

# 反演极限与 Lauwerier 吸引子(II)\*

郭 峰, 李登辉

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要:** 对适当的参数,二次映射有一条吸引的周期轨道,并且其吸引集在单位闭区间上是稠密的.根据此性质,文中定义了 Lauwerier 映射的一个上半连续分解.在此分解上存在一个可分商空间,通过投影将二维的 Lauwerier 映射降为一维的二次映射,运用二次映射反演极限空间上的移位映射来研究 Lauwerier 映射的动力学性质.首先对二次映射进行几乎 Markov 分割,然后将每个分割区间扩张成相应的小矩形区域,再对 Lauwerier 映射进行几乎 Markov 分割后,从而证明了当参数小于 4 时, Lauwerier 映射与二次映射反演极限空间上的移位映射是拓扑半共轭的.

**关键词:** Lauwerier 映射; 反演极限空间; 上半连续分解; Markov 分割; 拓扑半共轭

**中图分类号:** O185.1      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.07.009

## 引 言

1971 年, Ruelle 和 Takens<sup>[1]</sup>在动力系统的研究中,提出奇怪吸引子的概念,它对系统的复杂性描述起了重要的作用.在很多实际工程问题中,如碰撞振动、干摩擦<sup>[2-3]</sup>等一些非光滑的系统都有复杂的动力学行为.对于奇怪吸引子的研究,有助于了解混沌系统中存在形态的规律问题.研究奇怪吸引子的结构及它的动力学性质成了研究混沌的基本课题,将有助于研究系统的全局动力学性质.

反演极限的概念是在连续统理论的研究中发展起来的.1959 年, Anderson 和 Choquet 通过例子说明了反演极限在描述连续统复杂性中的作用.在动力系统的研究中,反演极限也是有用的工具.文献[4]对反演极限空间上移位映射的动力学性质进行了研究.吸引子和反演极限也有着密切的联系, Barge 和 Martin<sup>[5]</sup>运用反演极限理论对平面中吸引子的性质进行了分析.

Williams<sup>[6]</sup>首先将两维或更高维映射奇怪吸引子归结为一维反演极限空间的移位映射来研究,文献[7-10]将反演极限空间理论运用到对扩张双曲吸引子,即螺线管吸引子和 Lorenz 吸引子的研究之中.

Lauwerier<sup>[11]</sup>构造了一个平面映射,证明该映射在一定的参数区域内存在一个奇怪吸引子,给出了该吸引子的解析表达式.文献[12]证明了 Lauwerier 映射与符号动力学的双边移位映射是拓扑半共轭的.文献[13]证明了当参数  $a = 4$  时, Lauwerier 映射与二次映射的反演极限空间上的移位映射是拓扑半共轭的.

\* 收稿日期: 2013-12-27; 修订日期: 2014-04-21

基金项目: 国家自然科学基金(11172246;11272268)

作者简介: 郭峰(1976—)男,山东泰安人,博士生(通讯作者. E-mail: mathguofeng@163.com).

文献[14]证明对合适的参数  $a$ , 二次映射族  $f_a$  有一条吸引的周期轨道, 并且吸引周期轨道的吸引集在闭区间上是稠密的. 本文利用此性质, 通过投影将二维的 Lauwerier 映射降到一维二次映射, 对二次映射进行几乎 Markov 分割, 然后将每个分割区间扩张成相应的小矩形区域, 再对 Lauwerier 映射进行几乎 Markov 分割后, 从而证明了当参数  $a < 4$  时, Lauwerier 映射与二次映射反演极限空间上的移位映射是拓扑半共轭的.

## 1 预备知识

考虑参数为  $a, b$  的二维 Lauwerier 映射  $L_{a,b}(x, y) = (bx(1 - 2y) + y, ay(1 - y))$  和参数为  $a$  的一维二次映射  $f_a(y) = ay(1 - y)$ . 对度量空间  $G$  上的连续映射  $f: G \rightarrow G$ , 在  $G$  上定义反演极限空间

$$(G, f) = \{(x_0, x_1, x_2, \dots) \mid x_j \in G: f(x_{j+1}) = x_j, j \geq 0\}. \quad (1)$$

定义  $(G, f)$  上的度量  $d((x_0, x_1, x_2, \dots), (y_0, y_1, y_2, \dots)) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(x_n, y_n)/2^n$ , 其中  $\rho$  为  $G$  上的度量, 定义映射  $\hat{f}: (G, f) \rightarrow (G, f)$  如

$$\hat{f}(x_0, x_1, x_2, \dots) = (f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots) = (f(x_0), x_0, x_1, x_2, \dots), \quad (2)$$

由文献[13]知,  $\hat{f}$  是一个同胚, 称  $\hat{f}$  为反演极限空间  $(G, f)$  上的移位映射.

设  $X$  是拓扑空间,  $\mathcal{G}$  是  $X$  的一个由不相交闭子集组成的覆盖. 若满足条件: 对任意集合  $g_\alpha \in \mathcal{G}$  和每一个包含  $g_\alpha$  的开子集  $U$ ,  $X$  中存在一个子集  $V$ , 使得  $g_\alpha \subseteq V \subseteq U$ , 其中  $V$  是  $\mathcal{G}$  中若干集合的并, 则称  $\mathcal{G}$  为  $X$  的一个上半连续分解. 记  $G$  是相应的可分商空间  $X/\mathcal{G}$ , 定义投影映射  $P: X \rightarrow G, P(x) = g$  当且仅当  $x \in g$ ,  $P$  是连续的闭映射. 设  $F: X \rightarrow X$  是连续映射,  $\mathcal{G}$  满足: 对每一个  $g_\alpha \in \mathcal{G}$ , 存在  $g_\beta \in \mathcal{G}$ , 使得  $F(g_\alpha) \subseteq g_\beta$ . 在空间  $G$  上定义  $f: G \rightarrow G, f(g_\alpha) = g_\beta$  当且仅当  $F(g_\alpha) \subseteq g_\beta$ . 记  $\Lambda(F) = \bigcap_{k \geq 0} F^k(X)$ .

**定理 1.1**<sup>[15]</sup> 若  $X, \mathcal{G}, G, F$  和  $f$  如以上的定义, 那么  $F|_{\Lambda(F)}$  与  $\hat{f}: (G, f) \rightarrow (G, f)$  是拓扑半共轭的; 若对  $g_\alpha \in \mathcal{G}$ , 一致有  $\text{diam}(F^k(g_\alpha)) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ , 那么它们是拓扑共轭的.

## 2 关于 Markov 分割的几个结果

**定义 2.1** 闭区间  $I = [p, q]$ , 若  $A_1, A_2, \dots, A_m$  为  $I$  的互不相交的闭子区间(如图 1 所示), 满足条件:

1)  $p \in A_1, q \in A_m$ ;

2)  $f\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \subset \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right)$ ;

3) 当  $k \rightarrow \infty$  时, 对每一个  $i = 1, 2, \dots, m$  有  $\text{diam}(f^k(A_i)) \rightarrow 0$ ;

4)  $f$  在  $I - \bigcup_{i=1}^m A_i$  的每一个区间上是一对一的;

则称映射  $f: I \rightarrow I$  关于  $A_1, A_2, \dots, A_m$  是几乎 Markov 分割的.

若  $f$  关于  $A_1, A_2, \dots, A_m$  是几乎 Markov 分割的, 令  $I_1, I_2, \dots, I_{m-1}$  表示  $I - \bigcup_{i=1}^m A_i$  的子开区间. 定义  $f$  的转移矩阵  $T_f = (t_{ij})$ , 若  $I_j \subset f(I_i)$ , 则  $t_{ij} = 1$ , 否则  $t_{ij} = 0$ . 若  $f$  关

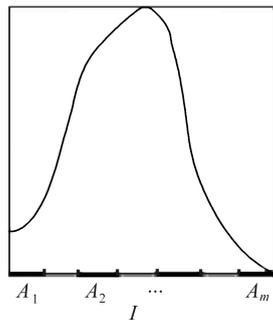


图 1 几乎 Markov 分割  
Fig.1 Nearly Markov partition

于  $A_1, A_2, \dots, A_m$  是几乎 Markov 分割的, 那么在  $\cup_{i=1}^m A_i$  中至少有一条吸引的周期轨道.

**定理 2.1**<sup>[16]</sup> 假设区间映射  $f: I \rightarrow I$  和  $g: J \rightarrow J$  是单峰的, 都具有几乎 Markov 分割的, 并且有相同的转移矩阵; 它们有双边吸引的周期轨道, 相应的吸引周期轨道的吸引集分别在  $I$  和  $J$  中是稠密的, 那么  $\hat{f}: (I, f) \rightarrow (I, f)$  与  $\hat{g}: (J, g) \rightarrow (J, g)$  是拓扑共轭的.

### 3 关于 Lauwerier 映射的基本性质

依据 Lauwerier 映射的以下性质, 可在吸引域中定义一个上半连续分解  $\mathcal{G}$ . 令  $\sum (L_{a,b})$  表示周期轨道的吸引集的补集, 即

$$\sum (L_{a,b}) = D - \cup_{k \geq 0} L_{a,b}^{-k} \left( \bigcup_{i=1}^m D_i \right),$$

其中  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $D_i$  为方形域  $D$  中的小长方形区域,  $D_i \subset D (i = 1, 2, \dots, m)$ . 在  $D$  中定义垂直扇形域和水平扇形域:

$$\mathcal{D}_{\nu_\mu} = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} : |\eta| \geq \mu |\xi| \right\}, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{H}_\mu} = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} : |\eta| \leq \mu |\xi| \right\}, \quad (3)$$

定义垂直弧和水平弧

$$\nu_\mu = \{ \{ \gamma(t), t_0 \leq t \leq t_1 \} : \gamma'(t) \in \mathcal{D}_{\nu_\mu} \}, \quad (4)$$

$$\mathcal{H}_\mu = \{ \{ \gamma(t), t_0 \leq t \leq t_1 \} : \gamma'(t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{H}_\mu} \}. \quad (5)$$

令  $D_{i(1/2)}$  表示  $D$  中包含临界点  $1/2$  的对称区域, 假设它的宽度为  $\delta$ .

**引理 3.1** 对  $b \leq a - \mu/(2\delta)$ , 即  $\mu \leq 2(a - b)\delta$ , 当  $(x, y) \notin D_{i(1/2)}$  时, 有

$$D_{L_{a,b}}(x, y) : \mathcal{D}_{\mathcal{H}_\mu} \rightarrow \mathcal{D}_{\nu_\mu}.$$

**证明** 假设  $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_{\nu_\mu}$ , 那么

$$\begin{aligned} D_{L_{a,b}}(x, y) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b(1-2y) & 1-2bx \\ 0 & a(1-2y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} b(1-2y)\xi + (1-2bx)\eta \\ a(1-2y)\eta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

因为  $\left| y - \frac{1}{2} \right| > \delta$  和  $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_{\nu_\mu}$ , 有  $\left| \frac{\xi}{\eta} \right| \leq \frac{1}{\mu}$ , 又  $0 < b < 1/2$ , 因此

$$\left| \frac{b(1-2y)\xi + (1-2bx)\eta}{a(1-2y)\eta} \right| \leq \frac{b}{a} \left| \frac{\xi}{\eta} \right| + \frac{1}{a} \left| \frac{1-2bx}{1-2y} \right| \leq \frac{b}{a} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2a\delta}. \quad (7)$$

只要  $b/(a\mu) + 1/(2a\delta) \leq 1/\mu$ , 即  $b \leq a - \mu/(2\delta)$  时, 则有

$$\begin{bmatrix} b(1-2y)\xi + (1-2bx)\eta \\ a(1-2y)\eta \end{bmatrix} \in \mathcal{D}_{\nu_\mu},$$

即  $DL_{a,b}(x, y) : \mathcal{D}_{\mathcal{H}_\mu} \rightarrow \mathcal{D}_{\nu_\mu}$ .

**引理 3.2** 存在充分小的  $b_0$ , 当  $b \leq b_0$  时, 存在常数  $C > 0$  和  $\lambda > 1$ , 当  $(x, y) \in \sum (L_{a,b})$  和  $v \in \mathcal{D}_{\nu_\mu}$ , 对任意  $k \geq 1$ , 有  $\| D_{L_{a,b}^k}(x, y)v \| \geq C\lambda^k \| v \|$ .

**证明** 由文献[17], 若映射  $f_a$  有一条吸引的周期轨道, 那么这条吸引周期轨道的吸引集的补集是一个双曲集, 即存在常数  $C_0 > 0, \lambda_0 > 1$ , 对于任何属于此补集的  $x$  和  $k \geq 1$ , 有

$$\left| \frac{d}{dx} f_a^k(x) \right| \geq C_0 \lambda_0^k.$$

因为

$$D_{L_{a,0}^k}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d}{dy}f^{k-1}(y) \\ 0 & \frac{d}{dy}f^k(y) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

所以存在  $C_1 > 0$  和  $\lambda_1 > 1$ , 使得  $(x,y) \in \sum(L_{a,0})$ , 对于  $v \in \mathcal{D}_{q_\mu}$ , 有  $\|D_{L_{a,0}^k}(x,y)v\| \geq C_1\lambda_1^k\|v\|$ , 根据  $D_{L_{a,b}^k}$  对参数  $b$  的连续依赖性, 对充分小的  $b > 0$ , 存在常数  $C > 0$  和  $\lambda > 1$ , 对任意  $k \geq 1$  和  $(x,y) \in \sum(L_{a,b})$ , 使  $\|D_{L_{a,b}^k}(x,y)v\| \geq C\lambda^k\|v\|$ .

#### 4 Lauwerier 映射与反演极限空间上的移位映射是拓扑半共轭的

**定理 4.1** 假设二次映射  $f_a$  有吸引的周期轨道, 当

$$b \leq \min\{b_0, a - \mu/(2\delta)\} < 1/2$$

时,  $L_{a,b}$  在吸引子  $\Lambda(L_{a,b})$  上与反演极限空间上的移位映射  $\hat{f}_a: (I, f_a) \rightarrow (I, f_a)$  是拓扑半共轭的.

**证明** 闭区间  $I = [0, 1]$ , 有  $f_a(I) \subset I$ , 假设存在参数  $a$  使得映射  $f_a$  有周期为  $n$  的双边吸引周期轨道  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为互不相交的区间, 有  $y_i \in B_i$ , 且当  $k \rightarrow \infty$  时, 对每一个  $i$ ,  $\text{diam}(f_a^k(B_i)) \rightarrow 0$  和  $f_a(\cup_{i=1}^n B_i) \subset \cup_{i=1}^n B_i$ . 因为  $f_a$  存在临界点  $1/2$ , 又有负的 Schwarz 导数<sup>[18]</sup>, 则存在  $k \geq 0$ , 使得  $f_a^k(1/2) \in \cup_{i=1}^n B_i$ . 令  $\cup_{i=1}^m A_i = \cup_{j=0}^k f_a^{-j}(\cup_{i=1}^n B_i)$ ,  $\delta$  表示包含临界点  $1/2$  的对称区间  $A_{i(1/2)}$  的长度, 其中  $A_{i(1/2)} \subset \cup_{i=1}^m A_i$ . 那么  $f_a$  关于  $A_1, A_2, \dots, A_m$  是几乎 Markov 分割的. 令  $D_i = I \times A_i$ , 则

$$L_{a,b}(\bigcup_{i=1}^m D_i) \subset \text{int}(\bigcup_{i=1}^m D_i). \quad (9)$$

当  $b < 1/2$  时,  $(L_{a,b}^{-1}(\cup_{i=1}^m D_i) - \cup_{i=1}^m D_i) \cap D$  由若干水平条组成, 令  $\mathcal{G}_0$  是其中的几个水平条构成的集合. 对  $k \geq 1$ , 定义  $\mathcal{G}_k = \{L^{-1}(g_\alpha) \cap D: g_\alpha \in \mathcal{G}_{k-1}\}$ ,  $\mathcal{G}_k$  中的每个集合由  $D - \cup_{i=1}^m D_i$  中的水平条构成.  $\cup_{k \geq 0} \cup_{g \in \mathcal{G}_k} g$  包含在  $\cup_{i=1}^m D_i$  中吸引周期轨道的吸引集之中, 令  $\mathcal{G}_\infty$  为  $D - \cup_{k \geq 0} \cup_{g \in \mathcal{G}_k} g$  的连通子集的集合, 从而定义区域  $D$  的一个上半连续分解  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G} = \{D_1, D_2, \dots, D_m\} \cup \{g: g \in \mathcal{G}_k, k \geq 1\} \cup \{g: g \in \mathcal{G}_\infty\}. \quad (10)$$

令  $J$  为相应的可分商空间  $D/\mathcal{G}$ . 由于  $L_{a,b}$  沿着水平方向不是一致压缩的, 根据定理 1.1,  $L_{a,b}$  在吸引子  $\Lambda(L_{a,b})$  上与  $\hat{f}_{a,b}: (J, f_{a,b}) \rightarrow (J, f_{a,b})$  是拓扑半共轭的, 其中  $f_{a,b}$  是在  $J$  上由  $L_{a,b}$  诱导的映射, 即  $f_{a,b}(g_\alpha) = g_\beta$  当且仅当  $L_{a,b}(g_\alpha) \subset g_\beta$  (图 2).

下面证明  $f_{a,b}$  和  $f_a$  满足定理 2.1 的条件.  $f_a$  关于  $A_1, A_2, \dots, A_m$  是几乎 Markov 分割的, 令  $\cup_{i=1}^s M_i = f_a^{-1}(\cup_{i=1}^m A_i)$ , 其中存在一个包含  $f_a$  的临界点的区间  $M_i (i = 1, 2, \dots, s)$ ,  $\cup_{i=1}^{s-1} I_i = I - \cup_{i=1}^s M_i$ , 则  $f_a$  关于  $M_1, M_2, \dots, M_s$  是几乎 Markov 分割的. 假设  $B = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$  为  $J$  中与区域  $D_1, D_2, \dots, D_m$  相对应的集合, 令  $\cup_{i=1}^s N_i = f_{a,b}^{-1}(B)$ ,  $\cup_{i=1}^{s-1} J_i = J - \cup_{i=1}^s N_i$ , 根据诱导映射  $f_{a,b}$  的性质, 有  $B \subset \cup_{i=1}^s N_i$ .

1) 证明  $f_{a,b}$  关于  $N_1, N_2, \dots, N_s$  是几乎 Markov 分割的.

1a) 因为  $f_{a,b}(B) \subset B$ ,  $f_{a,b}(\cup_{i=1}^s N_i) = B$ , 所以  $f_{a,b}(\cup_{i=1}^s N_i) \subset \cup_{i=1}^s N_i$ , 且一致有

$\text{diam}(f_{a,b}^k(N_i)) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ .

1b) 证明  $f_{a,b}$  在  $J_i (i = 1, 2, \dots, s-1)$  上是一对一的.

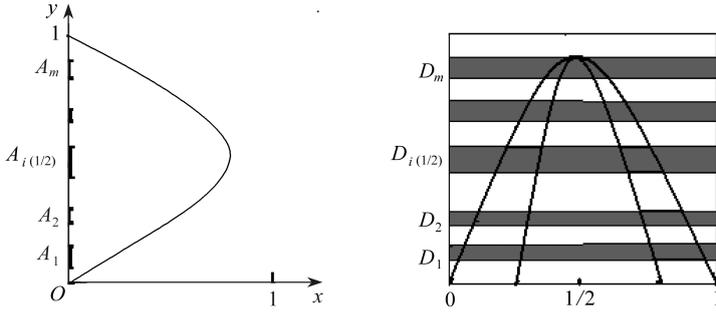


图2  $f_a$  和  $L_{a,b}$  的关系

Fig.2 The relation between  $f_a$  and  $L_{a,b}$

若  $g_\alpha, g_\beta \subset J_i$ , 使  $f_{a,b}(g_\alpha) = f_{a,b}(g_\beta)$ , 因为  $g_\alpha, g_\beta \subset J - \cup_{i=1}^s N_i$ , 所以  $g_\alpha, g_\beta$  是  $D - ((\cup_{i=1}^m D_i) \cup (\cup_{i=1}^m L_{a,b}(D_i)))$  中的水平条, 又因为  $L_{a,b}$  在  $D - ((\cup_{i=1}^m D_i) \cup (\cup_{i=1}^m L_{a,b}(D_i)))$  上是同胚的, 若  $f_{a,b}(g_\alpha) = f_{a,b}(g_\beta)$ , 则  $g_\alpha = g_\beta$  或  $L_{a,b}(g_\alpha)$  与  $L_{a,b}(g_\beta)$  属于  $\mathcal{G}$  的同一个集合. 假设是后一种情况, 由  $g_\alpha, g_\beta \subset D - ((\cup_{i=1}^m D_i) \cup (\cup_{i=1}^m L_{a,b}(D_i)))$ , 则

$$L_{a,b}(g_\alpha), L_{a,b}(g_\beta) \subset D - \bigcup_{i=1}^m D_i.$$

设  $L_{a,b}(g_\alpha)$  与  $L_{a,b}(g_\beta)$  在  $D - \cup_{i=1}^m D_i$  的一条水平条  $g_\tau$  中, 存在与  $g_\alpha$  和  $g_\beta$  都相交的垂直弧  $\gamma$ , 由引理 3.1, 若  $\gamma \subset D - D_{i(1/2)}$ , 则  $L_{a,b}(\gamma)$  也是垂直弧,  $L_{a,b}(\gamma)$  与  $L_{a,b}(g_\alpha)$  和  $L_{a,b}(g_\beta)$  分别相交, 那么  $L_{a,b}(\gamma)$  与水平线段  $g_\tau$  有两个交点, 得出矛盾, 所以  $g_\alpha = g_\beta$ , 即  $f_{a,b}$  在  $J_i$  上是一对一的.

1a) 和 1b) 证明了  $f_{a,b}$  关于  $N_1, N_2, \dots, N_s$  是几乎 Markov 分割的.

2) 由于  $f_{a,b}(g_i) = g_j$  当且仅当  $L_{a,b}(D_i) \subset D_j$  时成立, 而  $L_{a,b}(D_i) \subset D_j$  成立的充要条件是  $f_a(A_i) \subset A_j$ , 从而  $f_{a,b}$  与  $f_a$  有相同的转移矩阵.

3) 证明  $f_{a,b}$  的吸引周期轨道的吸引集在  $J$  中是稠密的.

首先证明  $L_{a,b}$  的吸引周期轨道的吸引集在  $D$  中是稠密的, 假设  $L_{a,b}$  的吸引周期轨道的吸引集在  $D$  中不是稠密的, 则存在一条垂直弧  $\beta \in \mathcal{V}_\mu \subset \sum (L_{a,b})$  和常数  $k \geq 0$ , 使  $L_{a,b}^k(\beta) \subset \sum (L_{a,b})$ , 由引理 3.1,  $L_{a,b}^k(\beta) \in \mathcal{V}_\mu$ . 由引理 3.2, 存在常数  $L > 0$  和  $\lambda > 1$ , 使得  $\|DL_{a,b}^k(\gamma(t))\gamma'(t)\| \geq C\lambda^k \|\gamma'(t)\|$ , 且  $L_{a,b}^k(\gamma)$  的长度大于 1, 与  $L_{a,b}^k(\gamma) \cap D_{i(1/2)} = \emptyset$  矛盾, 所以  $L_{a,b}$  的吸引周期轨道的吸引集在  $D$  中是稠密的, 从而  $f_{a,b}$  的吸引周期轨道的吸引集在  $J$  中是稠密的.

以上的证明满足定理 2.1 的条件, 故  $\hat{f}_{a,b}: (J, f_{a,b}) \rightarrow (J, f_{a,b})$  与  $\hat{f}_a: (I, f_a) \rightarrow (I, f_a)$  是拓扑共轭的, 从而  $L_{a,b}$  在吸引子  $\Lambda(L_{a,b})$  上与  $\hat{f}_a: (I, f_a) \rightarrow (I, f_a)$  是拓扑半共轭的.

## 5 结 论

对适当的参数  $a$ ,  $f_a$  有一条吸引的周期轨道, 并且吸引周期轨道的吸引集在闭区间上是稠密的, 根据此性质, 定义了 Lauerier 映射的一个上半连续分解  $\mathcal{G}$ , 在此分解上存在一个可分商空间  $G$ , 通过投影将二维的 Lauerier 映射降为一维二次映射, 运用二次映射反演极限空间上的移位映射研究了当参数  $a < 4$  时, Lauerier 映射的动力学性质.

## 参考文献(References):

- [1] Ruelle D, Takens F. On the nature of turbulence[J]. *Commun Math Phys*, 1971, **20**(3): 167-192.
- [2] 乐源, 谢建华. 一类双面碰撞振子的对称性尖点分岔与混沌[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(8): 991-998. (YUE Yuan, XIE Jian-hua. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of an impact oscillator between two rigid sides[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(8): 991-998. (in Chinese))
- [3] Leine R I, Nijmeijer H. *Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems*[M]. Springer, 2004.
- [4] LI Shi-hai. Dynamical properties of the shift maps on the inverse limit space[J]. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 1992, **12**(1): 95-108.
- [5] Barge M, Martin J. Chaos, periodicity, and snake-like continua[J]. *Trans Amer Math Soc*, 1985, **289**(1): 355-365.
- [6] Williams R F. One-dimensional non-wandering sets[J]. *Topologically*, 1967, **6**(4): 473-487.
- [7] Williams R F. Expanding attractors[J]. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 1974, **43**(1): 169-203.
- [8] Williams R F. The structure of attractors[C]//*Actes du Congrès International des Mathématiques*, 1970, **2**: 947-951.
- [9] Williams R F. The structure of Lorenz attractors[J]. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques Turbulence Seminar*, 1979, **50**(1): 73-99.
- [10] Guckenheimer J, Williams R F. Structure stability of Lorenz attractors [J]. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques Turbulence Seminar*, 1979, **50**(1): 59-72.
- [11] Lauwerier H A. The structure of a strange attractor[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1986, **21**(1): 146-154.
- [12] Liu Z R, Qin W X, Xie H M. The structure and dynamics of Lauwerier attractor[J]. *Chinese Science Bulletin*, 1992, **37**(14): 1269-1278.
- [13] 郭峰, 李登辉, 谢建华. 反演极限与 Lauwerier 吸引子(I)[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(2): 212-218. (GUO Feng, LI Deng-hui, XIE Jian-hua. Inverse limits and Lauwerier attractor (I)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(2): 212-218. (in Chinese))
- [14] Swiatek C. Hyperbolicity is dense in the real quadratic family[R]. Stony Brook Preprint, 1992.
- [15] Holte S, Roe R. Inverse limits associated with the forced Van der Pol equation[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 1994, **6**(4): 601-612.
- [16] Barge M, Holte S. Nearly one-dimensional Hénon attractors and inverse limits[J]. *Nonlinearity*, 1995, **8**(1): 29-42.
- [17] Maid R. Hyperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1985, **100**(4): 495-524.
- [18] Singer D. Stable orbits and bifurcation of maps of the interval[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1978, **35**(2): 260-267.

## Inverse Limit and Lauwerier Attractor (II)

GUO Feng, LI Deng-hui

(*School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,  
Chengdu 610031, P.R.China*)

**Abstract:** The quadratic mapping had an attracting periodic orbit of which the attraction set was dense in a unit closed interval for an appropriate parameter. According to that property, an upper semi-continuous decomposition of the Lauwerier mapping was defined, with respect to which there existed a separable quotient space. The 2D Lauwerier mapping was reduced to a 1D quadratic mapping through projection. The dynamic properties of the Lauwerier mapping was studied with the shift map on the inverse limit space of the quadratic mapping. First, the quadratic mapping was nearly Markov partitioned, then each partition interval was expanded to a corresponding small rectangular region, in turn the Lauwerier mapping was nearly Markov partitioned again. It is proved that the Lauwerier mapping is topologically semi-conjugate to the shift map on the inverse limit space of the quadratic mapping when the parameter is under 4.

**Key words:** Lauwerier mapping; inverse limit space; upper semi-continuous decomposition; Markov partition; topologically semi-conjugate

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11172246;11272268)