孙舒等^[6]建立了磁斥力作用下的非线性双稳态悬臂梁能量获取模型,通过调节磁铁之间的距离使系统产生逃离势阱的混沌运动, Masana 和 Daqaq^[7-9]详细研究了屈曲压电梁能量获取系统,通过与线性以及单稳态能量采集系统的比较,显示双稳态系统在大幅激励和低频情况下占有优势, Friswell 等^[10]提出了含有端部质量的竖直悬臂梁压电能量获取模型,竖直悬臂梁由于重力载荷导致双稳态,通过数值模拟和实验说明这种装置在低频环境下具有良好的获

* 收稿日期: 2014-01-06; 修订日期: 2014-04-03

基金项目: 国家自然科学基金(11172234)

作者简介: 李海涛(1985—),男,河北人,博士生(E-mail: lihaitao5884@163.com);

秦卫阳(1967—),男,陕西人,教授,博士生导师(通讯作者, E-mail: qinweiyang@yahoo.com)。

取效果。

根据 Melnikov 理论设定参数是确定高能轨道以及优化能量获取系统的关键。Melnikov 理论是分析非线性系统中的同宿、异宿分岔问题的有效方法。关于 Melnikov 方法的详尽推导,可以参看文献[11]。Stanton 等^[12]应用 Melnikov 方法研究了双稳态压电能量获取系统,发现机电耦合因素影响了双阱动力学行为。Buckjohn 等^[13]用 Melnikov 方法分析了电磁振动能量获取系统的分岔和混沌。Harne 等^[14]用 Melnikov 方法研究了谐波激励作用下的能量获取系统,得到了产生高能轨道的阈值,优化了能量获取效果。

本文中的能量获取系统可以看做机电耦合、负载电阻以及外激励扰动下的保守系统。基于 Melnikov 方法,探讨了同宿分岔对能量获取效果的影响。全文结构如下:首先,建立了等效双稳态能量获取系统数学模型;其次,在考虑机电耦合和负载电阻的基础上,通过 Melnikov 方法得到系统在谐波激励作用下发生同宿分岔的必要条件;再次,在理论分析的基础上进行数值模拟,验证了发生同宿分岔的阈值;最后总结提出相关结论。

1 模型建立

双稳态压电能量获取系统利用压电材料将环境中的振动能量转化为电能。

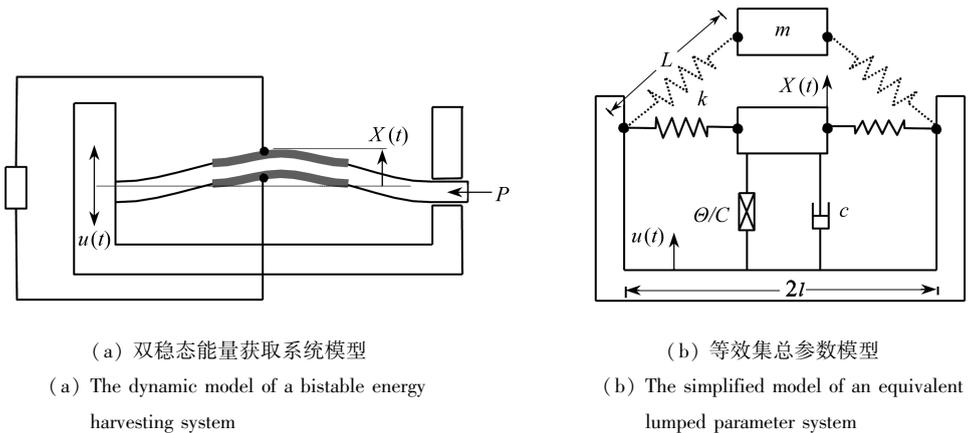


图1 模型

Fig.1 The models of a bistable energy harvesting system

图 1(a) 所示为一种由压电片和轴向受载的 Euler(欧拉)梁构成的双稳态压电能量获取系统。当载荷的大小达到临界值,受压梁发生屈曲呈现双稳态。在横向激励 $u(t)$ 的作用下,受压梁不断地在两种稳态之间变换,产生连续的电能。一般而言,受压梁的低阶模态对响应的贡献较大。因此为了方便研究压电能量获取模型,可将振型假设成一阶模态^[15]。由于轴向载荷的作用,受压梁在垂直方向上呈现出负刚度特性^[16]。针对这种双稳态特点,通过一对受压的斜支撑弹簧将压电能量获取系统简化为等效的集总参数模型(图 1(b))。Cao 等^[17]与 Tian 等^[18]对不考虑压电的斜支撑弹簧振子进行深入的研究,讨论了混沌,余维 2 分岔等非线性动力学行为。等效压电能量获取系统的动力学方程可以写成:

$$mX'' + cX' + 2kX \left(1 - \frac{L}{\sqrt{X^2 + l^2}} \right) - \frac{\Theta}{C} Q = mu'' \quad (1)$$

其中, m 为压电振子的质量, X 表示质量块的相对位移, k 为等效刚度, c 为阻尼系数, L 表示弹簧的原长, l 表示振子质心到支点的水平距离, u 表示外界的振动源位移, Q 表示压电振子产生

的电荷, Θ 表示机电耦合系数, C 表示等效电容。

压电能量获取系统的输出电压为 $V = -\Theta X/C + Q/C$, 在纯电阻电路中的电压表达式为 $V_R = V = -RQ'$. 当压电振子的振动速度较快的时候, 需要进一步考虑非线性阻尼系数 $c = a_1 + a_2 |X'|$ 和非线性机电耦合系数 $\Theta(X) = d_1 + d_2 \sqrt{|X|}$ ^[4], 控制方程可以写成

$$\begin{cases} mX'' + (a_1 + a_2 |X'|)X' + 2kX \left(1 - \frac{L}{\sqrt{X^2 + l^2}}\right) - \frac{1}{C}(d_1 + d_2 \sqrt{|X|})Q = mu'', \\ RQ' - \frac{1}{C}(d_1 + d_2 \sqrt{|X|})X' + \frac{Q}{C} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

引进参数 c_q , 令 $X = Lx, u = Lv, Q = c_q q, \tau = \sqrt{2k/m}t'$, 对方程(2)无量纲化:

$$\begin{cases} \ddot{x} + (2\mu^* \dot{x} + \eta |\dot{x}| \dot{x}) + x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sigma^2}}\right) - \xi^* (\theta + \beta \sqrt{|x|})q = \ddot{v}, \\ \rho^* \dot{q} - (\theta + \beta \sqrt{|x|})x + q = 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} 2\mu^* &= a_1 / \sqrt{2km}, \quad \eta = a_2 L/m, \quad \sigma = l/L, \quad \theta = Ld_1/c_q, \\ \beta &= \sqrt{L^3} d_2/c_q, \quad \xi^* = \frac{1}{2kC} \left(\frac{c_q}{L}\right)^2, \quad \rho^* = RC\sqrt{2k/m}. \end{aligned}$$

考虑到等效能量获取系统在弹簧受压时 $\sigma \neq 0$, 将 $(1 - 1/\sqrt{x^2 + \sigma^2})$ 在 $x = 0$ 处 Taylor 展开, 系统(3)可以写成

$$\begin{cases} \ddot{x} + (2\mu^* \dot{x} + \eta |\dot{x}| \dot{x}) + \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)x + \frac{x^3}{2\sigma^3} - \xi^* (\theta + \beta \sqrt{|x|})q = \ddot{v}, \\ \rho^* \dot{q} - (\theta + \beta \sqrt{|x|})x + q = 0. \end{cases} \quad (4)$$

当 $\sigma < 1$ 时, 方程(4) 对应载荷 p 超过临界值时候的受压梁的运动状态, 此时系统呈现负刚度特性. 取尺度变换: $t' = \sqrt{(1/\sigma - 1)}t$, 可以得到

$$\begin{cases} \ddot{x} + (2\mu \dot{x} + \eta |\dot{x}| \dot{x}) - x + \alpha x^3 - \xi (\theta + \beta \sqrt{|x|})q = \ddot{v}, \\ \rho \dot{q} - (\theta + \beta \sqrt{|x|})x + q = 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\mu = \mu^* \sqrt{\frac{\sigma}{1 - \sigma}}, \quad \alpha = \frac{1}{2\sigma^2(1 - \sigma)}, \quad \xi = \left(\frac{c_q}{L}\right)^2 \frac{2kCl}{L - l}, \quad \rho = \rho^* \sqrt{\frac{1 - \sigma}{\sigma}}.$$

假定外部激励为 $u'' = A \sin(\Omega \tau)$, 无量纲之后为 $\ddot{v} = f \sin(\omega t)$, 其中

$$f = \frac{mAl}{2kL(L - l)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{2k(L - l)}{ml}} \Omega.$$

方程(5)可以写成

$$\begin{cases} \ddot{x} + (2\mu \dot{x} + \eta |\dot{x}| \dot{x}) - x + \alpha x^3 - \xi (\theta + \beta \sqrt{|x|})q = f \sin(\omega t), \\ \rho \dot{q} - (\theta + \beta \sqrt{|x|})x + q = 0. \end{cases} \quad (6)$$

令 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = q$, 方程(6)转化成状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(2\mu x_2 + \eta |x_2| x_2) + (x_1 - \alpha x_1^3) + \xi(\theta + \beta\sqrt{|x_1|})x_3 + f\sin(\omega t), \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{\rho}((\theta + \beta\sqrt{|x_1|})x_1 - x_3). \end{cases} \quad (7)$$

2 Melnikov 分析

如果将阻尼、机电耦合以及外部激励等因素看成对系统(7)对应 Hamilton 系统的微小扰动,那么系统(7)的未扰形式可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - \alpha x_1^3. \end{cases} \quad (8)$$

系统(8)的同宿轨道(图2中虚线曲线)表示成:

$$\begin{cases} x_{1h} = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \operatorname{sech} t, \\ x_{2h} = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \operatorname{sech} t \tanh t. \end{cases} \quad (9)$$

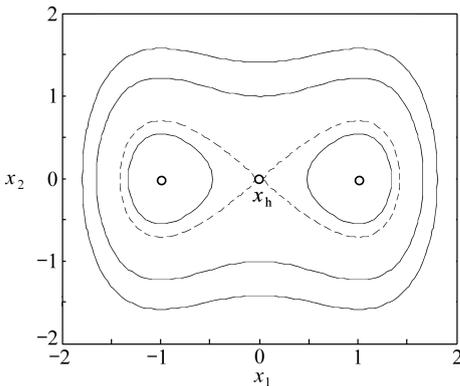


图2 未扰 Hamilton 系统相图

Fig.2 The phase plane portrait of the unperturbed Hamilton system

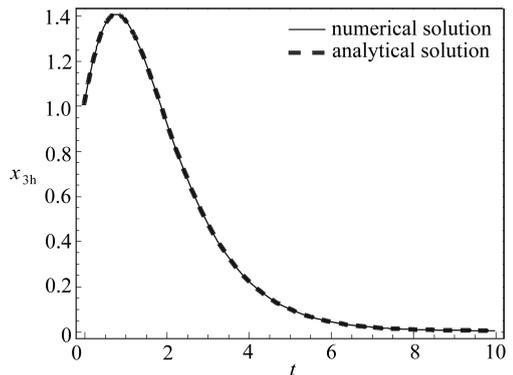


图3 x_{3h} 数值解(粗虚线)与解析解(细实线) ($a = \sqrt{2}$)

Fig.3 Numerical solution (thick dash line) and analytical solution (thin solid line) of x_{3h} ($a = \sqrt{2}$)

二维动力系统关于 Melnikov 方法研究同宿分岔和混沌的文献比较多,但是三维动力系统相关的混沌解析方法研究相对较少。

将 x_{1h}, x_{2h} 代入到方程(7)中,从而有

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\rho}((\theta + \beta\sqrt{|x_{1h}|})x_{1h} - x_3). \quad (10)$$

方程(10)在同宿轨道情形下的解为

$$x_{3h} = e^{-t/\rho} \int_0^t \frac{1}{\rho} ((\theta + \beta\sqrt{|\operatorname{sech} s|}) \operatorname{sech} s) ds = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \left[- \left\{ 2^{4/3} e^{-t/2} \left(-e^{2t} (2 + \rho) \cdot {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{2\rho}, \frac{7}{4} + \frac{1}{2\rho}, -e^{2t} \right) - \right. \right. \right.$$

$$\Gamma_m + \xi I_\xi < fs(\omega). \quad (16)$$

当不等式(16)成立时,系统(7)可能发生同宿分岔以及产生 Smale 马蹄意义下的混沌.但是不等式(16)只是必要条件,满足该条件并不一定会产生高能轨道以及混沌.

3 能量获取参数优化

如图4所示, $s(\omega)$ 在 $\alpha = 1, \omega = 0.765$ 时达到最大值.因此当 $\omega = 0.765$ 时, Melnikov 函数受到无量纲频率 ω 的影响最大.此时的双稳态能量获取系统更容易经历同宿轨道分岔,由此产生双阱运动响应将使系统获取更多的电能.

为了确定负载电阻对 Melnikov 函数的影响,图5中显示了 ρ 与 I_ξ 的关系.在 $\rho = 1.35$ 时, I_ξ 达到最大值2.29.当 I_ξ 上升时,不等式(16)较不容易满足.当 ρ 较大时, I_ξ 单调递减趋近于0(图5(b)),此时系统的 Melnikov 函数等价于经典的单自由度系统情形.因此,对于考虑了机电耦合的三维能量获取系统,可以通过 I_ξ 的极值来确定一个范围使得双阱动力学行为容易发生.

由不等式(16)得到同宿分岔的激励振幅条件为: $f > (\Gamma_m + \xi I_\xi)/s(\omega)$.图6给出了 I_ξ 分别取0和2.29,其它参数为 $\alpha = 1, \beta = 0.5, \theta = 1, \mu = 0.1, \xi = 0.1$ 时关于 ω, f 的同宿分岔阈值曲线.由上面的分析可知,在两条曲线之间的区域为系统发生同宿分岔的临界范围.

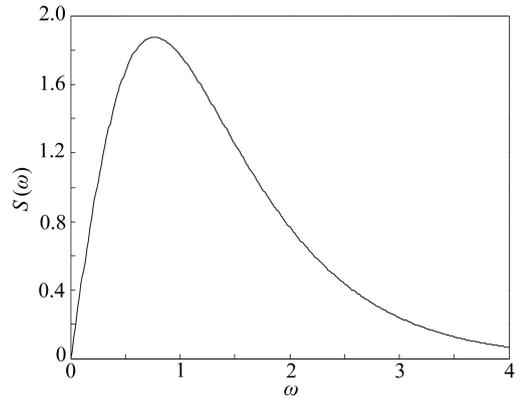
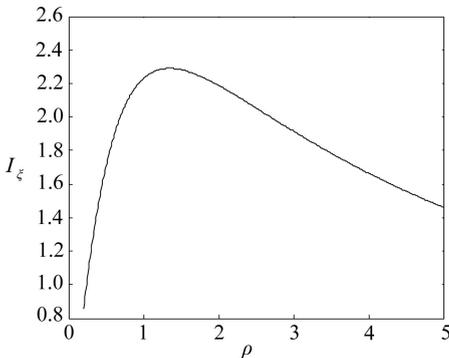


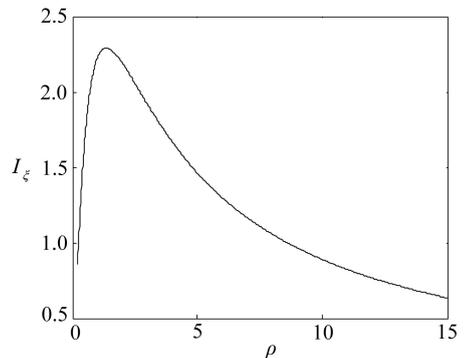
图4 $S(\omega)$ 和 ω 关系图 ($\alpha = 1$)

Fig.4 $S(\omega)$ vs. ω ($\alpha = 1$)



(a) 参数 ρ 和 I_ξ 的关系 ($\rho = 0.1 \sim 5$)

(a) I_ξ vs. ρ ($\rho = 0.1 \sim 5$)



(b) 参数 ρ 和 I_ξ 的关系 ($\rho = 0 \sim 15$)

(b) I_ξ vs. ρ ($\rho = 0 \sim 15$)

图5 参数 ρ 和 I_ξ 的关系 ($\alpha = 1, \beta = 0.5, \theta = 1, \mu = 0.1$)

Fig.5 I_ξ vs. ρ ($\alpha = 1, \beta = 0.5, \theta = 1, \mu = 0.1$)

4 数值模拟

为了验证理论分析的结果,图7为 $\alpha = 1, \beta = 0.5, \theta = 1, \mu = 0.1, \xi = 0.1, \rho = 1.35, \eta = 0.015, \omega = 0.765$ 时,输出电荷 x_3 关于激励幅值 f 的分岔图.图7(a)中 f 从0.4到1之间变化时,系统虽然在临界阈值(图7(a)长虚线)附近经历跳跃,但是仍然维持周期 $p-1$ 运动;图7(b)中 f 从1到1.8之间变化时,系统将会发生倍周期分岔以及混沌.混沌窗口随着激励幅值增

大交替出现,引起混沌的激励幅值有下限而没有上限.

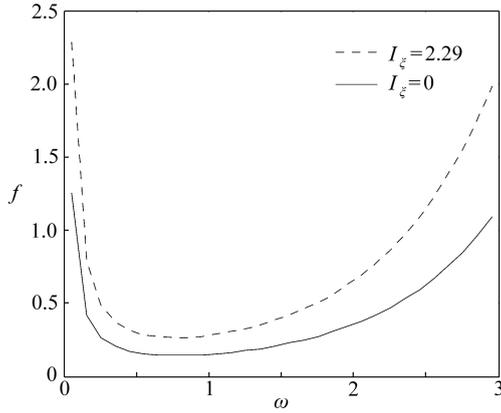
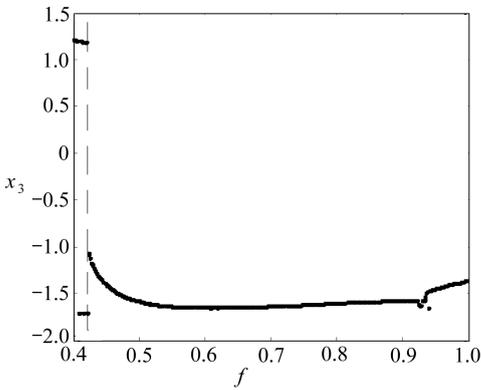


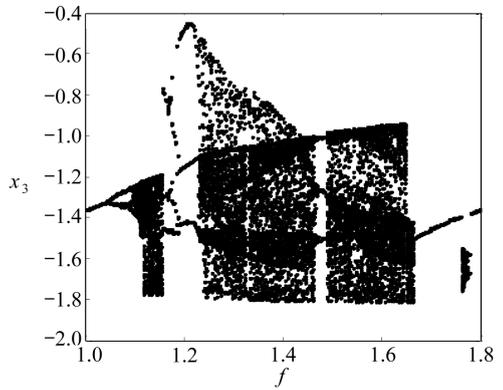
图6 同宿分岔阈值曲线

Fig.6 The critical threshold curves of homoclinic bifurcation



(a) 分岔图 ($f = 0.4 \sim 1$)

(a) The bifurcation diagram ($f = 0.4 \sim 1$)

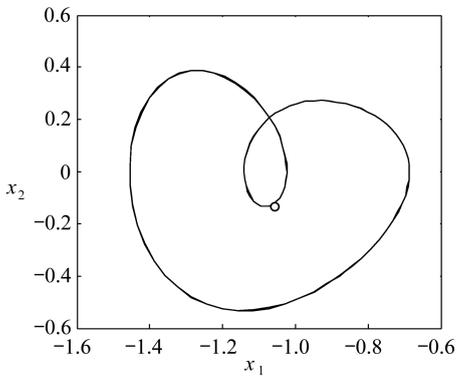


(b) 分岔图 ($f = 1 \sim 1.8$)

(b) The bifurcation diagram ($f = 1 \sim 1.8$)

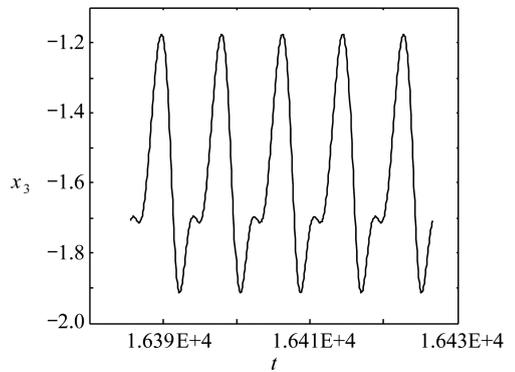
图7 关于激励振幅f的分岔图

Fig.7 The bifurcation diagrams for x_3 vs. f



(a) x_1 - x_2 相平面图

(a) x_1 vs. x_2 phase plane portrait



(b) x_3 的时间历程图

(b) Time history of x_3

图8 $f = 0.422$ 时,单阱周期 p-1 运动

Fig.8 The single well period p-1 motion for $f = 0.422$

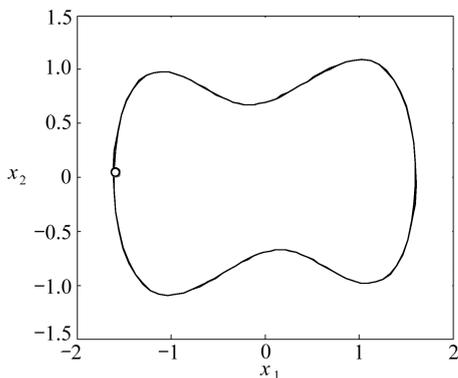
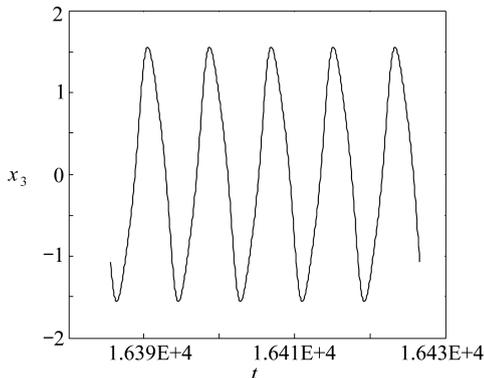
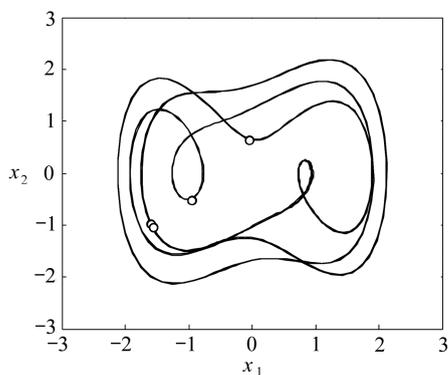
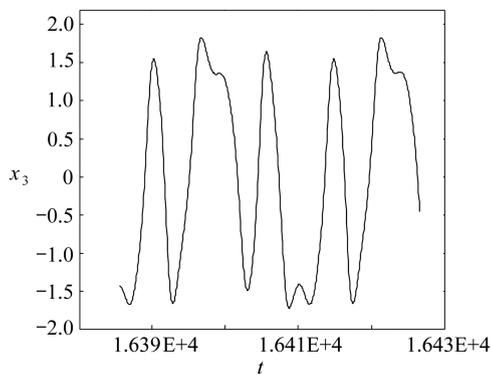
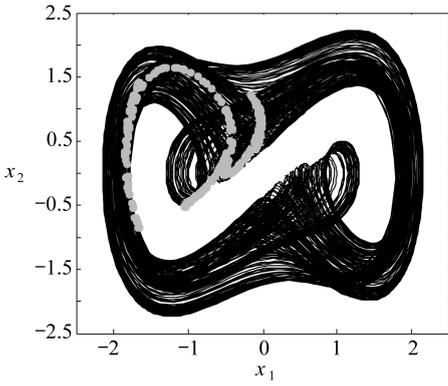
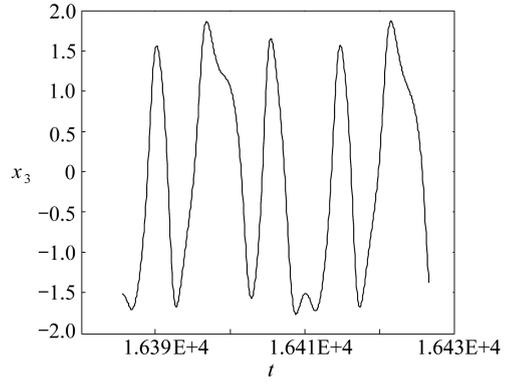
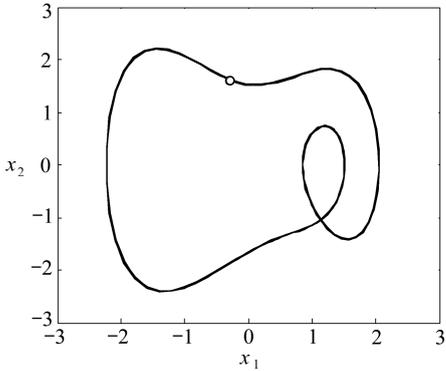
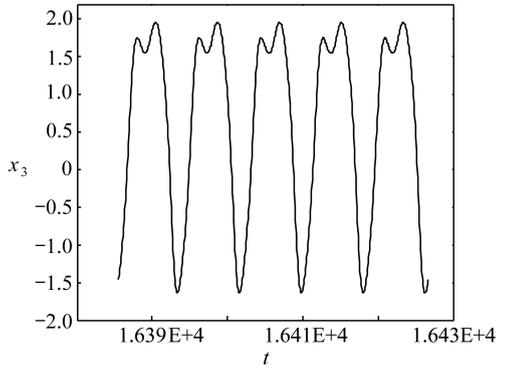
(a) x_1 - x_2 相平面图(a) x_1 vs. x_2 phase plane portrait(b) x_3 的时间历程图(b) Time history of x_3 图9 $f = 0.423$ 时, 双阱周期 p-1 运动Fig.9 The double well period p-1 motion for $f = 0.423$ (a) x_1 - x_2 相平面图(a) x_1 vs. x_2 phase plane portrait(b) x_3 的时间历程图(b) Time history of x_3 图10 $f = 1.21$ 时, 双阱周期 p-3 运动Fig.10 The double well period p-3 motion for $f = 1.21$

图8、图9为 $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\theta = 1$, $\mu = 0.1$, $\xi = 0.1$, $\rho = 1.35$, $\eta = 0.015$, $\omega = 0.765$ 时, f 分别取 0.422 和 0.423 时系统的相平面图、Poincaré 截面图和时间历程图,图8(a)、图9(a)表明当激励幅值小于临界幅值的时候,系统围绕一个平衡点做小幅度单阱周期 p-1 运动;而 f 增大为 0.423 时,系统将获得足够的能量越过势垒,演变成围绕两个稳定平衡点的大幅度双阱周期 p-1 运动.图8(b)、图9(b)表明无量纲输出电荷 x_3 的幅值由于历经同宿分岔而增大,能量获取效率得到增强.

由于已经获得了足够的能量,当继续增大激励幅值时,系统宏观上将保持围绕两个稳定平衡点的大幅度双阱运动.图10(a)、图11(a)、图12(a)表示随着 f 的增加,非线性系统在 x_1 - x_2 相平面上呈现出双阱倍周期、混沌运动交替状态.图10(b)、图11(b)、图12(b)中随着激励幅值增加,输出电荷 x_3 的响应发生倍周期和混沌交替变化.但是随着系统激励幅值增大,而相应的电荷输出幅值并没有明显增大,此时需要调整激励的频率才能提升能量获取效率.

(a) x_1 - x_2 相平面图(a) x_1 vs. x_2 phase plane portrait(b) x_3 的时间历程图(b) Time history of x_3 图 11 $f = 1.25$ 时, 双阱混沌运动Fig.11 The double well chaotic motion for $f = 1.25$ (a) x_1 - x_2 相平面图(a) x_1 vs. x_2 phase plane portrait(b) x_3 的时间历程图(b) Time history of x_3 图 12 $f = 1.7$ 时, 双阱周期 p-1 运动Fig.12 The double well period p-1 motion for $f = 1.7$

4 结 论

本文通过 Melnikov 方法预测了非线性双稳态压电能量获取系统在谐波激励下发生同宿分岔的阈值.首先,在考虑受压梁刚度特性的基础上,建立了等效的非线性双稳态压电能量获取系统数学模型.其次,根据同宿轨道解的特性,确定了一组敏感参数 ω 和 ρ 使系统更容易发生同宿分岔.基于 Melnikov 理论,得到了系统发生同宿分岔的必要条件.最后,数值模拟结果表明当激励幅值超过临界幅值时,系统从单阱低能量轨道变化为双阱高能量轨道,此时系统能量获取效率得到增强.值得注意的是,由于文中采用了假设模态方法和 Taylor 展开等近似截断,因此所得到的结论只能为弱非线性情形的双稳态能量获取系统设计提供指导性的定性认识.使用 Melnikov 方法预测多频激励作用下的强非线性能量获取系统的高能轨道将会作为进一步的研究.

参考文献(References):

- [1] Cottone F, Vocca H, Gammaitoni L. Nonlinear energy harvesting[J]. *Phys Rev Lett*, 2008, **102**(8): 080601.
- [2] 崔岩, 王飞, 董维杰, 姚明磊, 王立鼎. 非线性压电式能量采集器[J]. 光学精密工程, 2012, **20**(12): 2737-2743. (CUI Yan, WANG Fei, DONG Wei-jie, YAO Ming-lei, WANG Li-ding. Non-linear piezoelectric energy harvester[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2012, **20**(12): 2737-2743. (in Chinese))
- [3] 代显智, 文玉梅, 李平, 杨进, 江小芳. 采用磁电换能器的振动能量采集[J]. 物理学报, 2010, **59**(3): 2137-2146. (DAI Xian-zhi, WEN Yu-mei, LI Ping, YANG Jin, JIANG Xiao-fang. Vibration energy harvester based on magnetolectric transducer[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(3): 2137-2146. (in Chinese))
- [4] 陈仲生, 骆彦廷, 杨拥民. 非线性压电振动能量俘获行为建模及其不同参数影响机理研究[J]. 国防科技大学学报, 2013, **35**(2): 154-158. (CHEN Zhong-sheng, LUO Yan-ting, YANG Yong-min. Modeling of nonlinear piezoelectric vibration energy harvesting behaviors and the effects of its different parameters[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2013, **35**(2): 154-158. (in Chinese))
- [5] Roundy S. On the effectiveness of vibration-based energy harvesting[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2005, **16**(10): 809-823.
- [6] 孙舒, 曹树谦. 双稳态压电悬臂梁发电系统的动力学建模及分析[J]. 物理学报, 2012, **61**(21): 210505. (SUN Shu, CAO Shu-qian. Dynamical modeling and analysis of a bistable piezoelectric cantilever power generation system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(21): 210505. (in Chinese))
- [7] Masana R, Daqaq M F. Electromechanical modeling and nonlinear analysis of axially loaded energy harvesters[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2011, **133**(1): 011007.
- [8] Masana R, Daqaq M F. Relative performance of a vibratory energy harvester in mono-and bistable potentials[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(24): 6036-6052.
- [9] Masana R, Daqaq M F. Energy harvesting in the super-harmonic frequency region of a twin-well oscillator[J]. *Journal of Applied Physics*, 2012, **111**(4): 044501.
- [10] Friswell M I, Ali S F, Adhikari S, Lees A W, Bilgen O, Litak G. Nonlinear piezoelectric vibration energy harvesting from an inverted cantilever beam with tip mass[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2012, **23**(3): 1505-1521.
- [11] Guckenheimer J, Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*[M]. New York: Springer-Verlag, 1983: 184-193.
- [12] Stanton S C, Mann B P, Owens B A M. Melnikov theoretic methods for characterizing the dynamics of a bistable piezoelectric inertial generator in complex spectral environments[J]. *Physica D*, 2012, **241**(6): 711-720.
- [13] Buckjohn C N D, Siewe M S, Fokou I S M, Tchawoua C, Kofane T C. Investigating bifurcations and chaos in magneto piezoelectric vibrating energy harvesters using Melnikov theory[J]. *Physica Scripta*, 2013, **88**(1): 015006.
- [14] Harne R L, Thota M, Wang K W. Concise and high-fidelity predictive criteria for maximizing

- performance and robustness of bistable energy harvester[J]. *Applied Physics Letters*, 2013, **102**(5): 053903.
- [15] Cottone F, Gammaitoni L, Vocca H, Ferrari M, Ferrari V. Piezoelectric buckled beam for random vibration energy harvesting[J]. *Smart Materials and Structures*, 2012, **21**(3): 035021.
- [16] HUANG Xiu-chang, LIU Xing-tian, SUN Jing-ya, ZHANG Zhi-yi, HUA Hong-xing. Vibration isolation characteristics of a nonlinear isolator using Euler buckled beam as negative stiffness corrector: a theoretical and experimental study[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, **333**(4): 1132-1148.
- [17] Cao Q, Wiercigroch M, Pavlovskaja E E, Grebogi C, Thompson J M T. Piecewise linear approach to an archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics[J]. *Phil Trans R Soc A*, 2008, **366**(1865): 635-652.
- [18] TIAN Rui-lan, CAO Qing-jie, YANG Shao-pu. The codimension two bifurcation for the recent proposed SD oscillator[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, **59**(1): 19-27.

Bifurcation and Chaos Thresholds of Bistable Piezoelectric Vibration Energy Harvesting Systems

LI Hai-tao, QIN Wei-yang

(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)

Abstract: Nonlinear dynamic performances such as homoclinic bifurcation and chaos were modeled and analyzed for bistable nonlinear vibration energy harvesting systems. According to bistability of the beam under axial loading, a model of the bistable nonlinear vibration energy harvester was established. Based on the Melnikov theory, a qualitative method was proposed to address homoclinic bifurcation of the bistable energy harvester under harmonic excitation, and the criteria for homoclinic bifurcation and the high-energy solution were derived from the Melnikov function through parameter optimization. Numerical simulation shows that the singlewell-to-doublewell transitions occur at the critical thresholds, which verifies the theoretical analysis. Research on the Melnikov method for nonlinear energy harvesting systems promises effective tools for the parametric design of high-performance energy harvesters.

Key words: bistable energy harvester; Melnikov function; homoclinic bifurcation

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11172234)