文章编号:1000-0887(2014)06-0692-05

一阶 Lagrange 系统平衡稳定性对参数的依赖关系*

宋　端

(辽东学院 影像物理教研室, 辽宁 丹东 118001)

摘要: 带附加项的定常一阶 Lagrange 系统在一定条件下可化成梯度系统,利用梯度系统的特性研究了带附加项的一阶 Lagrange 系统的稳定性及其对参数的依赖关系.以具体实例在参数平面上划出稳定性区域,进一步说明了参数的变化不仅可改变稳定性质,而且可改变平衡点的参数.

关 键 词: 一阶 Lagrange 系统; 梯度系统; 稳定性; 参数

中图分类号: O316　　**文献标志码:** A

doi:10.3879/j.issn.1000-0887.2014.06.011

引　　言

一阶 Lagrange 系统是指问题的 Lagrange 函数 L 对速度是线性的.关于这类问题的研究主要集中在两个方面:1)从一阶微分方程组出发构造一阶 Lagrange 函数,即变分逆问题;2)研究约束力学系统的对称性与守衡量问题[1].一阶 Lagrange 系统被广泛应用于综合国力分析、市场经济分析、战争、人口与动物世界、疾病的传染与诊断等[2-3].目前, 对一阶 Lagrange 系统的研究已取得一定进展,如文献[4-5].本文研究一类系统,其 Lagrange 函数对速度是线性的,且方程的右端出现附加项.这类系统比通常的一阶 Lagrange 系统更为普遍,同时,将一阶方程组化成这类系统比化成通常的一阶 Lagrange 系统更为容易[6-7].而梯度系统是微分方程和动力系统中的重要问题, 是目前动力学与控制领域研究的一个热点问题,特别适合利用 Lyapunov 函数来研究稳定性问题[8-10], 如分岔、混沌等特性.如果一个力学系统或物理系统可以表为梯度系统,那么就可利用梯度系统的性质来研究这类系统的稳定性以及稳定性对参数的依赖关系.本文给出了带附加项的一阶 Lagrange 系统成为梯度系统的条件,讨论了化成梯度系统后再利用梯度系统的性质来研究系统的平衡稳定性以及稳定性对参数的依赖关系问题.

1　梯度系统及其稳定性分析

梯度系统的微分方程有形式[8]:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial \nu}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2,\cdots,m, \tag{1}$$

* **收稿日期:** 2014-01-20; **修订日期:** 2014-05-14
基金项目: 国家自然科学基金(10932002;11272050)
作者简介: 宋端(1962—),女,辽宁丹东人,副教授(E-mail: songduan620606@163.com).

称 $\nu=\nu(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 为势函数,但不是力学中的势能.梯度系统有如下重要性质:

1) 如果 ν 是系统(1)的一个 Lyapunov 函数,并且 $\dot{\nu}=0$,当且仅当 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 是一个平衡点;

2) 对梯度系统(1),任一平衡点处的线性化系统都只有实特征根.

以上两条可以用来研究可化成梯度系统的力学、物理系统的平衡稳定性问题.由于梯度系统平衡点处的线性化系统都只有实特征根,因此,特征根可为正,可为负,亦可为0.由 Lyapunov 一次近似理论可知,如果特征根皆为负,则平衡是渐近稳定的;如果特征根有正根,则平衡是不稳定的;如果有零根,且为单根,无正根,则平衡是稳定的.

2　一阶 Lagrange 系统及其梯度表示

研究带附加项的定常一阶 Lagrange 系统,其微分方程有形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s, \tag{2}$$

其中 $L=L(q,\dot{q})=A_s(q)\dot{q}_s-B(q)$ 为 Lagrange 函数, $Q_s=Q_s(q,\mu,\nu)$ 为附加项,而 μ,ν 为两个参数.展开方程(2),得

$$\left(\frac{\partial A_k}{\partial q_s}-\frac{\partial A_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k-\frac{\partial B}{\partial q_s}=Q_s \qquad (s,k=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

设

$$\det(\Omega_{sk})=\det\left(\frac{\partial A_k}{\partial q_s}-\frac{\partial A_s}{\partial q_s}\right)\neq 0, \tag{4}$$

则由式(3)可解出所有广义速度 $\dot{q}_s$, 有

$$\dot{q}_s=\Omega_{sk}\left(\frac{\partial B}{\partial q_k}+Q_k\right) \qquad (s,k=1,2,\cdots n), \tag{5}$$

其中

$$\Omega_{sk}\Omega_{k\ell}=\delta_\ell^s. \tag{6}$$

一阶 Lagrange 系统(5)仅在一定条件下才能成为梯度系统.对系统(5),如果满足条件:

$$\frac{\partial}{\partial q_\ell}\left\{\Omega_{sk}-\left(\frac{\partial B}{\partial q_k}+Q_k\right)\right\}-\frac{\partial}{\partial q_s}\left\{\Omega_{\ell k}-\left(\frac{\partial B}{\partial q_k}+Q_k\right)\right\}=0 \qquad (s,k,\ell=1,2,\cdots,n), \tag{7}$$

此时,可求得势函数 $\nu=\nu(q)$, 使得

$$\Omega_{sk}\left(\frac{\partial B}{\partial q_k}+Q_k\right)=-\frac{\partial \nu}{\partial q_s} \qquad (s,k=1,2,\cdots,n). \tag{8}$$

当一阶 Lagrange 系统的附加项 Q_s 包含两个参数时,可在参数平面上划出稳定性区域.

3　算　　例

例 1　一阶 Lagrange 系统为

$$L=\frac{1}{2}(q_1\dot{q}_2-\dot{q}_1q_2)+\frac{1}{2}q_1^2-\frac{1}{2}q_2^2,\ Q_1=q_2\nu,\ Q_2=-q_1\mu-q_1^2, \tag{9}$$

其中 μ,ν 为参数,试研究系统的解 $q_1=q_2=0$ 的稳定性对参数 μ,ν 的依赖关系.

解　方程(3)给出

$$\dot{q}_1 = - q_2 - q_1\mu - q_1^2,\ \dot{q}_2 = - q_1 - q_2\nu.$$

容易看出,条件(7)满足,这是一个梯度系统,其一次近似的特征方程有形式:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu & 1 \\ 1 & \lambda + \nu \end{vmatrix} = \lambda^2 + (\mu + \nu)\lambda + \mu\nu - 1 = 0.$$

因此,当 $\mu + \nu > 0, \mu\nu - 1 > 0$ 时,有二负根,平衡是渐近稳定的;当 $\mu + \nu > 0, \mu\nu - 1 = 0$ 时,有一零根和一负根,平衡是稳定的;当 $\mu\nu - 1 < 0$ 时,有一正根,平衡是不稳定的.由此,可在平面 μ,ν 上划分出稳定性区域:第一象限中双曲线 $\mu\nu - 1 = 0$ 的一支的上方.

例 2　一阶 Lagrange 系统为

$$L = \frac{1}{2}(q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2),\ Q_1 = 2q_2,\ Q_2 = - 2q_1(q_1 - \mu)(3q_1 - \nu), \tag{10}$$

其中 μ,ν 为参数,试研究系统的稳定性对参数的依赖关系.

解　方程(3)给出

$$\dot{q}_1 = 2q_1(q_1 - \mu)(3q_1 - \nu),\ \dot{q}_2 = - 2q_2.$$

显然,它是一个梯度系统.

(i) 平衡点的个数依赖于参数 μ,ν

1) 当 $\mu = \nu = 0$ 时,有一个平衡点(0,0);

2) 当 $\mu \neq 0, \nu = 0$ 或 $\mu = 0, \nu \neq 0$ 时,有两个平衡点(0,0),(μ,0) 或(0,0),($\nu/3$,0).

3) 当 $\mu \neq 0, \nu \neq 0$ 时,有 3 个平衡点(0,0),(μ,0),($\nu/3$,0).

(ii) 平衡点稳定性依赖于参数 μ,ν

1) 平衡点(0,0)

线性化方程为

$$\dot{q}_1 = - 2q_1\mu\nu,\ \dot{q}_2 = - 2q_2.$$

因此,当 $\mu\nu = 0$ 时,一根为 0 一根为负,平衡是稳定的;当 $\mu\nu > 0$ 时,有两负根,平衡是渐近稳定的;当 $\mu\nu < 0$ 时,有正实根,平衡是不稳定的.平衡依赖于参数 μ,ν.

2) 平衡点 (μ,0)

线性方程为

$$\dot{\xi}_1 = - 2\mu(3\mu - \nu)\xi_1,\ \dot{\xi}_2 = - 2\xi_2,$$

其中,$\xi_1 = q_1 - \mu, \xi_2 = q_2$.因此,当 $2\mu(3\mu - \nu) = 0$ 时,有一零根和一负根,平衡是稳定的;当 $2\mu(3\mu - \nu) > 0$ 时,有二负根,平衡是渐近稳定的;当 $2\mu(3\mu - \nu) < 0$ 时,有一正根,平衡是不稳定的.对固定的参数 μ,平衡依赖于参数 ν.

(iii) 平衡点 ($\nu/3$,0)

线性方程为

$$\dot{\xi}_1 = - 2\nu\left(\frac{\nu}{3} - \mu\right)\xi_1,\ \dot{\xi}_2 = - 2\xi_2,$$

其中,$\xi_1 = q_1 - \nu/3, \xi_2 = q_2$.因此,当 $2\nu(\nu/3 - \mu) = 0$ 时,有一零根和一负根,平衡是稳定的;当 $2\nu(\nu/3 - \mu) > 0$ 时,有二负根,平衡是渐近稳定的;当 $2\nu(\nu/3 - \mu) < 0$ 时,有一正根,平衡是不稳定的.对固定的 ν,平衡依赖于参数 μ.

4 结　　论

带附加项的定常一阶 Lagrange 系统在一定条件下可以化成梯度系统.化成梯度系统后便可利用梯度系统的性质来研究这类系统的稳定性及其对参数的依赖关系.例 1 有一个平衡点,例 2 有 1 个、2 个或 3 个平衡点.参数的变化不仅可改变稳定性质,而且可改变平衡点的参数.本文提供了一种内接研究系统稳定性的方法.

参考文献(References):

[1] 梅凤翔, 吴惠彬. 一阶 Lagrange 系统的梯度表示[J]. 物理学报, 2013, **62**(21). doi: 10.7498/aps.62.214501.(MEI Feng-xiang, WU Hui-bin. A gradient representation of first-order Lagrange system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(21). doi: 10.7498/aps.62.214501.(in Chinese))

[2] Lucas W F. *Differential Equations Models*[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

[3] 王树禾. 微分方程模型与混沌[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999.(WANG Shu-he. *Differential Equations Models and Chaos*[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1999.(in Chinese))

[4] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.(LI Ziping. *Classical and Quantal Dynamics of Constrained System and Their Symmetrical Properties*[M]. Beijing: Beijing Technology University Press, 1993.(in Chinese))

[5] Sudarshan E C G, Mukunda N. *Classical Dynamics: A Modern Perspectiv*e[M]. New York: John Wiley & Sons, 1974.

[6] Santilli R M. *Foundations of Theoretical Mechanics I—The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1978.

[7] 梅凤翔, 尚玫. 一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 物理学报, 2000, **49**(10): 1901-1903.(MEI Feng-xiang, SHANG Mei. Lie symmetries and conserved quantities of first order Lagrange systems[J]. *Acta Physica Sinica*, 2000, **49**(10): 1901-1903.(in Chinese))

[8] Hirsch M W, Smale S, Devaney R L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*[M]. Singapore: Elsevier, 2008.

[9] 梅凤翔, 吴惠彬. 广义 Hamilton 系统与梯度系统[J]. 中国科学: 物理学, 力学, 天文学, 2013, **43**(4): 538-540.(MEI Feng-xiang, WU Hui-bin. Generalized Hamilton system and gradient system[J]. *Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica*, 2013, **43**(4): 538-540.(in Chinese))

[10] 楼智美, 梅凤翔. 力学系统的二阶梯度表示[J]. 物理学报, 2012, **61**(2). doi: 10.7498/aps.61.024502.(LOU Zhi-mei, MEI Feng-xiang. A second order gradient representation of mechanics system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(2). doi: 10.7498/aps.61.024502.(in Chinese))

Dependence of Equilibrium Stability of First Order Lagrange Systems on Parameters

SONG Duan
(*Department of Imaging Physics*, *Eastern Liaoning University*, *Dandong*, *Liaoning* 118001, *P.R.China*)

Abstract: Steady first order Lagrange systems with additive terms were considered as gradient systems under certain conditions. The characteristics of the gradient system were used to study the equilibrium stability and its dependence on the parameters of the system. With two examples, the first order Lagrange systems' stability domains were given in the parameter plane. Further, the analytical results indicate that change of the parameters not only influence the systems' stability, but also influence the quantity of the equilibrium points.

Key words: first order Lagrange system; gradient system; stability; parameter
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(10932002;11272050)