

# 指数同伦法对 Cauchy 条件下变系数 Burgers 方程的解析与数值分析\*

邹丽<sup>1,2</sup>, 王振<sup>3</sup>, 宗智<sup>1,2</sup>, 王喜军<sup>1,2</sup>, 张朔<sup>1,4</sup>

- (1. 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116085;
- 2. 大连理工大学 船舶工程学院, 辽宁 大连 116085;
- 3. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116085;
- 4. 大连理工大学 航空航天学院, 辽宁 大连 116085)

**摘要:** 使用近似解析法来研究在给定初始条件和边界条件下变系数 Burgers 方程,引入一种新式同伦来解决微分方程中由变系数带来的问题,这种新同伦比传统方法计算更高效,并能给出时域上的一致解析表达式.分别计算了有限空间域上变系数 Burgers 方程的解析解,讨论了在有限空间区域上激波的形成,并对所得解析解进行了范数意义下收敛性研究的探索.基于 Lie(李)变换群理论,研究了该方程的对称性质,给出了其无穷小生成子,守恒律和群不变解.文中给出的解是从非线性偏微分方程中直接得到的,未经过行波变换.通过“*h*-curve”准则探讨了近似解的收敛性.通过有限差分法进行直接数值模拟,已验证该方法的准确性和有效性.

**关键词:** 变系数 Burgers 方程; 解析解; 指数同伦法

**中图分类号:** O242.1      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.07.007

## 引 言

非线性抛物线方程的 Cauchy 问题为

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = e^t u_{xx}, \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (1)$$

可以从非定常的 Navier-Stokes 方程中得到

$$U_t + C(U)U_x = Re^{-1}D_1(U) + x_p^{-1}D_2(U, x). \quad (2)$$

上式描述了一维气体的非定常球对称运动,其中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad C(U) = \begin{pmatrix} \varepsilon v & 1 + \varepsilon \rho & 0 \\ \frac{1 + \varepsilon T}{1 + \varepsilon \rho} & \varepsilon v & 1 + \varepsilon T \\ 0 & 0 & \varepsilon v \end{pmatrix}, \quad (3)$$

\* 收稿日期: 2014-01-10; 修订日期: 2014-05-15

**基金项目:** 国家自然科学基金(51379033; 51221961; 51239002; 51309040); 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2013CB036101); 中央高校基本科研业务费专项资金(DUTBJS01)

**作者简介:** 邹丽(1981—),女,辽宁盘锦人,副教授,博士(通讯作者. Tel: +86-411-84706373; E-mail: lizou@dlut.edu.cn).

$$D_1(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} + v & 0 \\ \frac{\gamma - 1}{P_r} & 0 & \frac{\gamma}{P_r} \end{pmatrix} U_{xx}, D_2(U, x) = -\frac{jx_p}{x} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon\rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

从式(3)中可以通过摄动法扩展  $U$ :

$$U = U_c + \varepsilon(U_0 + \varepsilon U_1 + \cdots + \mu_1 U_2 + \mu_2 U_3 + \cdots), \mu_1 = \frac{1}{Re}, \mu_2 = \frac{1}{x_p}. \quad (5)$$

引入以下慢变量:

$$\tau_0 = t, \tau_1 = \varepsilon t, \tau_2 = \mu_1 t, \tau_3 = \mu_2 t, \quad (6)$$

最后得到如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \mu_2 \frac{\partial}{\partial \tau_3}. \quad (7)$$

这时得到一个奇异方程:

$$W_t + WW_x + \frac{W}{2t} = \varepsilon W_{xx}, \quad (8)$$

其中  $x, t$  是新的空间-时间变量,  $W$  是个标量, 另取

$$u = tW, t' = \ln t. \quad (9)$$

用  $t'$  代换  $t$ , 得到广义 Burgers 粘性方程<sup>[1]</sup>:

$$u_t + uu_x - \varepsilon e^{t'} u_{xx} = 0. \quad (10)$$

该方程是有界振幅声波在管道中的管道线性化之后的传播模型, 其中  $u$  是声速变量,  $\varepsilon e^{t'}$  取决于所选管道<sup>[2-3]</sup>. 文献[4]中给出了黏性广义 Burgers 方程全局存在且唯一. 文中同时给出了广义 Burgers 方程在特定初始条件下的解的渐近性. Scott<sup>[2]</sup>证明了当  $t \rightarrow \infty$  时式(10)的解在  $L^\infty$  范数上收敛于热量方程的解. 一些变系数 Burgers 方程<sup>[5-9]</sup>可以转变成常系数 Burgers 方程, 见文献[10-11], 但式(10)并不属于此类情况, 也就是说式(10)不能线性化.

## 1 变系数 Burgers 方程的解析解

### 1.1 变系数 Burgers 方程的新式同伦

为了构造广义 Burgers 方程的近似解析解, 引入如下新式的同伦方程. 与传统的同伦不同, 广义的同伦能够提供一族级数解, 其收敛区域依赖于辅助参数和辅助函数, 它提供了一条调节和控制级数解收敛区域和收敛速度的简便途径. 传统的同伦分析方法求解常系数非线性问题, 本文克服了变系数问题求解的困难, 将辅助变量  $q$  与非线性变系数 Burgers 方程中的指数结合, 得到了如式(11)所示的指数同伦形式, 这是在以往研究中没有尝试过的. 同伦系数  $q$  不仅出现在 Liao<sup>[12]</sup>所述的一般同伦中的  $q$  和  $1 - q$ , 也出现在系数  $e^{qt}$  中的上标. 同伦方程由如下方程来描述<sup>[13-22]</sup>:

$$H(x, t, q) = (1 - q)L(u) - q[u_t + uu_x - \varepsilon e^{qt} u_{xx}], \quad (11)$$

其中  $L(u) = \partial u / \partial t$  是线性算子, 用来通过对  $t$  多项式求近似解析解. 已知当  $q = 0$  时, 式(11)是线性化方程  $L(u) = 0$ , 但当  $q = 1$ , 式(11)是广义 Burgers 方程. 也就是说, 当  $q$  在 0 和 1 之间变化时, 式(11)关于  $q$  的解会从  $L(u) = 0$  的解变为广义 Burgers 方程的解.

将式(11)的解扩充为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) q^n, \quad (12)$$

将变系数 Taylor(泰勒)展开:

$$e^{qt} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(qt)^j}{j!}, \tag{13}$$

可知对所有实数  $q$  和  $t$  级数解都是收敛的。

将式(12)和式(13)代入式(11)得到一个关于  $q$  的多项式,使用  $L = \partial/\partial t$  算子也会得到一个关于  $q$  的线性偏微分方程:

$$\begin{aligned} (1-q)L\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n q^n\right) - hq\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,t} q^n + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n u_j u_{n-j,x} q^n - \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} u_{n-j,xx} q^n\right) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} L(u_n) q^n - \sum_{n=0}^{\infty} L(u_n) q^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} hq^{n+1} \left(u_{n,t} + \sum_{j=0}^n u_j u_{n-j,x} - \varepsilon \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} u_{n-j,xx}\right) = \\ L(u_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(L(u_{n+1}) - L(u_n) - hu_{n,t} + h \sum_{j=0}^n u_j u_{n-j,x} - h\varepsilon \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} u_{n-j,xx}\right) q^{n+1}. \end{aligned} \tag{14}$$

把  $u_n(x,t)$  简写为  $u_n$ ,若  $u_n(x,t)$  关于  $t$  独立,由  $L = \partial/\partial t$  可得  $L(u_0) = 0$ .

所有  $q^n$  的系数都是普通微分方程,也被称为高阶形变方程。

$$L(u_{n+1}) - \chi_n L(u_n) = h \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{j=0}^n u_j u_{n-j,x} - \varepsilon \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} u_{n-j,xx} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{15}$$

其中

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ 1, & n \neq 1. \end{cases} \tag{16}$$

很明显所有高阶形变方程在低阶近似解的表达式都是含有非齐次项的线性微分方程.所有这些方程若知初始  $u_0$  都可以一一求解。

$$u_{n+1} = \chi_n u_n + hL^{-1} \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} + \sum_{j=0}^n u_j u_{n-j,x} - \varepsilon \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} u_{n-j,xx} \right). \tag{17}$$

由式(12)和式(11),在式(12)中取  $q = 1$  可得广义 Burgers 方程的近似解析解。

注 这里应该指出也有一些别的同伦方法可用于变系数 Burgers 方程.比如,常同伦也适用此方程,但是指数方程  $e^t$  将会出现在线性微分方程中.所以如 Liao<sup>[12]</sup>所述传统的同伦方法不如指数同伦对此类问题高效.将指数部分  $e^t$  替换为它的缩减项也可行,那么常同伦也适用于变系数 Burgers 方程.然而,并未考虑近似解的阶数.指数同伦与其它 3 种同伦相比更高效,易操作。

### 1.2 有限空间域的解析解

在如下有限空间域的初始边界条件考虑广义 Burgers 方程式(10):

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(\pi x), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in [0,+\infty), \end{cases} \tag{18}$$

这仍是一个对 Burgers 方程的经典初始边界条件。

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0. \tag{19}$$

很多问题都可以用 Burgers 方程描述<sup>[23]</sup>,比如文献[24-25]中,Cole 等给出了式(19)在式(18)的初始边界下的解析解:

$$u(x,t) = -2\nu [\ln f(x,t)]_x = -2\nu \frac{f_x(x,t)}{f(x,t)}, \tag{20}$$

其中

$$f(x,t) = \int_0^1 e^{-\frac{1-\cos(\pi x)}{2\nu}} dx + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \int_0^1 e^{-\frac{1-\cos(\pi x)}{2\nu}} \cos(n\pi x) dx e^{-n^2 \pi^2 \nu t} \cos(n\pi x). \tag{21}$$

近似解  $u_0$  的首项应满足线性微分方程

$$L(u_0) = 0. \quad (22)$$

初始条件式 (18) 关于笔者定义的  $L = \partial/\partial t$  独立.

根据式 (17) 的递推关系和式 (18) 的初始及边界条件, 可得

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = h\pi t \sin(\pi t) (\cos(\pi x) + \varepsilon \pi), \\ u_2 = \frac{1}{2} h\pi \sin(\pi x) [3h\pi \cos^2(\pi x)t - h\pi t + 6h\pi^2 \cos(\pi x)\varepsilon t + \\ \quad h\pi^3 \varepsilon^2 t + \pi \varepsilon t + 2h\cos(\pi x) + 2h\varepsilon \pi + 2\cos(\pi x) + 2\varepsilon \pi] t, \\ u_3 = \frac{1}{6} h\pi \sin(\pi x) [h^2 \pi^5 \varepsilon^3 t^2 + 10h\pi^2 \varepsilon \cos(\pi x)t^2 + 51h^2 \pi^3 \cos^2(\pi x)\varepsilon t^2 + \\ \quad 28h^2 \pi^4 \cos(\pi x)\varepsilon^2 t^2 + 3h\pi^3 \varepsilon^2 t^2 + \pi \varepsilon t^2 - 15h^2 \pi^3 \varepsilon t^2 + \\ \quad 16h^2 \pi^2 \cos^3(\pi x)t^2 - 10h^2 \pi^2 \cos(\pi x)t^2 - 6h^2 \pi t + \\ \quad 18h^2 \pi \cos^2(\pi x)t + 18h\pi \cos^2(\pi x)t + 6h^2 \pi^3 \varepsilon^2 t + \\ \quad 36h^2 \pi^2 \cos(\pi x)\varepsilon t - 6h\pi t + 6h^2 \pi^3 \varepsilon^2 t + 3\pi h\varepsilon t + 3\pi \varepsilon t + \\ \quad 6\cos(\pi x) + 36h\pi^2 \cos(\pi x)\varepsilon t + 12h\cos(\pi x) + 6h^2 \varepsilon \pi + 6h^2 \cos(\pi x) + \\ \quad 6\varepsilon \pi + 12h\varepsilon \pi] t, \\ \dots \end{array} \right. \quad (23)$$

用如下方式计算解析解的所有项. 如果得到近似解的更多项, 就得到广义 Burgers 方程更优更精确的近似解. 对式 (18) 中的初始条件, 计算 15 阶的近似解. 这里为方便起见, 仅给出 3 阶近似解. 图 1 和图 2 展示了由同伦法得到的式 (11) 的 15 阶近似解. 图 1 是解析解的三维效果图, 其中收敛控制系数  $h = -0.3$  和  $\varepsilon = 0.1$ .

很明显, 解随时间的推移而衰减.  $t$  值越大,  $u(x, t)$  在相同参数下的最大值越小. 图 2 给出图 1 在不同时间  $t = 0.1, 0.2, 0.4$  的横截面图. 可以更直观地看出解析解随空间轴, 特别在  $[0.6, 1]$  间的变化. 图 3 显示了数值解和我们给出的解析解之间的对比. 很明显数值解和解析解吻合得很好, 不考虑有限差分法得到高精度数值解的时间耗费, 只把数值解法作为参考解.

实际上, 广义 Burgers 方程在初始边界条件式 (18) 下的解和 Burgers 方程式 (19) 在同一初始条件下的解具有相同特性和行为特征, 含有常系数和变系数 Burgers 方程以时间的指数趋向于 0. 广义 Burgers 方程较常系数 Burgers 方程在相同  $\varepsilon$  值速度更快.

如果选择较大的数值, 广义 Burgers 方程的解衰减得更快. 可以先固定一个点, 画出在该点和  $\varepsilon$  取值下得到的解的关系如图 4 (圈点表示 Padé (帕德) 逼近近似关系, 实线表示 15 阶近似解下  $\varepsilon$  和  $u(0.1, 0.5)$  的关系). 从图中可以看出  $u(x, t)$  的投影在点 (0.1, 0.5) 处随  $\varepsilon$  从 0 增加到 3 时迅速减少. 在如下范式下也能发现该趋势:

$$\|u(x, t)\| = \int_a^b \int_c^d u(t, x)^2 dx dt, \quad (24)$$

该范数对  $\varepsilon$  有相同性质.

图 5 给出在点 (0.5, 0.1) 和 (0.8, 0.2) 参数  $h$  的图示, 也在同伦分析法中被称为“ $h$ -curve”. 易见“ $h$ -curve”对点 (0.5, 0.1) 和 (0.8, 0.2) 在  $[-1, 0]$  区间是平滑的. 这意味着根据 Liao<sup>[12]</sup> 的理论解是收敛的. 最近, Odibat 结合“ $h$ -curve”给出判定解是否收敛的准则. 文中说存在  $0 < \gamma < 1$  使得  $\|\phi_{k+1}\| \leq \gamma \|\phi_k\|$ , 那么近似解是收敛的<sup>[26]</sup>. 图 6 给出不同  $k$  对应的参数  $\gamma$ , 容易发现 14 个  $\gamma$  都小于单位 1, 这意味着级数解应该是收敛的, 最大截断误差可以估测出来.

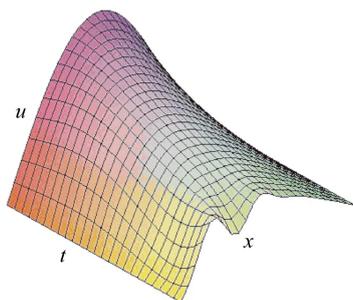


图 1 当  $\varepsilon = 0.1$ , 满足边界条件(18)和方程(10)的 15 阶近似解析解

Fig.1 3D shape of the 15th approximate analytical solution to (10) under initial conditions (18) for  $\varepsilon = 0.1$

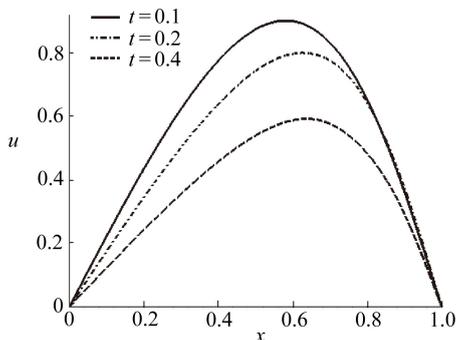


图 2 当  $\varepsilon = 0.1$ , 满足边界条件(18)的式(10)  $t = 0.1, 0.2, 0.4$  时解的演化

Fig.2 Evolution of the solution to(10) under initial conditions (18) for  $\varepsilon = 0.1$  and  $t = 0.1, 0.2, 0.4$

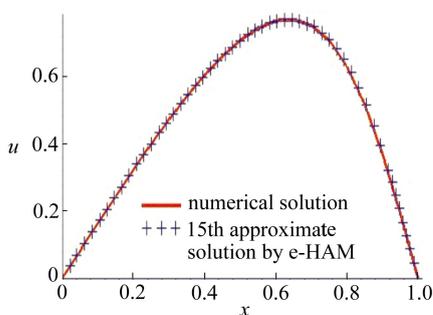


图 3  $t = 0.23$  时, 15 阶近似解析解与数值解的对比图

Fig.3 Comparison between the 15th approximate analytical solution and the numerical solution for  $t = 0.23$

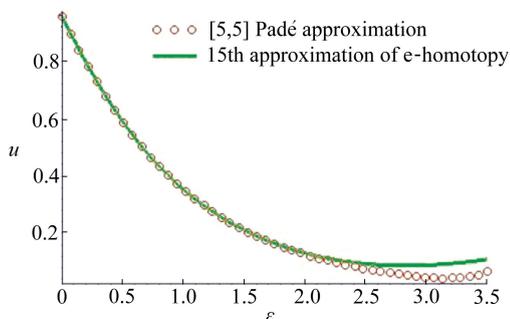


图 4 当  $h = -0.3$  时  $\varepsilon$  和  $u(0.1, 0.5)$  的关系图

Fig.4  $\varepsilon$  vs.  $u(0.1, 0.5)$  graph for  $h = -0.3$

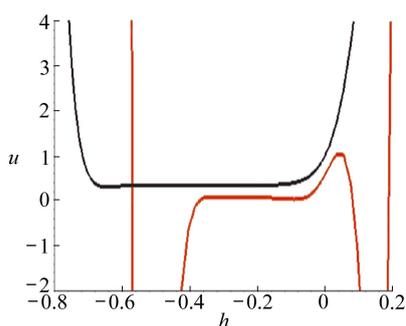


图 5 当  $\varepsilon = 0.1$ , 黑线和红线分别表示在  $(x, t) = (0.5, 0.1)$  和  $(x, t) = (0.8, 0.2)$  时收敛参数  $h$  的图形

Fig.5 Convergence parameter  $h$  for different points: black line for  $(x, t) = (0.5, 0.1)$  and red line for  $(x, t) = (0.8, 0.2)$  for  $\varepsilon = 0.1$

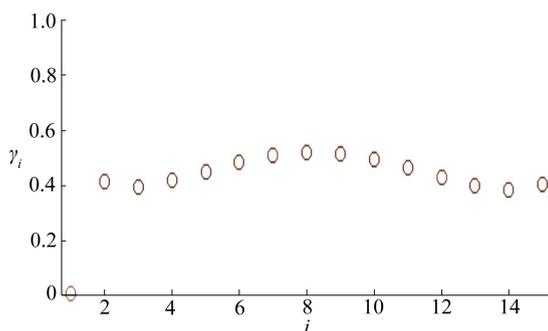


图 6 当  $h = -0.3, x = 0.5, \gamma_i$  在  $t \in [0, 0.3]$  时的图形,  $i$  取 0 到 15

Fig.6  $\gamma_i$  vs.  $i$  graph of  $\gamma_i$  for  $t \in [0, 0.3]$ ,  $h = -0.3, x = 0.5$  and  $i$  from 0 to 15

### 1.3 激波的形成

常系数 Burgers 方程是典型的允许激波产生的非线性方程, 变系数 Burgers 方程类似于常

系数 Burgers 方程也 同样有激波产生.非线性项  $uu_x$  是变系数 Burgers 方程和常系数 Burgers 方程中激波的成因.

如果另外给定初始边界条件

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x), u(0, t) = 0, u(1, t) = 0. \tag{25}$$

需要指出条件式 (25) 仅仅是替换式 (18) 的初始条件.实际上,两种初始条件的区别只在于在  $x$  上的伸缩变换.换句话说,两种条件有不同的周期,式 (18) 的周期是  $2\pi$ ,而式 (25) 的周期是  $\pi$ .

对式 (10) 使用同样的步骤和同样的同伦指数及式 (18) 所示的初始边界条件.图 7 和图 8 显示了  $\varepsilon = 0.02$  时同伦指数法得到的解析解.图 7 显示了激波的形成,图中 3 条线分别表示  $t = 0, 0.1, 0.2$  时的波像图,波像起初是简谐波,随时间而变陡.由于非线性项  $uu_x$  是激波 的成因, $\varepsilon$  越小,线性项  $\varepsilon e'uu_x$  的影响也越小.由于扩散是主要现象,所以波像会迅速衰减,激波现象也不明显.

考虑线性项  $\varepsilon e'uu_x$  的形式,发现它包含  $e'$ ,所以  $\varepsilon$  等同于一个小量,由于  $e'$  随时间变大,线性项  $\varepsilon e'uu_x$  随时间影响也变大.所以只有当  $\varepsilon$  和  $t$  都是小量时会有激波产生.显而易见在变系数 Burgers 方程的二维图示中短时间存在的激波的产生,较长时间看不出扩散现象的作用,图 9 中数值模拟和笔者的分析吻合得很好.

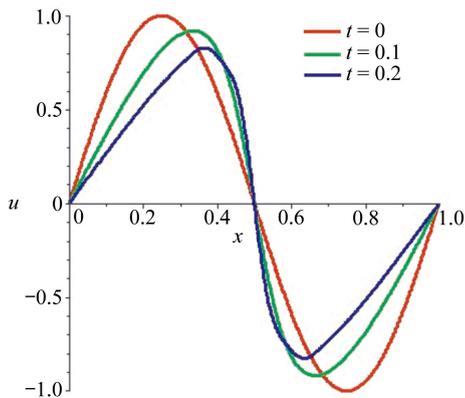


图 7 当  $\varepsilon = 0.02$ ,在不同时刻  $t = 0, 0.1, 0.2$  下,由指数同伦描述激波的形成过程  
Fig.7 Shock wave formation described with the exponential homotopy for  $\varepsilon = 0.02$  at different moments of  $t = 0, 0.1, 0.2$

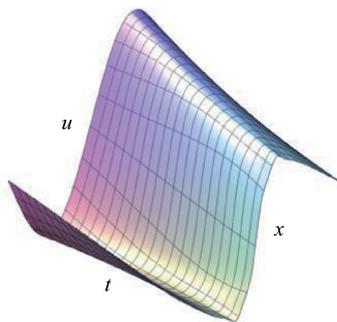


图 8 当  $\varepsilon = 0.02$ ,时间从 0 到 0.2 时变系数 Burgers 方程的三维图形  
Fig.8 3D shape of VcBurgers equation for  $\varepsilon = 0.02$  and  $t$  from 0 to 0.2

## 2 对称,守恒律和不变解

不考虑微分方程的初边值条件,有时也能求得其特解,Lie 对称法是研究常微分方程和偏微分方程的重要分析方法<sup>[26-29]</sup>,同时该方法也是求解微分方程精确解的有力工具.考虑如下无穷小单参数 Lie 变换群  $(x, t, u)$ :

$$\begin{cases} x \rightarrow X = x + a\tau(x, t, u), \\ t \rightarrow T = t + a\xi(x, t, u), \\ u \rightarrow U = u + a\eta(x, t, u), \end{cases} \tag{26}$$

其中

$$X = f(t, x, u, a), T = g(t, x, u, a), U = h(t, x, u, a). \quad (27)$$

对群变换参数  $a$  分别进行 Taylor 展开, 保留  $a$  为线性项. 无穷小变换提供  $G$  群的生成法则, 即相应向量场为

$$X = \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

该法则也被称为和变系数 Burgers 方程(10)相容的算子或称为式(10)的无穷小生成子. 实际上, 式(10)可被表示成

$$\Delta = u_t + uu_x - \varepsilon e^t u_{xx} = 0.$$

该算子的一阶和二阶微分延拓可表示为

$$p_r^{(2)} X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta' \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}, \quad (28)$$

其中  $\tau, \xi, \eta$  是  $(x, t, u)$  的函数,  $\eta', \eta^x, \eta^{xx}$  可由  $\tau, \xi, \eta$  确定, 延拓算子的约束条件为

$$p_r^{(2)} X(\Delta) |_{\Delta=0} = 0, \quad (29)$$

$\tau, \xi, \eta$  可由上式确定. 经过计算, 可以得到  $\tau, \xi, \eta$  的表达式为

$$\tau = 2C_1, \quad \xi = C_3 t + C_1 x + C_2, \quad \eta = C_3 + C_1 u, \quad (30)$$

其中包含 3 个自变量  $C_i$ . 即变系数 Burgers 方程有如下 3 个无穷小生成子:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_3 = 2 \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}. \end{cases} \quad (31)$$

按照类似的方法, 可得到变系数 Burgers 方程(8)容许下列的无穷小变换:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \\ X_2 = \ln(t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial u}, \\ X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}. \end{cases}$$

变系数 Burgers 方程的守恒形式简单, 为

$$U_t + \left( \frac{U^2}{2} + e^t U_x \right)_x = 0, \quad (32)$$

基于 Lie 群变换理论, 可得其不变解为

$$u(x, t) = \frac{x + C}{t}, \quad (33)$$

其中  $C$  是任意常数. 这也是变系数 Burgers 方程的相似解.

需要指出一些文章在研究变系数 Burgers 方程时, 仅通过解析手段, 研究整个特性和构造方法所得出的精确解<sup>[30-33]</sup>. 这些文章重点在变系数 Burgers 方程的统一格式. 至于具体如式

(10) 的 Burgers 方程的表达式, 只有少数成果. 变系数 Burgers 方程与其系数的约束一起出现, 而系数  $e^t$  并不满足那些文章所述的约束.

### 3 直接数值模拟

本节将给出变系数 Burgers 方程在不同初值和边界条件下的直接数值模拟. 数值模拟可以验证同伦指数表示的解析解的收敛性和有效性. 数值解还能显示解的长时间行为特性. 围绕变系数 Burgers 方程已经有很多工作<sup>[34-37]</sup>.

首先, 将变系数 Burgers 方程 (10) 重写为等价守恒形式:

$$u_t + \left( \frac{u^2}{2} \right)_x - \varepsilon e^t u_{xx} = 0. \quad (34)$$

选择合适的解来逼近这个方程, 而不是之前的式 (10).

解  $u(x, t)$  通过在网  $(x_j, t^n)$  上的网方程  $u_j^n$  来逼近, 其中  $x_j = j\Delta x, t^n = n\Delta t, j = 0, 1, \dots, M, n = 0, 1, \dots, N, x$  栅栏上的点间距为  $\Delta x$ , 取值范围为 1 到  $M$ ; 下标  $j$  用来表示第  $i$  个网格点上的函数.

显式向后的差分近似法用于对时间  $t$ , 中心法用于对空间  $x, u_j^n$  近似  $u(x_j, t^n)$ ,

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{(u_{j+1}^{n-1})^2 - (u_{j-1}^{n-1})^2}{4\Delta x} - \varepsilon e^{n\Delta t} \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} = 0. \quad (35)$$

对定常时间节点  $t^n = n\Delta t$  需要求解系数可写成矩阵形式的线性代数方程组. 实际上, 对每级时间可写成更直观的形式

$$a^n u_{j-1}^n + b^n u_j^n + c^n u_{j+1}^n = f^n, \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} a^n &= -\Delta t \varepsilon e^{n\Delta t}, \quad b^n = 2\Delta t e^{n\Delta t} + \Delta x^2, \\ c^n &= a^n, \quad f^n = u_j^{n-1} \Delta x^2 + \frac{\Delta x \Delta t}{4} [(u_{j+1}^{n-1})^2 - (u_{j-1}^{n-1})^2]. \end{aligned}$$

所以, 给定时间级, 我们可以求解式 (36) 所给的可信度低的线性代数方程, 进而同样的步骤求解下一时间级.

在本文的计算实例中, 对式 (34) 选取  $M = 64, N = 2^{10}$ , 以及式 (25) 作为初始和边界条件. 参数  $\varepsilon = 0.02$ , 式 (35) 中的差分近似用于模拟激波的产生. 图 9 和图 10 给出了变系数 Burgers 方程的数值结果. 图 9 描述了  $(x, t)$  在  $[0, 1] \times [0, 2]$  区间的点. 易知激波持续时间较短, 然后就很快扩散至平滑而不可见. 在图 10 中对图 9 不同时间点数值解横断处理. 图 10 给出在  $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.6$  时,  $x = 0.2$  处相应的 5 条曲线从上到下的取值. 从图中可以看出当  $t = 0.2$ , 波线在  $x = 0.5$  时达到最高点. 波像随时间衰减在  $x = 0.5$  时斜率仍在下降. 最终, 波像在充分长的时间内趋于 0, 如图 9 所示.

在式 (18) 所给的初始和边界条件下, 也可以按上面的有限差分法来得到数值结果. 图 11 和 12 分别给出整体视图和  $\varepsilon = 0.02$  时, 随时间变化的波动图. 容易看出数值解和 1.2 小节的解析解吻合, 至少具有相同的趋势. 变系数 Burgers 方程随时间变陡, 然后达到最大值点时波向图也随时间变得越来越平直. 图 12 给出在  $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.2, x = 0.4$  处相应曲线从上到下的取值. 可以发现  $t = 0.4$  时对应的曲线在这些曲线里在  $x = 1$  附近取得最大斜率. 不同时间下  $x$

$= 1$  附近的波线斜率是向上凸的。

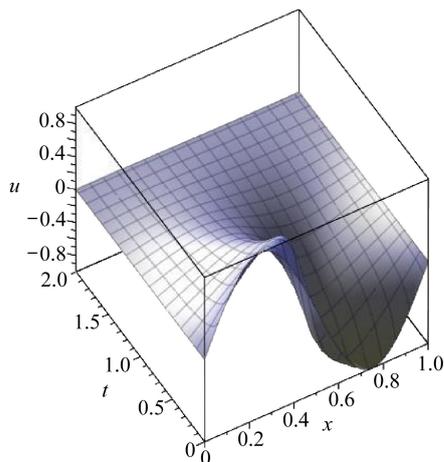


图 9 当  $\varepsilon = 0.02$ , VcBurgers 方程的数值模拟图

Fig.9 Numerical simulation of the VcBurgers equation for  $\varepsilon = 0.02$

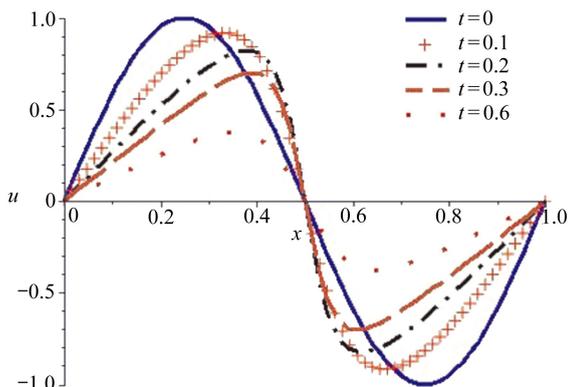


图 10 当  $\varepsilon = 0.02$ , 数值模拟的交集在  $x = 0.2$  处, 在  $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.6$  时, 从顶端到底端的相应曲线

Fig.10 Intersection of the numerical simulation at different moments of  $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.6$  corresponding to the lines from top to bottom for  $x = 0.2$  and  $\varepsilon = 0.02$

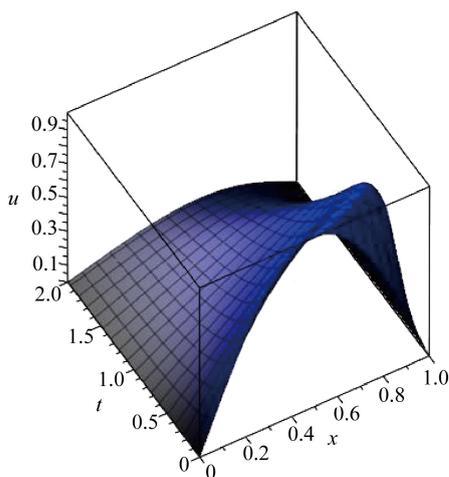


图 11 当  $\varepsilon = 0.02$ , 在初始条件和边界条件式 (20) 下变系数 Burgers 方程的数值模拟图

Fig.11 Numerical simulation of the VcBurgers equation for  $\varepsilon = 0.02$  under initial and boundary conditions (20)

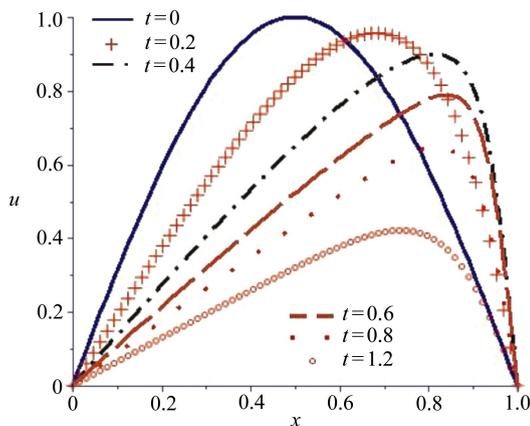


图 12 当  $\varepsilon = 0.02$ , 数值模拟的交集在  $x = 0.4$  处,  $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.2$  时, 从顶端到底端的相应曲线

Fig.12 Intersection of the numerical simulation at different moments of  $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.2$  corresponding to the lines from top to bottom for  $x = 0.4$  and  $\varepsilon = 0.02$

## 4 结 论

提出了一种新的同伦形式,即同伦指数,通过同伦指数可求解变系数 Burgers 方程的解析解.通过常同伦分析法的启发,本文进一步构造了一个算法,逐步形成截断级数形式的显式解

析解.同时,讨论了理论意义上“ $h$ -curve”方法和 Cauchy 序列得到的级数解的收敛性.给出了两个算例,讨论了激波形成的显式解析解,包括小参数  $\varepsilon$  和时间变量系数  $e'$  的关系.本文还利用有限差分法对激波的形成进行了直接数值模拟,也研究了对称守恒准则和变系数 Burgers 方程的不变解.还应用传统的 Lie 群方法研究变系数 Burgers 方程,以探讨变换属性.

### 参考文献(References):

- [1] Sauchder P L. *Nonlinear Diffusive Waves*[M]. New York: Cambridge University Press, 1987.
- [2] Scott J F. The long time asymptotics of solutions to the generalized Burgers equation[J]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1981, **373**(1755): 443-456.
- [3] Crighton D G, Scott J F. Asymptotic solution of model equations in nonlinear acoustic[J]. *Phil Trans R Soc Lond, Series A*, 1979, **292**(1389): 101-134.
- [4] ZHANG Hui. Global existence and asymptotic behavior of the solution of a generalized Burger's equation with viscosity[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2001, **41**(5/6): 589-596.
- [5] 黄磊, 孙建安, 豆福全, 段文山, 刘兴霞. (3+1)维非线性 Burgers 系统的新的分离变量解及其局域激发结构与分形结构[J]. *物理学报*, 2007, **56**(2): 611-619. (HUANG Lei, SUN Jian-an, DOU Fu-quan, DUAN Wen-shan, LIU Xing-xia. New variable separation solutions, localized structures and fractals in the (3+1)-dimensional nonlinear Burgers system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2007, **56**(2): 611-619. (in Chinese))
- [6] 石玉仁, 吕克璞, 段文山, 杨红娟. 变系数 Burgers 方程的精确解[J]. *兰州大学学报(自然科学版)*, 2005, **41**(4): 107-111. (SHI Yu-ren, LÜ Ke-pu, DUAN Wen-shan, YANG Hong-juan. Exact solutions to Burgers equation with variable coefficients[J]. *Journal of Lanzhou University(Natural Sciences)*, 2005, **41**(4): 107-111. (in Chinese))
- [7] 史秀珍, 斯仁道尔吉. 变系数 Burgers 方程与 KdV-Burgers 方程的试探函数解[J]. *内蒙古大学学报(自然科学版)*, 2012, **43**(1): 23-26. (SHI Xiu-zhen, Sirendaoerji. Trial function solutions of the variable coefficients Burgers equation and the KdV-Burgers equation[J]. *Journal of Inner Mongolia University(Natural Sciences)*, 2012, **43**(1): 23-26. (in Chinese))
- [8] 石玉仁, 汪映海, 杨红娟, 吕克璞, 段文山. 广义变系数 Burgers 方程的精确解[J]. *华东师范大学学报(自然科学版)*, 2006, **2006**(5): 27-33. (SHI Yu-ren, WANG Ying-hai, YANG Hong-juan, LÜ Ke-pu, DUAN Wen-shan. Exact solution of generalized Burgers' equation with variable coefficients[J]. *Journal of East China Normal University(Natural Sciences)*, 2006, **2006**(5): 27-33. (in Chinese))
- [9] 鲜大权, 戴正德. 应用指数函数法求解变系数耦合 Burgers 系统[J]. *应用数学学报*, 2010, **33**(3): 559-565. (XIAN Da-quan, DAI Zheng-de. Application of exp-function method to coupled Burgers equation with variable coefficients[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2010, **33**(3): 559-565. (in Chinese))
- [10] Vaganan B M, Jeyalakshmi T. Generalized Burgers equations transformable to the Burgers equation[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2011, **127**(3): 221-220.
- [11] QU Chang-zheng, WANG Ai-qin. The complete integrability of variable-coefficient Burgers equations[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 1996, **26**(3): 369-372.
- [12] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method*[M]. London:

- Chapman & Hall/CRC, 2004.
- [13] 姜丙利, 柳银萍. 带预测参数的同伦分析方法及其在两个非线性系统中的应用[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2013, **2013**(3): 131-139, 148. (JIANG Bing-li, LIU Yin-ping. Predictor homotopy analysis method and its application to two nonlinear systems[J]. *Journal of East China Normal University(Natural Sciences)*, 2013, **2013**(3): 131-139, 148. (in Chinese))
- [14] 宋辉, 李芬, 徐献芝. 电池系统建模中 Butler-Volmer 方程的同伦分析求解[J]. 应用数学和力学, 2013, **34**(4): 373-382. (SONG Hui, LI Fen, XU Xian-zhi. Analytical solution of Butler-Volmer equation in battery system modeling[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**(4): 373-382. (in Chinese))
- [15] S·侯斯纳因, A·梅姆德, A·阿里. 二阶流体在旋转坐标系中的三维管道流动[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(3): 280-291. (Hussnain S, Mehmood A, Ali A. Three dimensional channel flow of second grade fluid in a rotating frame[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(3): 280-291. (in Chinese))
- [16] 韩祥临, 欧阳成, 宋涛, 戴孙圣. 交通拥堵迁移问题的同伦分析法[J]. 物理学报, 2013, **62**(17): 170203. (HAN Xiang-lin, OUYANG Cheng, SONG Tao, DAI Sun-sheng. The homotopy analysis method for a class of jamming transition problem in traffic flow[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(17): 170203. (in Chinese))
- [17] 王玉兰, 朝鲁. 利用再生核解一类变系数偏微分方程[J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(1): 118-126. (WANG Yu-lan, CHAO Lu. Partial differential equation with variable coefficients[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(1): 118-126. (in Chinese))
- [18] 朱倩, 商学利, 陈文振. 六组点堆中子动力学方程组的同伦分析解[J]. 物理学报, 2012, **61**(7): 070201. (ZHU Qian, SHANG Xue-li, CHEN Wen-zhen. Homotopy analysis solution of point reactor kinetics equations with six-group delayed neutrons[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(7): 070201. (in Chinese))
- [19] 钟敏玲, 刘秀湘. 脉冲时滞 Hassell-Varley-Holling 功能性反应捕食者-食饵系统周期解存在的充要条件[J]. 应用数学学报, 2012, **35**(2): 297-308. (ZHONG Min-ling, LIU Xiu-xiang. Necessary and sufficient conditions for the existence of periodic solutions in an impulsive predator-prey system with Hassell-Varley-Holling response[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2012, **35**(2): 297-308. (in Chinese))
- [20] 司新辉, 郑连存, 张欣欣, 司新毅. 微极性流体在上下正交移动的渗透平行圆盘间的流动[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(8): 907-918. (SI Xin-hui, ZHENG Lian-cun, ZHANG Xin-xin, SI Xin-yi. Flow of a micropolar fluid between two orthogonally moving porous disks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(8): 907-918. (in Chinese))
- [21] 李永强, 张晨辉, 刘玲, 段俐, 康琦. 微重力下圆管毛细流动解析近似解研究[J]. 物理学报, 2013, **62**(4): 044701. (LI Yong-qiang, ZHANG Chen-hui, LIU Ling, DUAN Li, KANG Qi. The analytical approximate solutions of capillary flow in circular tubes under microgravity[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(4): 044701. (in Chinese))
- [22] 郑敏毅, 胡辉, 郭源君, 孙光永. 应用优化的同伦分析法求解非线性 Jerk 方程[J]. 振动与冲击, 2012, **31**(5): 21-25. (ZHENG Min-yi, HU Hui, GUO Yuan-jun, SUN Guang-yong. Optimal homotopy analysis method applied to solve a nonlinear Jerk equation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, **31**(5): 21-25. (in Chinese))

- [23] Fletcher C A J. Burgers equation: a model for all reasons[C]//Noye J ed. *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*. Amsterdam: North-Holland, 1982.
- [24] Cole J D. On a quasilinear parabolic equations occurring in aerodynamics[J]. *Quart Appl Math*, 1951, **9**: 225-236.
- [25] Hopf E. The partial differential equation[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1950, **3**(3): 201-230.
- [26] Olver P J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [27] Bluman G, Anco S. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*[M]. New York : Springer, 2002.
- [28] Ibragimov N H. *A Practical Course in Differential Equations and Mathematical Modelling* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2009.
- [29] Cheviakov A, Bluman G. Multidimensional partial differential equations systems; nonlocal symmetries, nonlocal conservation laws, exact solutions[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 2010, **51**(10): 103522.
- [30] Qu C Z. Allowed transformations and symmetry classes of variable coefficient Burgers equations[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1995, **54**(3): 203-225.
- [31] Sophocleous C. Transformation properties of a variable-coefficient Burgers equation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, **20**(5): 1047-1057.
- [32] Pocheketa O A, Popovych R O. Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations[J]. *Physics Letters A*, 2012, **376**(45): 2847-2850.
- [33] Abd-el-Maleka M B, El-Mansi S M A. Group theoretic methods applied to Burgers' equation [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, **115**(1/2): 1-12.
- [34] Kutluay S, Bahadir A R, Ozdes A. Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1999, **103**(2): 251-261.
- [35] Ozis T, Aksan E N, Ozdes A. A finite element approach for solution of Burgers Equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2003, **139**(2/3): 417-428.
- [36] Kadalbajoo M K, Awasthi A. A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, **182**(2): 1430-1442.
- [37] Hon Y C, Mao X Z. An efficient numerical scheme for Burgers' equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1998, **95**(1): 37-50.

# Analytical and Numerical Investigation of the Variable Coefficient Burgers Equation Under Cauchy Condition With the Exponential Homotopy Method

ZOU Li<sup>1,2</sup>, WANG Zhen<sup>3</sup>, ZONG Zhi<sup>1,2</sup>, WANG Xi-jun<sup>1,2</sup>, ZHANG Shuo<sup>1,4</sup>

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology)*, Dalian, Liaoning 116085, P.R.China;

2. *School of Naval Architecture, Dalian University of Technology*, Dalian, Liaoning 116085, P.R.China;

3. *School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology*, Dalian, Liaoning 116085, P.R. China;

4. *School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology*, Dalian, Liaoning 116085, P.R. China)

**Abstract:** The variable coefficient Burgers equation was studied with an approximate analytical method under the given initial and boundary conditions. A new-form homotopy was introduced to overcome the problem brought by the variable coefficient, this new-form homotopy enhanced the computational efficiency in comparison with the traditional forms, and gave a consistent analytical solution expression in time domain. Analytical solutions to the variable coefficient Burgers equation in finite space domain were determined respectively, and shock wave formation in finite space domain was also discussed. Convergence of the presented analytical solution was explored in the sense of norm. Based on the Lie transformation group theory, symmetry of the variable coefficient Burgers equation was studied with its infinitesimal generators, conservation law and group invariant solution obtained. The presented solution was directly deduced from the nonlinear partial differential equation without travelling wave transformation. Convergence of the approximate analytical solution was discussed with the so-called ‘*h*-curve’ criteria. Direct numerical simulation with the finite difference method proves accuracy and effectiveness of the proposed exponential homotopy method.

**Key words:** variable coefficient Burgers equation; analytical solution; exponential homotopy

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (51379033; 51221961; 51239002; 51309040); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB036101)