

# 塑性本构理论与工程材料塑性本构关系\*

郑颖人<sup>1,2</sup>, 孔亮<sup>3</sup>, 刘元雪<sup>1,2</sup>

- (1. 后勤工程学院 军事建筑工程系, 重庆 401311;  
2. 重庆市地质灾害防治工程技术研究中心, 重庆 400041;  
3. 青岛理工大学 理学院, 山东 青岛 266033)

(本刊编委郑颖人来稿)

**摘要:** 研究了材料的塑性本构理论,从理论上建立了严密的塑性本构方程,为建立工程材料塑性本构关系提供了理论基础,此后将理论应用于3种工程材料.依据材料的性质以及工程的要求,通过简化得出满足工程计算精度要求的岩土类摩擦材料、金属类晶体材料的塑性本构关系;对强度控制的工程问题如有充分塑性变形条件则可将材料视作理想塑性材料,应用屈服条件和极限分析条件,采用传统的或数值的极限分析方法,求得工程安全系数或极限承载力.

**关键词:** 塑性本构理论; 工程材料; 本构方程; 应力主轴旋转; 摩擦材料; 理想塑性

**中图分类号:** O344; O344.2; O33      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.07.001

## 引 言

材料力学主要目的在于求出外力作用下固体材料内部的应力与变形,以及材料的破坏及其破坏后的力学状态.随着外力的增大,材料从弹性经塑性、损伤,直至破坏.材料从弹性到塑性可通过屈服准则来判断,而从塑性到破坏需要通过破坏准则.目前力学上并没有明确的破坏准则,但可借助极限分析中的整体面破坏准则.材料刚屈服时不会破坏,随着塑性的增大,材料损伤、局部裂纹,直至破坏面整体达到极限平衡状态,发生整体破坏.根据材料的不同受力状态,将材料力学细分为弹性力学、塑性力学与破坏力学,只是后者至今尚未形成系统的学问.

从塑性力学理论来看,它与弹性力学不同的只是材料的塑性本构方程,而其它平衡方程、几何方程、连续方程等都与弹性力学一样<sup>[1-3]</sup>.因此塑性力学的关键应归结为材料的塑性本构方程,而塑性本构方程应依据塑性理论与材料力学性质试验来建立.

实际工程材料塑性本构方程应对塑性本构方程做一定的简化,以减少建模的工作量.首先应根据工程材料的特性抓住主要矛盾对本构模型进行简化,同时还要根据工程的要求进一步简化本构方程.如对变形控制的工程问题,要求能准确而简便地求出位移,需要建立较为准确

\* 收稿日期: 2014-02-24; 修订日期: 2014-03-31

基金项目: 国家重大基础研究发展规划(973)项目(2010CB732100;2011CB710606);山东省自然科学基金杰出青年基金(JQ201017)

作者简介: 郑颖人(1933—),男,浙江镇海人,中国工程院院士,教授,博士生导师(通讯作者).  
Tel: +86-23-68750581; E-mail: zhengl32@163.com).

的本构模型;对强度控制的工程问题,通常除求内力外,还要求材料的破坏状态与安全系数;而对位移计算精度要求不高,如有充分塑性变形条件,这时还可进一步简化本构模型,把材料视作理想塑性材料。

## 1 塑性本构理论分析

从力学理论角度讲,必须严格、全面地建立塑性本构方程理论体系,以便指导各类工程材料本构方程的建立。塑性本构模型的实质就是要列出塑性状态下材料的应力、应变关系,也就是说在已知 6 个应力分量的情况下,如何求出 6 个塑性应变分量。在弹性力学中,应力应变关系是线弹性的,弹性参数由材料力学试验确定;同样,在塑性力学中,应力应变关系及其参数也应当由塑性本构理论与材料力学性质试验共同来确定。为推导方便,先在不考虑主轴旋转的传统主应力空间中研究,在 6 个应力分量中,3 个主应力增量由应力主轴上应力大小变化引起,如  $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$ ;另外 3 个旋转应力增量  $d\sigma_{r1}, d\sigma_{r2}, d\sigma_{r3}$  由应力主轴方向变化所引起<sup>[2,4]</sup>,即应力主轴旋转所引起,它们分别绕 3 个主轴旋转。

在不考虑主轴旋转的传统主应力空间中,应用矩阵理论将应力增量进行分解<sup>[2-3]</sup>,可得到应力增量的张量表达式如下:

$$d\sigma = d\sigma_e + d\sigma_r = d\sigma_e + d\sigma_{r1} + d\sigma_{r2} + d\sigma_{r3} = \begin{bmatrix} d\sigma_1 & d\sigma_{r1} & d\sigma_{r3} \\ d\sigma_{r1} & d\sigma_2 & d\sigma_{r2} \\ d\sigma_{r3} & d\sigma_{r2} & d\sigma_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

将主轴方向的应力增量称为共轴应力增量,它们是法向应力增量;应力主轴旋转的应力增量称为旋转应力增量,它们是切向应力增量,在力学单元中表现为成对的剪应力增量。可见,当考虑应力主轴旋转时,在传统的主应力空间中也存在剪应力分量,而通常不考虑应力主轴旋转情况下,剪应力分量为 0,应力增量可分解为两部分,而这两部分应力增量都会引起塑性变形,因而塑性应变增量  $d\varepsilon^p$  与总应变增量  $d\varepsilon$  可写成

$$\begin{cases} d\varepsilon^p = d\varepsilon_e^p + d\varepsilon_r^p = d\varepsilon_e^p + d\varepsilon_{r1}^p + d\varepsilon_{r2}^p + d\varepsilon_{r3}^p, \\ d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = d\varepsilon^e + d\varepsilon_e^p + d\varepsilon_{r1}^p + d\varepsilon_{r2}^p + d\varepsilon_{r3}^p, \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $d\varepsilon^e$  为弹性应变增量;  $d\varepsilon_e^p$  为共轴应力增量  $d\sigma_e$  引起的塑性应变增量;  $d\varepsilon_r^p$  为旋转应力增量  $d\sigma_r$  引起的塑性应变增量;  $d\varepsilon_{r1}^p, d\varepsilon_{r2}^p, d\varepsilon_{r3}^p$  为旋转应力增量  $d\sigma_{r1}, d\sigma_{r2}, d\sigma_{r3}$  分别引起的塑性应变增量。

共轴应力增量不引起主轴旋转方向的塑性应变,因而不考虑应力主轴旋转的广义塑性位势公式,可作为共轴塑性应变增量的求解公式,通常称为不考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论<sup>[2]</sup>:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

式中,  $Q_k$  是主轴方向 3 个分量塑性势,由于主轴方向是已知的,因而分量塑性势也是已知的,未知量在塑性系数  $d\lambda_k$  中。

由土工试验可知,在主应力和主应变空间内,3 个旋转应力增量  $d\sigma_r$  引起 3 个主轴方向和 3 个绕主轴旋转方向的塑性应变,因而需引用 6 个塑性势函数。与不考虑应力主轴旋转的塑性势函数一样,势函数的选择可以任意,但必须保持势函数的线性无关。一般可把 6 个塑性应变分量写成 6 个势函数,即 6 个塑性应变分量的方向,其中前 3 个是共轴情况下塑性势面的法

线方向,后3个是共轴情况下塑性势面的切线方向,因而考虑旋转应力增量的广义流动法则可写成<sup>[2,4]</sup>

$$d\epsilon_{ijkr}^p = \sum_{k=1}^6 d\lambda_{kr} \frac{\partial Q_{kr}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (r = 4, 5, 6), \quad (4)$$

式中,  $d\epsilon_{ijkr}^p$  为3个旋转应力增量引起的塑性应变增量的分量;  $d\lambda_{kr}$  为6个塑性系数;  $Q_{kr}$  为3个共轴情况下塑性势面的法线方向和3个共轴情况下塑性势面的切线方向, 即  $Q_{1r} = \sigma_1, Q_{2r} = \sigma_2, Q_{3r} = \sigma_3, Q_{4r} = \sigma_{23}, Q_{5r} = \sigma_{13}, Q_{6r} = \sigma_{12}$ .

旋转应力增量  $d\sigma_r$  可写成分别绕3个主轴旋转的3个旋转应力增量分量, 即  $d\sigma_{r1}, d\sigma_{r2}, d\sigma_{r3}$ , 在力学单元中它们就是由主轴旋转引起的3个成对的剪应力增量, 这里将  $d\sigma_{r1}, d\sigma_{r2}, d\sigma_{r3}$  写成  $d\tau_{23}, d\tau_{13}, d\tau_{12}$ , 见图1. 按应力分解得到<sup>[2-3]</sup>

$$\begin{cases} d\tau_{23} = d\sigma_{r1} = d\theta_1(\sigma_2 - \sigma_3), \\ d\tau_{13} = d\sigma_{r2} = d\theta_2(\sigma_1 - \sigma_3), \\ d\tau_{12} = d\sigma_{r3} = d\theta_3(\sigma_1 - \sigma_2), \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $d\theta_1, d\theta_2, d\theta_3$  分别为3个主应力轴旋转角增量.

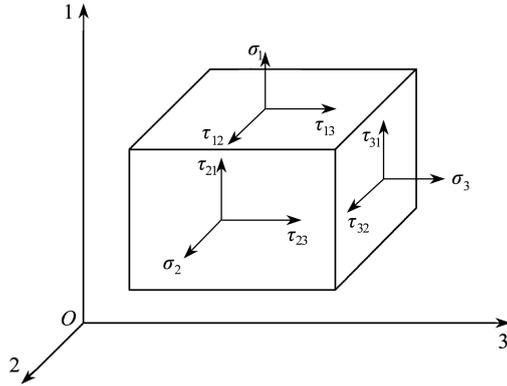


图1 力学单元中的旋转应力增量示意图

Fig.1 Increment of rotation stress in a micro unit

它们将各自引起4个方向上的塑性应变增量, 因而考虑旋转应力增量的广义流动法则, 还可写成如下形式:

$$\begin{cases} d\epsilon_{ij14}^p = d\lambda_{1114} \frac{\partial Q_{14}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{2214} \frac{\partial Q_{24}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{3314} \frac{\partial Q_{34}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{1214} \frac{\partial Q_{44}}{\partial \sigma_{ij}}, \\ d\epsilon_{ij25}^p = d\lambda_{1125} \frac{\partial Q_{15}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{2225} \frac{\partial Q_{25}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{3325} \frac{\partial Q_{35}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{2325} \frac{\partial Q_{55}}{\partial \sigma_{ij}}, \\ d\epsilon_{ij36}^p = d\lambda_{1136} \frac{\partial Q_{16}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{2236} \frac{\partial Q_{26}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{3336} \frac{\partial Q_{36}}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_{1336} \frac{\partial Q_{66}}{\partial \sigma_{ij}}. \end{cases} \quad (6)$$

式(5)与(6)称为应力旋转部分的广义塑性位势理论或流动法则. 如与式(3)组合, 即得含主应力轴旋转在内的广义塑性位势理论<sup>[2,4]</sup>:

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_{ij}} + \sum_{k=1}^6 d\lambda_{kr} \frac{\partial Q_{kr}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (r = 4, 5, 6). \quad (7)$$

式(7)就是材料的塑性本构方程一般式, 如果不考虑应力主轴旋转, 则成为不考虑应力主

轴旋转的本构方程(式(3))。

在求解中采用柔度矩阵更为方便,在传统的主应力空间中,可将考虑应力主轴旋转的塑性柔度矩阵写成

$$\mathbf{C}'_p = \mathbf{C}'_{cp} + \mathbf{C}'_{rp}, \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{C}'_{cp}$  为共轴塑性柔度矩阵;  $\mathbf{C}'_{rp}$  为旋转塑性柔度矩阵:

$$\mathbf{C}'_{cp} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}'_{rp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C'_{14} & C'_{15} & C'_{16} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{24} & C'_{25} & C'_{26} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{34} & C'_{35} & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

最后,将主应力空间转换到弹塑性力学中一般应力空间,则含主应力轴旋转的塑性柔度矩阵为<sup>[2]</sup>

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{T}_A \mathbf{C}'_p \mathbf{T}_A^T, \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{T}_A$  为应力空间转换矩阵。

## 2 工程材料塑性本构方程

在塑性本构理论的指导下,建立材料本构方程需要进行大量的试验。材料本构方程及其参数需要通过试验给出,如建立岩土本构模型,按上述理论需要进行常规三轴试验、真三轴试验和空心圆柱扭转试验,这对实际工程来说过于繁琐,需要对特定的材料进行简化,力求使计算既满足工程精度的要求,又简单方便,减少工作量。因而需要针对特定材料建立相应的塑性本构方程。目前应用最广的土木工程材料:一是岩土类摩擦材料,具有黏聚力和摩擦力;二是金属类晶体材料,只具有黏聚力。对于强度控制的工程问题,可采用最简单的本构关系,将工程材料视作理想弹塑性材料。下面对上述两种工程材料给出简化了的塑性本构关系,并满足工程精度要求;对有充分塑性变形条件的强度控制问题,按理想弹塑性,应用极限分析方法求解工程的安全系数或极限承载力。

### 2.1 岩土类摩擦材料塑性本构方程的简化

#### 2.1.1 应力主轴旋转的简化

主应力轴旋转是指主应力方向在加载过程中发生偏转的现象,公路、隧道、地基等岩土工程中普遍存在这一现象。但式(7)比较复杂,试验工作量很大,因而可以效仿传统塑性力学,对工程问题做一些简化。导致岩土发生主应力轴旋转的因素归纳起来主要有以下3种<sup>[5]</sup>:1) 不同频率、不同历时荷载的动态变化(波浪、交通、地震荷载等),其主要作用效果是使主应力轴循环或反复旋转<sup>[6]</sup>,纯主应力轴旋转所引起的破坏应变可达30%~40%<sup>[7]</sup>,甚至会导致砂土液化破坏<sup>[8-9]</sup>,因而对于循环动载一般需要考虑应力主轴旋转。2) 边界条件的改变(如堤坝修筑、边坡切坡、隧道开挖等)使得岩土工程中岩土应力状态发生变化,继而导致主应力轴发生旋转<sup>[10]</sup>。3) 主应力大小和方向局部静态或准静态变化(如集中加压、桩基荷载等)<sup>[11]</sup>。但第2种情况只是在边界面附近有较大影响,远处基本无影响;同样,第3种情况只在集中应力部位附近有影响,远处也无影响<sup>[2,4]</sup>。这与材料力学中 Saint-Venant(圣维南)原理一致。可见,对这两种情况只需在特殊情况下考虑应力主轴旋转,一般静力问题可不考虑应力主轴旋转。

2.1.2 Lodé(洛德)角或中间主应力变化对塑性应变的影响及其简化

由塑性力学可知,不仅在  $q$  方向产生塑性剪应变,而且还会在  $\theta_\sigma$  方向产生塑性剪应变,从下面的公式可见, $\theta_\sigma$  方向的影响实际上也就是中间主应力的影响:

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \mu_\sigma \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3). \tag{11}$$

上述可见,在  $\sigma_1, \sigma_3$  一定的情况下,中间主应力  $\sigma_2$  是取决于 Lodé 参数  $\mu_\sigma$  或 Lodé 角  $\theta_\sigma$ . 试验研究表明,中间主应力的影响是不大的,在传统的塑性力学中,对于金属材料,在考虑  $\theta_\sigma$  影响的 Mises(米赛斯)准则与不考虑  $\theta_\sigma$  影响的 Tresca(屈瑞斯卡)准则之间,极限应力最小差值为 0,最大差值在  $\theta_\sigma = 0$  的纯剪情况下,其差值为 15.7%.图 2 中列出 Mises 屈服面与不考虑中间主应力的 Tresca 屈服面之间的关系.考虑中间主应力影响的高红-郑颖人的三剪能量屈服准则<sup>[2]</sup>与不考虑中间主应力影响的 Mohr-Coulomb(莫尔-库仑)准则之间,最小差值为 0;由于最大差值与荷载、抗剪强度有关,对岩土类材料大致在 1.03~1.23 之间.图 3 中列出高红-郑颖人屈服面与不考虑中间主应力的 Mohr-Coulomb 屈服面之间的关系.考虑到岩土还有很大的体积应变,则其差值还会缩小,因而当工程精度要求不高时,可以不考虑  $\theta_\sigma$  影响.若要考虑则可引用高红-郑颖人的三剪能量屈服准则,或者采用真三轴试验得到的一些经验准则,其差值都不大,不必再做真三轴试验,从而使本构模型的构建进一步简化.

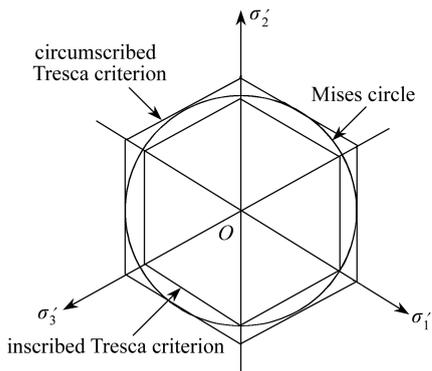


图 2 Mises 圆内接(或外接)Tresca 面

Fig.2 Incribed (or circumscribed) Tresca yield surface of the Mises circle

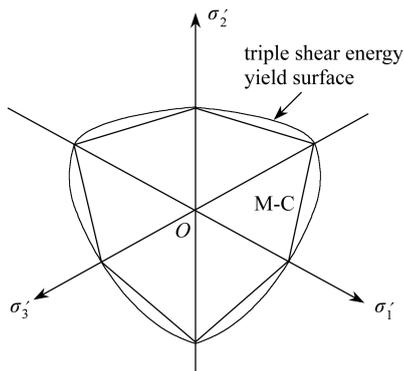


图 3 三剪能量屈服面内接 Mohr-Coulomb 面

Fig.3 Incribed Mohr-Coulomb yield surface of the triple shear energy surface

2.1.3 制定岩土本构方程及其参数的试验规程

工程材料中岩土材料本构方程最为复杂,为了提高岩土材料塑性本构方程的准确性与合理性,建议制订相应试验规程,对各类土性和不同地域的岩土提出相应试验方法.目前岩土建模中通常选用现有的 1~2 种本构模型,并通过试验求其参数,这种预先确定模型的做法不能很好适应复杂多变的岩土,因而建议制定岩土本构模型的试验规程,依据试验建立本构模型并确定相应参数,这种做法能提高计算精度,但增加的试验工作量不多.按照岩土塑性理论建模,并做一些符合实际的简化,加上科学的试验方法,一定可以建立起既具较高精度,又简便实用的岩土本构模型.

2.2 金属类晶体材料的经典塑性本构方程

经典塑性力学适用于金属类晶体材料.在经典塑性力学中不仅不考虑应力主轴旋转,依据材料性质也不考虑塑性体变,此时式(7)成为

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^2 d\lambda_k \frac{\partial Q_k}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (12)$$

式中,如果以  $p, q, \theta_\sigma$  为坐标主轴,则  $Q_k$  是  $q$  与  $\theta_\sigma$  主轴方向的塑性势。

由于经典塑性力学中塑性势采用了弹性势,此时塑性应变分量互成比例,因而可合成一个塑性势  $Q$ , 它表示塑性应变增量总量的方向。此时塑性应变增量方向只与应力有关,而与应力增量无关,它与应力具有唯一性。在上述情况下,金属类晶体材料满足塑性势假设,由此就得出了经典的塑性势公式并满足 Drucker(德鲁克)公设与关联流动法则:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (13)$$

式中,  $Q$  为传统塑性势。

在经典塑性力学中只考虑  $q$  与  $\theta_\sigma$  方向两个塑性剪应变分量,可以导出<sup>[3]</sup>:

$$d\bar{\gamma}^p = d\lambda \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial q} \right)^2 + \left( \frac{1}{q} \frac{\partial Q}{\partial \theta_\sigma} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (14)$$

当不考虑 Lodé 角  $\theta_\sigma$  影响时,则上式变为

$$d\bar{\gamma}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial q}. \quad (15)$$

经典塑性力学中做了不考虑应力主轴旋转、不考虑塑性体应变和采用弹性势假设,使金属类晶体材料本构关系得到简化。由此可见,经典塑性理论仅适用于非摩擦材料与静力情况。但这些假设与岩土变形特性不符,岩土材料与弹性势假设不符,不满足 Drucker 塑性公设和关联流动法则,需要采用非关联流动法则。实验表明,金属类晶体材料后继屈服面存在着膨胀或缩小、移动、畸变和旋转等现象,这些都会影响本构方程,而且有些现象难以用经典塑性力学解释,目前正在研究与发展之中。

### 3 对有充分塑性变形条件强度控制工程问题按理想

#### 弹塑性求解工程安全系数或极限承载力

固体材料受力后一般都是先进入弹性状态,随着荷载的增大材料中某些点达到屈服,进入塑性,随着受力增大,屈服点增多,塑性发展,材料损伤直至破坏。判断材料整体破坏需要建立材料的破坏准则,传统极限分析方法可以提供材料整体面破坏的条件,并由此求出工程的安全系数或极限承载力。

英国著名土力学家 Roscoe(罗斯科)指出,无论是土体排水试验或不排水试验,无论何种试验路径,只要土体达到临界应力状态(即破坏状态),岩土都会发生破坏,表明破坏只与应力状态有关,而与路径无关。由此得出结论,如果只是求工程的极限荷载或安全系数,则完全可以应用理想塑性模型,而不必建立准确的本构模型,这也与力学中极限分析方法的原理一致。

传统的极限分析法需要事先知道破坏面的位置才能求解,适用范围十分有限。1975年,英国著名力学家 Zienkiewicz(辛克维兹)提出用数值方法求解极限问题,出现了有限元超载法与有限元强度折减法<sup>[12]</sup>。这种方法的求解思路与传统极限分析法不同,如强度折减法,在数值计算中通过不断地降低材料强度,最终使材料达到破坏状态。破坏状态可依据计算中发出的破坏信息确定,材料达到破坏时的强度折减系数即为安全系数。因而它不需要事先假定破坏面,可直接采用数值计算求解稳定安全系数或极限荷载。这种方法本质上是采用数值方法进行极限

分析,作者将其统称为数值极限分析法,或有限元极限分析法(可以是有限元法、有限差分法、离散元法等),并扩大其功能,还可用来确定破坏面的位置与形状。

### 3.1 工程材料的屈服准则<sup>[13-15]</sup>

求解强度控制问题需要知道屈服条件与破坏条件.对于理想塑性的屈服条件已有成熟的研究,高红-郑颖人三剪能量屈服条件从理论上给出了考虑中间主应力的岩土材料屈服条件.当不考虑岩土内摩擦角时,则退化为 Mises 屈服条件;当  $\theta_\sigma = \pm 30^\circ$  时,或不考虑中间主应力时,则退化为 Mohr-Coulomb 准则.文献[2]中给出了屈服准则体系,见表 1.表中左半部是不考虑中间主应力的屈服条件,右半部是考虑中间主应力的屈服条件。

表 1 应力表述的屈服准则体系

Table 1 The system of yield criteria expressed by stress

shear state	single shear		triple shear	
	yield criterion	expression	yield criterion	expression
metal material	Tresca	$\sigma_1 - \sigma_3 = k$	Mises	$J_2 = C$
	Mohr-Coulomb	$p \sin \varphi + \frac{q}{3}(\sqrt{3} \cos \theta_\sigma - \sin \theta_\sigma \sin \varphi) = c \cos \varphi$	Gao Hong-Zheng Yingren triple shear energy	$p \sin \varphi + \frac{q}{3}(\sqrt{3} \cos \theta_\sigma - \sin \theta_\sigma \sin \varphi) = 2c \cos \varphi \times \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3} \tan \theta_\sigma \sin \varphi}{3 + 3 \tan^2 \theta_\sigma - 4\sqrt{3} \tan \theta_\sigma \sin \varphi}}$
	Drucker-Prager	$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0$	triple shear Drucker-Prager	$\alpha_a I_1 + \sqrt{J_2} - k_a = 0$
rock and soil material	$\theta_\sigma = 30^\circ$ (constant) (triaxial compression)	$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$ $k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$	$\theta_\sigma = 30^\circ$ (constant) (triaxial compression)	$\alpha_a = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$ $k_a = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$
	$\theta_\sigma = -30^\circ$ (constant) (triaxial tension)	$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$ $k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$	$\theta_\sigma = -30^\circ$ (constant) (triaxial tension)	$\alpha_a = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$ $k_a = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$
	$\theta_\sigma = 0^\circ$ (constant) (plane strain)	$\alpha = \sin \varphi$	$\theta_\sigma = 0^\circ$ (constant) (plane strain)	$\alpha_a = \sin \varphi$
	(non-associated flow rule)	$k = c \cos \varphi$	(non-associated flow rule)	$k_a = \frac{2}{\sqrt{3}}c \cos \varphi$

注 表中,  $\sigma_1, \sigma_3$  为第一、第三主应力;  $\alpha, k, \alpha_a, k_a$  均为系数;  $\theta_\sigma$  为 Lodé 角;  $I_1, J_2$  为应力张量第一不变量和应力偏张量第二不变量。

**Note** In the table,  $\sigma_1$  and  $\sigma_3$  are the first and the third major stresses;  $\alpha, k, \alpha_a$  and  $k_a$  are coefficients;  $\theta_\sigma$  is the Lodé angle;  $I_1$  is the first invariant of the stress tensor;  $J_2$  is the second invariant of the deviatoric stress tensor.

### 3.2 工程材料整体面破坏条件

#### 3.2.1 达到整体面破坏的条件

依据极限分析理论,材料达到极限状态是有条件的,一般需满足以下 3 个条件: 1) 要求材料满足屈服条件进入塑性并有充分塑性变形; 2) 材料存在贯通的屈服面,屈服面不贯通不

可能产生整体破坏,屈服面中最先达到破坏的面称为破坏面;3)当破坏面上由外力产生的滑动力与材料(包括荷载)产生的抗滑内力相等时即发生破坏,所以破坏面上滑动力与抗滑力平衡是整体面破坏的关键条件,这一破坏条件也可用破坏面上的外力功与内能耗散功相等来描述,即破坏面上外力所做的功和内能耗散功满足虚功方程时材料发生破坏。

### 3.2.2 工程材料的整体破坏准则<sup>[12-13]</sup>

依据上述原理,在达到极限状态和理想塑性情况下,材料的整体面破坏条件为破坏面上的力满足下式:

$$F = Q, \quad (16)$$

式中,  $F$  为外荷载产生的破坏面上的滑动力,  $Q$  为材料强度产生的和外荷载产生的破坏面上的抗滑力。

或表达为

$$W = D, \quad (17)$$

式中,  $W$  为外力在材料体内所做的功率,  $D$  为沿间断面上的内能量耗散功率。

式(16)和(17)可作为材料的整体剪切破坏条件。

### 3.3 数值极限分析方法的破坏判据<sup>[12-14]</sup>

求解数值极限分析方法关键的问题是如何准确判断材料进入破坏状态。目前,静力状态下一般采用如下3个判据<sup>[2,13-15]</sup>:

1) 以塑性应变在材料中是否贯通作为判据,即以塑性区从内部贯通至地面或临空面作为破坏判据。但塑性区贯通只意味着材料达到屈服状态,而不一定是整体破坏状态。可见,塑性区贯通只是破坏的必要条件而非充分条件;

2) 应变和位移的突变标志着材料破坏,此时强度折减系数与位移的关系曲线也会发生突变,因此可用来作为破坏判据;

3) 在数值计算过程中,工程破坏常与数值计算不收敛同时发生,目前国际通用软件中,一般都以数值计算过程中位移或力不收敛作为工程破坏的判据。

除上述判据外,有些判据可以依据工程材料破坏特点来确定,如桩基发生桩底刺穿破坏,由此可以建立特殊的破坏判据<sup>[16]</sup>。

上述判据的力学依据及其适用性与可行性,尚需进一步研究。计算中有时还会出现不易判断的情况。数值极限分析方法目前还处于初始阶段,有待于不断提高与成熟。

## 4 结 论

基于严密的力学理论,建立了完整的塑性本构方程,为工程材料塑性本构方程的建立提供了理论基础。

针对两种工程材料及其强度控制工程问题,提出了相应的两种简化本构关系,并将强度控制工程问题视作理想塑性材料。其中岩土类摩擦材料的本构关系最为复杂,除考虑剪应变外还需要考虑塑性体变,但一般静力问题可不考虑应力主轴旋转。对静力问题通常情况下只需做常规三轴试验,并建议制定相应试验规程。金属类晶体材料本构方程不考虑塑性体变和应力主轴旋转,并满足弹性势作为塑性势的假设,此时简化为经典塑性位势理论,并符合 Drucker 公设和关联流动法则。对有充分塑性变形条件强度控制的工程问题可简化为理想塑性材料,应用屈服条件和极限分析中的整体面破坏条件,通过数值或传统的极限分析方法得到工程的安全系数或极限承载力。

## 参考文献(References):

- [1] R·希尔. 塑性数学理论[M]. 王仁译. 北京: 科学出版社, 1966. (Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*[M]. WANG Ren transl. Beijing: Science Press, 1966. (in Chinese))
- [2] 郑颖人, 孔亮. 岩土塑性力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010. (ZHENG Ying-ren, KONG Liang. *Geotechnical Plastic Mechanics*[M]. Beijing: China Building Industry Press, 2010. (in Chinese))
- [3] 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006. (WANG Ren, HUANG Wen-bin, HUANG Zhu-ping. *Introduction to Plasticity*[M]. Beijing: Peking University Press, 2006. (in Chinese))
- [4] 刘元雪, 郑颖人, 陈正汉. 含主应力轴旋转的土体一般应力应变关系[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(5): 407-413. (LIU Yuan-xue, ZHENG Ying-ren, CHEN Zheng-han. The general strain stress relation of soils involving the rotation of principal stress axes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1998, **19**(5): 407-413. (in Chinese))
- [5] 董彤, 郑颖人, 刘元雪, 阿比尔的. 考虑主应力轴旋转的土体本构关系研究进展[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(4): 327-335. (DONG Tong, ZHENG Ying-ren, LIU Yuan-xue, Abi Erdi. Research progress of the soil constitutive relation considering principal stress axes rotation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(4): 327-335. (in Chinese))
- [6] Grabe P J, Clayton C R I. Effects of principal stress rotation on permanent deformation in rail track foundations[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2009, **135**(4): 555-565.
- [7] 姜洪伟, 赵锡宏. 主应力轴旋转对软土塑性变形影响分析[J]. 上海力学, 1997, **18**(2): 140-146. (JIANG Hong-wei, ZHAO Xi-hong. The impact analysis of principal stress rotation on plastic deformation[J]. *Shanghai Journal of Mechanics*, 1997, **18**(2): 140-146. (in Chinese))
- [8] Symes M T, Gens A, Hight D W. Drained principal stress rotation in saturated sand[J]. *Geotechnique*, 1988, **38**(1): 59-81.
- [9] Lade P V. Elasto-plastic behavior of  $K_0$ -consolidation clays in torsion shear tests[J]. *Soils and Foundations*, 1989, **29**(2): 127-140.
- [10] 张启辉, 赵锡宏. 主应力轴旋转对剪切带形成的影响分析[J]. 岩土力学, 2000, **21**(1): 32-35. (ZHANG Qi-hui, ZHAO Xi-hong. An influence on shear band formation of the rotation of principal stress directions[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2000, **21**(1): 32-35. (in Chinese))
- [11] 罗强, 王忠涛, 栾茂田, 杨蕴明, 陈培震. 非共轴本构模型在地基承载力数值计算中若干影响因素的探讨[J]. 岩土力学, 2011, **32**(增1): 732-737. (LUO Qiang, WANG Zhong-tao, LUAN Mao-tian, YANG Yun-ming, CHEN Pei-zhen. Factors analysis of non-coaxial constitutive model's application to numerical analysis of foundation bearing capacity[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, **32**(supp 1): 732-737. (in Chinese))
- [12] Zienkiewicz O C, Humpheson C, Lewis R W. Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics[J]. *Geotechnique*, 1975, **25**(4): 671-689.
- [13] 郑颖人. 岩土数值极限分析方法的发展与应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, **31**(7): 1297-1316. (ZHENG Ying-ren. Development and application of numerical limit analysis for geological materials[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2012, **31**(7): 1297-1316. (in Chinese))
- [14] 郑颖人, 赵尚毅, 李安洪, 唐晓松. 有限元极限分析法及其在边坡中的应用[M]. 北京: 人民交

- 通出版社, 2011.(ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi, LI An-hong, TANG Xiao-song. *FEM Limit Analysis and Its Application in Slope Engineering* [M]. Beijing: China Communications Press, 2011.(in Chinese))
- [15] 郑颖人, 朱合华, 方正昌, 刘怀恒. 地下工程围岩稳定分析与设计理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2012.(ZHENG Ying-ren, ZHU He-hua, FANG Zheng-chang, LIU Huai-heng. *The Stability Analysis and Design Theory of Surrounding Rock of Underground Engineering* [M]. Beijing: China Communications Press, 2011.(in Chinese))
- [16] 董天文, 郑颖人. 基于强度折减法的桩基础有限元极限分析方法[J]. 岩土工程学报, 2010, 32 (增2): 162-165.(DONG Tian-wen, ZHENG Ying-ren. Limit analysis of FEM for pile foundation based on strength reduction[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, 32 (supp 2): 162-165.(in Chinese))

## Plastic Constitutive Relation and Plastic Constitutive Theory for Engineering Materials

ZHENG Ying-ren<sup>1,2</sup>, KONG Liang<sup>3</sup>, LIU Yuan-xue<sup>1,2</sup>

(1. *Department of Civil Engineering, Logistic Engineering University, Chongqing 401311, P.R.China;*

2. *Chongqing Engineering and Technology Research Center of Geological Hazard Prevention and Treatment, Chongqing 400041, P.R.China;*

3. *School of Science, Qingdao Technological University, Qingdao, Shandong 266033, P.R.China)*

(Contributed by ZHENG Ying-ren, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Based on deep analysis of the plastic constitutive theory for engineering materials, a more rigorous and general plastic constitutive equation was proposed, which could work as the theoretical basis for constitutive modeling of engineering materials. Then the constitutive relation was applied to 3 kinds of engineering materials, i.e. geotechnical friction materials, metal crystal materials and strength control problems. According to the material properties and requirements of engineering calculation, the constitutive relation could be simplified for the geotechnical friction materials and metal materials respectively. For the strength control engineering problems, the related material could be deemed as perfectly plastic on condition of sufficient plastic deformation, and the yield condition with the limit analysis condition was used to determine the safety factor or ultimate bearing capacity through traditional or numerical limit analysis.

**Key words:** plastic constitutive theory; engineering material; constitutive relation; principal stress axis rotation; friction material; perfect plasticity

**Foundation item:** The National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB732100; 2011CB710606)