

集中弯矩作用下箱梁剪力滞效应的解析解*

蔺鹏臻¹, 杨子江², 孙理想¹, 冀伟²

(1. 兰州交通大学 甘肃省道路桥梁与地下工程重点实验室, 兰州 730070;
2. 兰州交通大学 土木工程学院, 兰州 730070)

摘要: 以承受集中弯矩的简支梁结构为对象, 基于能量变分法, 获得了剪力滞效应计算的解析解通式. 分别对仅跨内承受集中弯矩和单侧梁端承受集中弯矩简支梁, 以及两侧梁端承受相反弯矩的纯弯梁, 提出了剪力滞效应计算的理论公式, 揭示了该类型结构的剪力滞规律. 通过简支箱梁算例, 研究了 3 种集中弯矩工况下的剪力滞效应, 并与有限元板壳数值解进行对比分析. 研究表明, 该解析方法可以有效计算简支梁承受集中弯矩时的剪力滞效应. 简支梁在集中弯矩作用部位存在较为突出的剪力滞效应.

关键词: 箱梁; 剪力滞; 集中弯矩; 解析法

中图分类号: U441⁺.5 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.07.004

引 言

在刚体力学中, 通常将作用于同一刚体上的大小相等、方向相反但不共线的两个平行力组成的力系, 称为力偶^[1]. 而将作用在杆件纵向平面(即包含杆轴线在内的平面)内, 使得杆件的相邻横截面绕垂直于杆轴线的轴发生相对弯曲转动的力偶, 称为集中弯矩^[2]. 一般情况下, 弯矩是构件在弯曲变形下产生的内力, 是计算构件强度和刚度的力学参数之一. 但有些情况下, 在结构力学分析中, 当引入一定的力学平衡和分解条件后, 往往会出现弯矩作为外力存在的情况. 比如偏心受拉(或压)杆件常等效为轴心受拉(或压)和集中弯矩的组合; 应用力法进行某些超静定结构的内力计算中, 也会根据方便性将冗余未知力设定为集中弯矩^[3]; 桥梁中大量采用的预应力筋, 当预应力锚固位置不在截面形心时, 其预应力效应也往往等效为轴心压力和弯矩作用^[4]; 此外还有斜拉桥的斜拉索, 斜拉索锚固点往往不在截面形心位置, 因此拉索的力学效应可分解为作用在拉索锚固截面上的轴向力、竖向力和集中弯矩^[5].

集中弯矩作用下, 杆件均会发生弯曲变形. 当杆件为薄壁箱梁截面时, 伴随着弯曲变形, 箱梁上下翼板在其自身平面内发生剪切变形, 使得翼板的纵向弯曲正应力沿截面横向的分布出现不均匀的现象, 称之为剪力滞效应^[6].

目前, 对剪力滞效应的大量研究多集中在均布荷载和竖向集中荷载这两种简单荷载^[6-11], 对于集中弯矩作用下求解方法的研究较少^[12]. 本文基于能量变分法, 建立了简支梁同时承受

* 收稿日期: 2013-09-14; 修订日期: 2014-05-16

基金项目: 国家自然科学基金(51208242; 51368031); 甘肃省杰出青年基金(1210RJDA009); 中国博士后科学基金(2012M521815); 教育部“长江学者和创新团队发展计划”(IRT1139)

作者简介: 蔺鹏臻(1977—), 男, 甘肃甘谷人, 教授, 博士(通讯作者). E-mail: pzhlin@mail.lzjtu.cn.

梁端和跨内集中弯矩的剪力滞效应计算通式.分别对仅跨内承受集中弯矩、单侧梁端集中弯矩和两侧梁端承受相反弯矩的纯弯梁,提出了剪力滞效应计算的理论公式,揭示了该类型结构的剪力滞规律.

1 承受集中弯矩作用的简支梁通解

1.1 剪力滞基础微分方程

为了分析箱梁在竖向弯曲下的剪力滞分布规律,需首先定义横截面的纵向位移函数.结合文献[13],定义 $w(x)$ 为横截面任一点 (x, y, z) 的竖向挠曲位移, $w'(x)$ 为相应的转角, $u(x, y, z)$ 为纵向位移, $U(x)$ 为翼板剪切变形最大差, $M(x)$ 为沿梁长 x 处的截面弯矩.定义 $f(y, z)$ 为截面的剪滞翘曲位移函数.各变量的正方向为:线位移以图 1 坐标方向为正,转角以顺时针方向为正.此时横截面的纵向位移可表示为

$$u(x, y, z) = -zw'(x) + f(y, z)U(x). \tag{1}$$

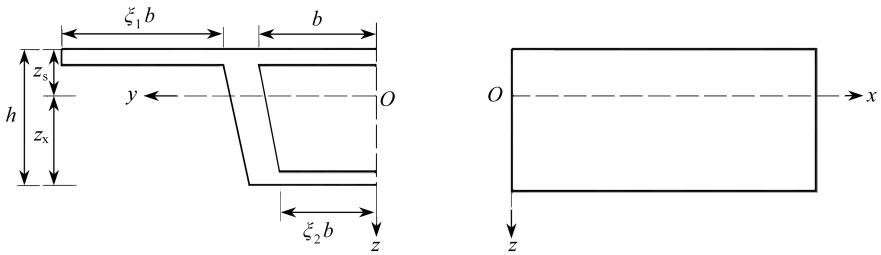


图 1 箱梁节段及其正方向

Fig.1 Geometry and coordinate system of the box girder segment

根据截面任一点的纵向位移,得到截面的弹性应变为

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -zw''(x) + f(y, z)U'(x), \\ \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(y, z)U(x). \end{cases} \tag{2}$$

梁体的应变能可表示为对梁段体积 V 的积分:

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \int_V (E\varepsilon^2 + G\gamma^2) dV. \tag{3}$$

梁体承受弯矩 M 时弯曲的外力势能表达式为

$$\bar{W} = - \int_{x_1}^{x_2} M(x)w'' dx. \tag{4}$$

根据最小势能原理,处于平衡状态的结构,在外力作用下其体系的总位能的变分为 0,即

$$\delta\Pi = \delta(\bar{V} - \bar{W}) = 0. \tag{5}$$

参照既有文献[6-7,9,12],选择截面的翘曲位移函数为经典的抛物线型函数:

$$f(y, z) = z(1 - \bar{y}^3). \tag{6}$$

根据不同翼板的构造特点,各翼板的 \bar{y} 取值分别为

$$\bar{y} = \begin{cases} y/b, & \text{top flange,} \\ (b + \xi_1 b - y)/(\xi_1 b), & \text{cantilever flange,} \\ y/(\xi_2 b), & \text{bottom flange.} \end{cases}$$

通过将式(2)、(3)、(4)和(6)代入式(5),并进行变分运算,可获得基于变分原理的梁段微分方程和边界条件为^[6]

$$\begin{cases} EIw'' - \frac{3}{4} EI_s U' + M(x) = 0, \\ \frac{9}{14} U'' + \frac{3}{4} w''' - \frac{9}{5} \frac{G}{Eb^2} U = 0, \\ \left(\frac{9}{14} U' + \frac{3}{4} w'' \right) \delta U \Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

式中, I 为截面对 y 轴的抗弯惯性矩, I_s 为仅顶、底板时的抗弯惯性矩。

由式(7)中第 1,2 式,可得到梁段的剪力滞控制微分方程:

$$U'' - k^2 U = \frac{7nQ(x)}{6EI}, \quad (8)$$

式中

$$n = \left(1 - \frac{7}{8} \frac{I_s}{I} \right)^{-1}, \quad k = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{14Gn}{5E}},$$

$Q(x) = M'(x)$ 是 x 处截面的剪力。

1.2 承受集中弯矩的剪力滞统一方程

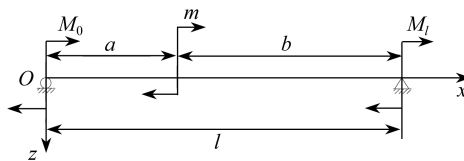
图 2(a) 为两侧梁端和跨内承受集中弯矩作用下的简支梁,其梁体弯矩和剪力表达式为当 $0 \leq x \leq a$ 时

$$M_1(x) = M_0 - \frac{\sum M}{l} x, \quad Q_1(x) = -\frac{\sum M}{l}; \quad (9)$$

当 $a < x \leq l$ 时

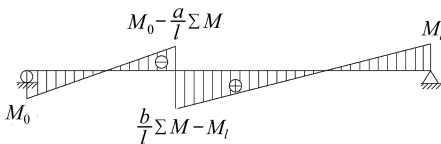
$$M_2(x) = M_0 + m - \frac{\sum M}{l} x, \quad Q_2(x) = -\frac{\sum M}{l}, \quad (10)$$

式中 $\sum M$ 为梁体集中弯矩的代数和(图 2(b)),即: $\sum M = M_0 + m + M_l$ 。



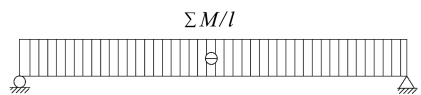
(a) 简支梁

(a) A simply supported girder



(b) 弯矩图

(b) Bending moment curve



(c) 剪力图

(c) Shear force curve

图 2 承受集中弯矩的简支梁

Fig.2 A simply supported girder under a concentrated bending moment

由式(9)和(10)可知,简支梁的剪力为定值(图 2(c)),因此由式(8)可得集中弯矩作用下简支梁的剪力滞微分方程通用表达式为

$$U'' - k^2 U = -\frac{7n}{6EI} \cdot \frac{\sum M}{l}. \tag{11}$$

对于式(11)的微分方程,其通解为

$$\begin{cases} U_1 = \frac{7n}{6EI} \sum M \left(C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(kx) + \frac{1}{lk^2} \right), & 0 \leq x \leq a, \\ U_2 = \frac{7n}{6EI} \sum M \left(C_3 \sinh(kx) + C_4 \cosh(kx) + \frac{1}{lk^2} \right), & a < x \leq l. \end{cases} \tag{12}$$

1.3 边界条件

考虑集中弯矩作用时,剪力滞基本微分方程的边界条件主要是关于翘曲位移 U 的条件.

1) 梁端边界条件

由式(7)中第 3 式, U' 应满足的条件为

$$\left[U' - \frac{7nM(x)}{6EI} \right] \delta U \Big|_{x=0}^{x=l} = 0. \tag{13}$$

对于简支梁,由式(13)得到

$$U'(0) = \frac{7nM_0}{6EI}, \quad U'(l) = \frac{7nM_l}{6EI}. \tag{14}$$

2) 跨内连续条件

在梁跨内任一点 $x = a$ 处, U 应满足的变形连续条件为

$$U_1 \Big|_{x=a} = U_2 \Big|_{x=a}, \tag{15}$$

U' 应满足的连续条件可由式(13)得到

$$\left[U'_1 \Big|_{x=a} - \frac{7nM_1(a)}{6EI} \right] - \left[U'_2 \Big|_{x=a} - \frac{7nM_2(a)}{6EI} \right] = 0. \tag{16}$$

1.4 通解的系数表达式

由边界条件式(14)和(16),可解出式(12)中的系数表达式:

$$C_1 = \frac{1}{k} \frac{M_0}{\sum M}, \tag{17}$$

$$C_2 = \frac{1}{k} \left(\frac{M_l}{\sum M \sinh(kl)} - \frac{M_0}{\sum M \tanh(kl)} \right) - \frac{1}{k} \frac{m}{\sum M} \frac{\cosh(k(l-a))}{\sinh(kl)}, \tag{18}$$

$$C_3 = \frac{1}{k} \frac{M_0}{\sum M} + \frac{1}{k} \frac{m}{\sum M} \cosh(ka), \tag{19}$$

$$C_4 = \frac{1}{k} \left(\frac{M_l}{\sum M \sinh(kl)} - \frac{M_0}{\sum M \tanh(kl)} - \frac{m}{\sum M} \frac{\cosh(ka)}{\tanh(kl)} \right). \tag{20}$$

1.5 剪力滞应力的统一表达式

将式(17)~(20)代入式(12),可得到剪力滞位移 U 的通用表达式.根据 Hook(虎克)定律,并结合式(2),可得截面任一点的应力为

$$\sigma(x, y, z) = E\varepsilon = E[-zw''(x) + f(y, z)U'(x)] =$$

$$-Ez \left[\frac{M(x)}{EI} - \left(1 - \bar{y}^3 - \frac{3zI_s}{4I} \right) U'(x) \right], \quad (21)$$

2 不同部位承受集中弯矩的解析解

2.1 仅跨间作用集中弯矩

对于仅跨间部位承受集中弯矩 m 的简支梁, 根据边界条件, $M_0 = M_l = 0$, $\sum M = m$, 可得到剪力滞位移系数为

$$C_1 = 0, C_2 = -\frac{1}{k} \frac{\cosh(k(l-a))}{\sinh(kl)}, C_3 = \frac{1}{k} \cosh(ka), C_4 = -\frac{1}{k} \frac{\cosh(ka)}{\tanh(kl)}.$$

将以上系数代入式(12), 即可得到跨间承受集中弯矩简支梁的剪力滞位移 U 的表达式:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{7nm}{6EI} \left[-\frac{\cosh(k(l-a))}{\sinh(kl)} \cosh(kx) + \frac{1}{lk} \right], & 0 \leq x \leq a, \\ U_2 = \frac{7nm}{6EI} \left(\cosh(ka) \sinh(kx) - \frac{\cosh(ka)}{\tanh(kl)} \cosh(kx) + \frac{1}{lk} \right), & a < x \leq l. \end{cases} \quad (22)$$

将式(22)代入式(21)即可得到考虑剪力滞的应力表达式. 特别地, 当 $a = l/2$ 时, 跨中部位的应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{zm}{I} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{7n}{12} \left(1 - \frac{\bar{y}^3}{b^3} - \frac{3I_s}{4I} \right) \right\}, & x \rightarrow a^-, \\ \sigma_2 = -\frac{zm}{I} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{7n}{12} \left(1 - \frac{\bar{y}^3}{b^3} - \frac{3I_s}{4I} \right) \right\}, & x \rightarrow a^+. \end{cases} \quad (23)$$

由式(23)可以看出, 集中弯矩左右两侧的应力大小相等而方向相反.

此时, 集中弯矩左侧 ($x \rightarrow a^-$) 顶板的剪力滞系数为

$$\begin{cases} \lambda_{y=b} = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = 1 + \frac{7n}{8} \frac{I_s}{I} = n, \\ \lambda_{y=0} = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = 1 - \frac{7n}{6} \left(1 - \frac{3I_s}{4I} \right) = -\frac{n}{6}. \end{cases} \quad (24)$$

式(24)说明, 集中弯矩作用部位的剪力滞系数为仅与 n 有关的常数. 同理对于任意 a 值, 均可得到式(24)的结果和结论, 即: 在集中弯矩作用截面, 靠近腹板部位顶板的剪力滞系数为 n , 而悬臂板端部和截面中心部位的顶板剪力滞系数为 $-n/6$.

2.2 单侧梁端作用集中弯矩

对仅梁端承受集中弯矩 M_0 的简支梁, 根据弯矩表达式可知 $U_1 = 0$, $M_l = m = 0$, $\sum M = M_0$, 系数表达式为

$$C_3 = \frac{1}{k}, C_4 = -\frac{1}{k} \frac{1}{\tanh(kl)}.$$

剪力滞位移表达式为

$$U = \frac{7nM_0}{6EI} \left(\sinh(kx) - \frac{\cosh(kx)}{\tanh(kl)} + \frac{1}{lk^2} \right), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (25)$$

梁体的应力表达式为

$$\sigma = \frac{zM_0}{I} \left[\frac{l-x}{l} + \frac{7n}{6} \left(\frac{\sinh(kx)}{\tanh(kl)} - \cosh(kx) \right) \left(1 - \bar{y}^3 - \frac{3I_s}{4I} \right) \right]. \quad (26)$$

特别地,当 $x = 0$ 时,梁端顶板的剪力滞系数也为式(24)。

2.3 纯弯梁

对在左右梁端承受相等集中弯矩 M_0 的纯弯简支梁,可利用上述方法得到梁体截面应力表达式为

$$\sigma = \frac{zM_0}{I} \left\{ 1 + \frac{7n}{6} [\sinh(kx)/\tanh(kl/2) - \cosh(kx)] \left(1 - \bar{y}^3 - \frac{3I_s}{4I} \right) \right\}. \quad (27)$$

特别地,纯弯梁跨中部位的应力为

$$\sigma_{x=l/2} = \frac{zM_0}{I}. \quad (28)$$

即,纯弯梁在跨中部位没有剪力滞效应。

3 集中弯矩作用分析算例

图3所示简支箱梁,其材料为有机玻璃平均弹性模量为 $E = 3\,000\text{ MPa}$,Poisson(泊松)比为 $\mu = 0.385$,分别在跨中、1/4 部位和梁端作用集中弯矩 $M = 1\,000\text{ N}\cdot\text{mm}$,利用前述推导公式计算截面的剪力滞效应。为了比较本文计算理论公式的精度,与基于 ANSYS 有限元软件的 SHELL 63 单元板壳数值结果、以及初等梁理论计算结果进行比较。

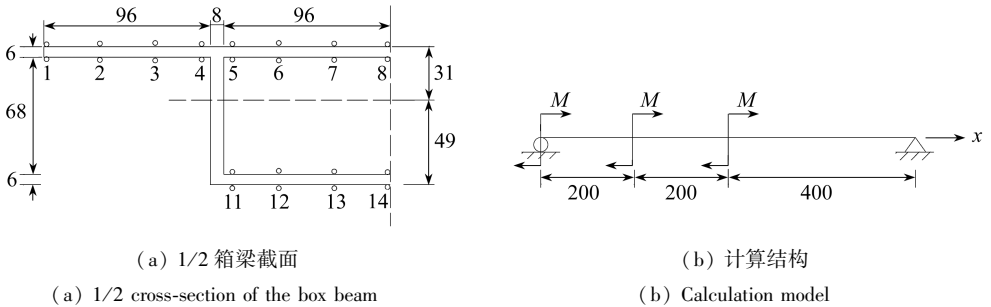


图3 算例箱梁结构(单位: mm)
Fig.3 The exemplary box girder(unit: mm)

1) 跨中集中弯矩

在跨中集中弯矩作用下,由于左右两侧截面应力大小相等、方向相反,故截面绝对应力为0,数值分析也得出了相同结论。为了比较本章解析方法和数值方法的精度,并消除数值分析中跨中加载局部效应,选择靠近跨中 32 mm 部位的顶、底板应力计算结果进行比较分析,如图4所示。

可以看出,板壳数值分析结果和理论解析解得到了基本相同的截面应力分布趋势,且二者数值吻合良好。从板壳数值分析结果可以看出,纵向应力由靠近腹板的压应力变为悬臂端部的拉应力,从而验证了本文解析解公式(24)中在 $y = 0$ 处剪力滞系数为负的趋势。

跨中作用集中弯矩时,顶板靠近腹板部位的纵向应力沿跨度的分布如图5所示。

可以看出,本文解析解得到的顶板靠近腹板部位的纵向应力沿跨度的分布与板壳数值解吻合良好。与初等梁计算结果相比,集中弯矩下的剪力滞效应在靠近跨中左右各 1/4 区域内较大,而在靠近两梁端区域较小。

2) 1/4 集中弯矩

在距离梁端 1/4 集中弯矩作用下,顶板靠近腹板部位纵向应力沿跨度的分布如图6所示。

同样,解析解与板壳数值解吻合良好.与初等梁计算结果相比,剪力滞效应在靠近集中弯矩左右两侧 $l/4$ 区域内较大,其余区域较小.

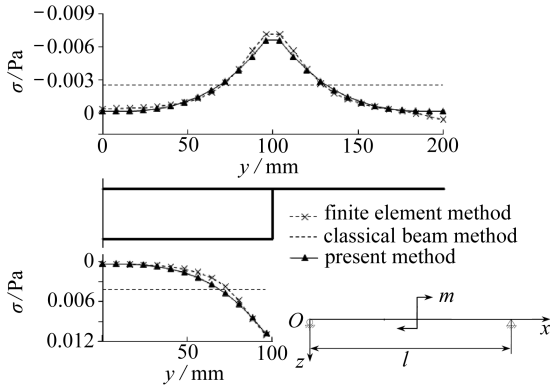


图4 跨中截面应力

Fig.4 Sectional stresses at the midspan

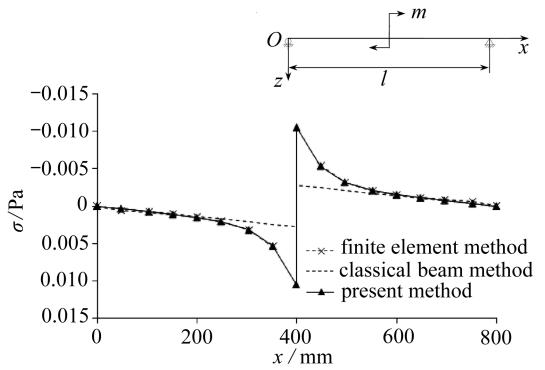


图5 跨中弯矩下纵向应力沿梁长分布

Fig.5 Longitudinal stress along the girder length under concentrated bending moment at the midspan

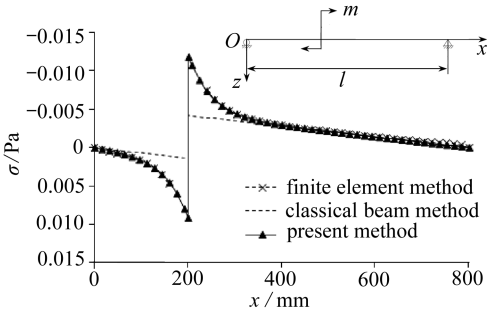


图6 $l/4$ 跨集中弯矩下纵向应力沿梁长分布

Fig.6 Longitudinal stress along the girder length under the concentrated bending moment at the $l/4$ span

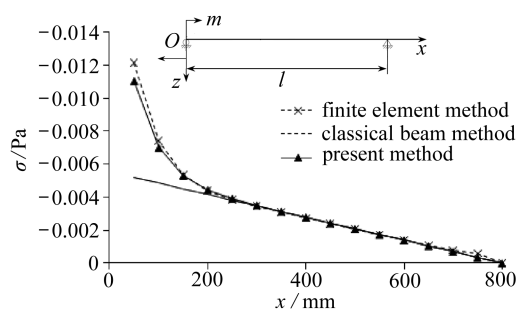


图7 梁端弯矩下纵向应力沿梁长分布

Fig.7 Longitudinal stress along the girder length under the concentrated bending moment at the span end

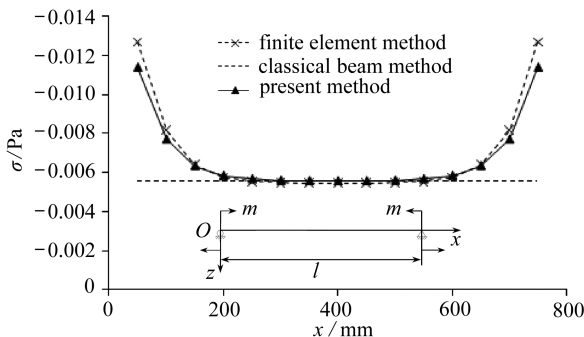


图8 纯弯梁纵向应力沿梁长分布

Fig.8 Longitudinal stress along the girder length under pure bending

3) 梁端集中弯矩

在梁端集中弯矩作用下,顶板靠近腹板部位的纵向应力沿跨度的分布如图7所示.

同样地,解析解与板壳数值解吻合良好.与初等梁计算结果相比,梁端集中弯矩下的剪力

滞效应在靠近集中弯矩作用侧 $l/4$ 区域内较大,而远离集中弯矩的其余区域较小。

4) 纯弯梁

两侧梁端集中弯矩作用下的纯弯梁,顶板靠近腹板部位的纵向应力沿跨度的分布如图 8 所示。

可以看出,解析解与板壳数值解吻合良好。与初等梁计算结果相比,剪力滞效应在靠近集中弯矩作用侧 $l/4$ 区域内较大,而远离集中弯矩的其余区域较小。

4 结 论

本文通过集中弯矩下简支梁的剪力滞效应分析,得出以下主要结论:

1) 基于变分法原理,可得出具有任意跨内和两端集中弯矩的简支梁,考虑剪力滞效应的纵向应力分布表达式,完善了简支梁剪力滞效应计算的荷载模式。

2) 通过基于板壳的数值算例表明,本文提出的集中弯矩下剪力滞计算结果与数值计算结果吻合良好,证明本文计算公式的正确性和分析精度。

3) 理论分析表明,简支梁集中弯矩部位的剪力滞效应最大,顶板最大和最小剪力滞系数分别为 n 和 $-n/6$ 。

4) 理论研究和数值分析表明,对简支梁结构,剪力滞效应在靠近集中弯矩左右两侧各 $l/4$ 范围内较大,而其余部位较小。

参考文献(References):

- [1] 胡海昌. 线弹性理论中的集中载荷[J]. 力学与实践, 1987, 9(1): 22-24. (HU Hai-chang. Concentrated loads in linear elastic theory[J]. *Mechanical in Application*, 1987, 9(1): 22-24. (in Chinese))
- [2] 刘鸿文. 材料力学[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2011. (LIU Hong-wen. *Material Mechanics*[M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2011. (in Chinese))
- [3] 卢同立. 力法的多重基本结构法[J]. 长沙铁道学院学报, 1987, 5(2): 122-127. (LU Tong-li. Multiple released structure method in force method[J]. *Journal of Changsha Railway Institute*, 1987, 5(2): 122-127. (in Chinese))
- [4] Oh B H, Jeon S-J. Realistic equivalent load methods in prestressed concrete structures[J]. *KCI Concrete Journal*, 2001, 13(1): 11-17.
- [5] 林元培. 斜拉桥[M]. 北京: 人民交通出版社, 2004. (LIN Yuan-pei. *Cable Stayed Bridges*[M]. Beijing: China Communications Press, 2004. (in Chinese))
- [6] 郭金琼, 房贞政, 郑振. 箱型梁设计理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2008. (GUO Jin-qiong, FANG Zhen-zheng, ZHENG Zhen. *Design Theory for Box Girder*[M]. Beijing: China Communications Press, 2008. (in Chinese))
- [7] Luo Q Z, Li Q S, Tang J. Shear lag in box girder bridges[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2002, 7(5): 308-313.
- [8] Zhou S J. Finite beam element considering shear-lag effect in box girder[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, 136(9): 1115-1122.
- [9] Chang S T. Shear lag effect in simply supported prestressed concrete box girder[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2004, 9(2): 178-184.
- [10] Lertsima C, Chaisomphob T, Yamaguchi E. Stress concentration due to shear lag in simply supported box girders[J]. *Engineering Structures*, 2004, 26(8): 1093-1101.

- [11] 张元海, 王来林, 李乔. 箱型梁剪滞效应分析的一维有限元法及其应用[J]. 土木工程学报, 2010, **43**(8): 44-49. (ZHANG Yuan-hai, WANG Lai-lin, LI Qiao. One-dimensional finite element method and its application for the analysis of shear lag effect in box girders[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2010, **43**(8): 44-49. (in Chinese))
- [12] ZHOU Shi-jun. Shear lag analysis in prestressed concrete box girders[J]. *Journal of Bridge Engineering*, 2011, **16**(4): 500-512.
- [13] 蔺鹏臻, 周世军. 基于剪切变形规律的箱梁剪力滞效应研究[J]. 铁道学报, 2011, **33**(4): 100-104. (LIN Peng-zhen, ZHOU Shi-jun. Analysis on shear-lag effect of box girders based on flange-slab shear deformation law[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2011, **33**(4): 100-104. (in Chinese))

Analytic Method for Shear Lag Effect of Box Girders Under Concentrated Bending Moments

LIN Peng-zhen¹, YANG Zi-jiang², SUN Li-xiang¹, JI Wei²

- (1. *Key Laboratory of Road & Bridge and Underground Engineering of Gansu Province, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, P.R.China*;
2. *School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, P.R.China*)

Abstract: For simply supported box girders under concentrated bending moments, general analytic solutions to shear lag effect were presented based on the energy variational principle. Formulae for shear lag effect were given for several typical cases of one bending moment acting on the girder span interior, one end, or both ends. For an example box girder, shear lag effect was calculated respectively in the 3 cases of concentrated bending moment applied. The analytic results were compared with those of the finite shell element method. It's shown that the presented analytic method has high accuracy in the calculation of box girder shear lag effect in comparison with the finite element method. Where there exists a concentrated bending moment applied on a simply supported box girder, there occurs sharp shear lag effect.

Key words: box girder; shear lag; concentrated bending moment; analytic solution

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(51208242; 51368031); China Postdoctoral Science Foundation(2012M521815)