文章编号:1000-0887(2014)07-0805-10

K-解析函数的 Riemann 边值问题*

张建元[1], 赵书芬[1,2], 韩 艳[1]

(1. 昭通学院 数学与统计学院, 云南 昭通 657000;
2. 哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001)

摘要: 引入了(分片)K-解析函数和 Cauchy 型 K-积分的概念.利用 K-对称变换的方法研究了 Cauchy 型 K-积分的某些性质,然后借助函数在曲线上的指标与这些 Cauchy 型 K-积分的性质,得到了 K-解析函数类中的 Riemann 边值问题的可解条件和解的表达式以及它们与指标之间的关系.而解析函数和共轭解析函数都是 K-解析函数的特例,文中所得结果,推广了解析函数和共轭解析函数中的相应结论.

关 键 词: Cauchy 型 K-积分; (分片)K-解析函数; K-对称变换; 边界值公式; Riemann 边值问题; 指标

中图分类号: O174.55; O175.5 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.07.010

在文献[1-4]中,给出 K-解析函数(变换)与 K-积分的概念以及 K-解析函数(在域内的值)可由其边界上的值来表示这一特性.那么一个定义在对全平面互补的两个区域上的分片(区)K-解析函数是否也具有类似的特性? 对于此问题本文将不作广泛的讨论, 只就一类基本的情况: 当函数的(左右)边界值满足线性联结条件时的问题——Riemann 边值问题进行了讨论与研究.

1 基本概念

定义 1.1[1-2] 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内有定义,$z(k) \equiv x + \mathrm{i}ky\,(0 \neq k \in \mathbf{R})$ 为 $z = x + \mathrm{i}y$ 的 K-复数,若 $f(z)$ 在区域 D 内 K-可导, 即极限

$$f'_{(k)}(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z(k)} \qquad (\forall z \in D)$$

存在,称 $f(z)$ 在 D 内 K-解析.把在区域 D 内所有的 K-解析函数构成的集合记为 $F(D(k))$.

定义 1.2[3-10] 设 L 是位于平面有限部分的有向光滑曲线, $f(t)$ 是 L 上给定的有界可积函数,称积分

$$F(z) = \frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi \mathrm{i}} \int_L \frac{f(t)}{(t - z)(k)} \,\mathrm{d}t(k) \tag{1}$$

是 Cauchy 型 K-积分, $f(t)$ 叫做它的密度.

* **收稿日期:** 2013-11-28; **修订日期:** 2014-05-27
基金项目: 国家自然科学基金(11061028);云南省教育厅科学研究基金(2012Y435;2013Y578)
作者简介: 张建元(1956—), 男, 云南昭通人, 教授(通讯作者. E-mail: zhangjianyuan07@163.com).

由解析函数和K-解析函数的关系可知[1]，当$z \notin L$时，$F(z)$是K-解析的，且$F(\infty)=0$.如果曲线$L=L_0+L_1+\cdots+L_p$，其中$L_j(j=0,1,\cdots,p)$是互不相交的光滑闭曲线，且L_0把其它L_1，$L_2,\cdots,L_p$包含在内部.把由它们所围出的连通区域记为S^+，使得S^+永远保持在其左侧的方向规定为L的正方向(它包含沿L_0的逆时针方向以及沿L_1，$L_2,\cdots$，L_p的顺时针方向)，反之为L的负向，并分别记它们为L^+与L^-.把$S^+ + L$补充成完全平面的所有部份用S^-代表，并总假设原点O在S^+内.于是由式(1)所确定的积分是两个K-解析函数$F^+(z)(z\in S^+)$和$F^-(z)(z\in S^-)$，它们分别定义在两个对全平面互补的区域上，且能分别从正负区域左右连续到边界上，但其一般边界值(若存在)

$$\lim_{z(\in S^+)\to t} F(z)=F^+(t),\quad \lim_{z(\in S^-)\to t} F(z)=F^-(t)$$

是不相等的，有跳跃：$F^+(t)-F^-(t)=g(t)(t\in L)$.这样$F(z)$就是一个分片(区)K-解析函数.

定理1.1[7-10](边界值公式) 若L是平面上的一条简单光滑闭曲线，$t_0\in L$，$f(t)$在L上满足Hölder条件$\mathrm{H}^\alpha(L)$，(其中Hölder指数α满足$0<\alpha\leqslant 1$)，则

$$F^{\pm}(t_0)=\frac{\pm 1}{2}f(t_0)+\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)(k)}\,\mathrm{d}t(k),\tag{2}$$

$$\begin{cases} F^+(t_0)-F^-(t_0)=f(t_0), \\ F^+(t_0)+F^-(t_0)=\dfrac{\operatorname{sgn}(k)}{\pi \mathrm{i}}\displaystyle\int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)(k)}\,\mathrm{d}t(k), \end{cases}\tag{3}$$

其中

$$F(t_0)=\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{f(t)}{(t-t_0)(k)}\,\mathrm{d}t(k)\qquad (t_0\in L)$$

为积分(1)的Cauchy主值.

定理1.2[7-10](边界值性质) 在定理1.1的条件下，则当$\alpha<1$时，$F^{\pm}(t)$满足条件$\mathrm{H}^\alpha(L)$；当$\alpha=1$时，$F^{\pm}(t)$满足条件$\mathrm{H}^{1-\varepsilon}(L)$，其中$\varepsilon$是任意小的正数.

引理1.1 若L是平面上的一条简单光滑闭曲线，变换$\tau=t(k)$把L变为l，则$f(t)\in\mathrm{H}^\alpha(L)\Leftrightarrow f(\tau(k^{-1}))\in\mathrm{H}^\alpha(l)$.

证明 因K-对称变换$\tau=t(k)$即$t=\tau(k^{-1})$是一一对应的，设

$$g(\tau)\equiv f(\tau(k^{-1}))=f(t),\ \tau_j=t_j(k),$$

其中 $j=1,2,\ t_j\in L,\ \tau_j\in l,$

$$d=|t_1-t_2|,\ d(k)=|t_1(k)-t_2(k)|,$$

则

$$d\min\{1,|k|\}\leqslant d(k)\leqslant d\max\{1,|k|\}^{[1]}.$$

因

$$f(t)\in\mathrm{H}^\alpha(L),\ |f(t_1)-f(t_2)|\leqslant A|t_1-t_2|^\alpha,$$

即

$$|g(\tau_1)-g(\tau_2)|=|f(\tau_1(k^{-1}))-f(\tau_2(k^{-1}))|\leqslant$$
$$A|\tau_1(k^{-1})-\tau_2(k^{-1})|^\alpha\leqslant A|\tau_1-\tau_2|^\alpha\qquad (当|k^{-1}|\leqslant 1时)$$

或

$$|g(\tau_1)-g(\tau_2)|\leqslant A|k^{-1}|^\alpha|\tau_1-\tau_2|^\alpha\qquad (当|k^{-1}|>1时).$$

故$g(\tau)\in\mathrm{H}^\alpha(l)$，即$f(\tau(k^{-1}))\in\mathrm{H}^\alpha(l)$.反之也成立.

定理 1.1、1.2 的证明 设 K-对称变换[11] $\zeta = z(k)$ 一对一把 S 变为 D,边界 L 变为 l,此时 L 与 l 分别关于区域 S 与 D 是 k 保方(转)向[2,6,11-12],当 $k > 0$ 时,L 与 l 是保转向的;当 $k < 0$ 时,L 与 l 是反保转向的,L^+ 对应 l^-,反之亦然.设 $g(\tau) \equiv f(\tau(k^{-1})) = f(t)$, Cauchy 型 K-积分(1)变为 Cauchy 型积分

$$F(\zeta(k^{-1})) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\tau(k^{-1}))}{\tau - \zeta} d\tau,$$

即

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{g(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau \qquad (\zeta \notin l).$$

由 $f(t) \in H^\alpha(L) \Leftrightarrow g(\tau) \equiv f(\tau(k^{-1})) \in H^\alpha(l)$, $G(\zeta)$ 解析.又 $G(\zeta) = F(\zeta(k^{-1}))$ 为解析 $\Leftrightarrow F(z) = G(z(k))$ 为 K-解析[1], 由解析函数的 Plemelj(普莱梅)公式及 Privalov(普利瓦洛夫)定理[7-10]得定理 1.1、1.2 成立,且

$$G^\pm(\tau_0) = \frac{\pm 1}{2} g(\tau_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{g(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau \in H(l),$$

即

$$F^\pm(t_0) = \frac{\pm 1}{2} f(t_0) + \frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{(t - t_0)(k)} dt(k) \in H(L).$$

此时 $\tau_0 = t_0(k) \in l$, $t_0 = \tau_0(k^{-1})$.式(2)成立,进一步可证式(2)与式(3)等价.

注 1.1 关于定理 1.2 有如下更一般的结论.命题:在定理 1.1 的条件下,当 $\alpha < 1$ 时, $F^\pm(z)$ 满足条件 $H^\alpha(\overline{S^\pm})$;当 $\alpha = 1$ 时, $F^\pm(z)$ 满足条件 $H^{1-\varepsilon}(\overline{S^\pm})$, 其中 $0 < \varepsilon < 1$,$\overline{S^\pm} = S^\pm + L$.

注 1.2 对于定理 1.1、1.2 这类 K-解析函数中的问题,利用 K-对称变换,可把其转化到解析函数中去,然后用解析函数理论使问题得以解决,反之也行.称此方法为 K-对称变换法.

2 Riemann 边值问题的提出

求一个包括无穷远点在内的分片 K-解析函数 $F(z)$,使它在闭曲线 L 上满足边界值的线性联结条件[7-10,13]:

$$F^+(t) = G(t)F^-(t), \tag{4}$$

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \tag{5}$$

其中 $G(t) \neq 0$, $g(t)$ 在 L 上给定,且皆满足 H 条件的问题,分别称为齐次与非齐次的 Riemann 边值问题,简称 Riemann 边值问题, 记为(齐次与非齐次)R 问题.若要求 $F(z)$ 在 ∞ 处至多为 m 阶的, 则此问题记为 R_m,本文主要讨论常见的问题 R_0 与 R_{-1}, 即在 $F(\infty) = a(\neq 0)$ 有限或 $F(\infty) = 0$ 的附加条件下求解 R 问题.把 $\kappa \triangleq \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_L G(t) = (2\pi i)^{-1}\operatorname{sgn}(k)[\ln G(t)]_L = (2\pi)^{-1}\operatorname{sgn}(k)[\arg G(t)]_L$ 称为 R 问题的指标.

性质 2.1 若 $\kappa^\pm \triangleq \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_{L^\pm} G(t) = (2\pi)^{-1}\operatorname{sgn}(k)[\arg G(t)]_{L^\pm}$,则 $\kappa^- = -\kappa^+$.

在式(5)中当 $G(t) \equiv 1$ 时, 得(以 $g(t)$ 为跳跃函数的) 跳跃问题:

$$F^+(t) - F^-(t) = g(t) \qquad (t \in L). \tag{6}$$

由定理 1.1, 问题(6)在无穷远点为 0 或为有限数 a 的解分别为

$$F(z) = \frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{(t - z)(k)} dt(k), \quad F(z) = \frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{(t - z)(k)} dt(k) + a, \tag{7}$$

且易证解是唯一的.

2.1 单连通区域的 Riemann 边值问题

2.1.1 齐次 R 问题

设 $F(z)$ 为齐次 R 问题(4) 的解(由如下的讨论,易知这是可行的), N^+,N^- 分别为 $F(z)$ 在 S^+ 和 S^- 内的零点个数.由对数 K-留数定理[4]得:

$$\begin{aligned}\kappa^+ &= \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_L F^+(t) = (2\pi i)^{-1}\operatorname{sgn}(k)[\ln F^+(t)]_L = \\ &(2\pi i)^{-1}\operatorname{sgn}(k)\int_L [F^{+\prime}_{(k)}(t)/F^+(t)]\mathrm{d}t(k) = \\ &(2\pi)^{-1}\operatorname{sgn}(k)[\arg F(t)]_L = N^+,\end{aligned}$$

同理 $\kappa^- = \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_{L^-}F^-(t) = N^-$.式(4) 两边取关于 L 的指标:

$$\kappa = \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_L F^+(t) - \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_L F^-(t) = \kappa^+ + \kappa^- = N^+ + N^- \geqslant 0. \tag{8}$$

从而 $\kappa \geqslant 0$ 是分片(区)K- 解析函数 $F(z)$ 在全平面的零点个数.

当 $\kappa = \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_L G(t) = 0$ 时,由式(8),

$$\kappa^\pm = \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_{L^\pm}F^\pm(t) = N^\pm = 0.$$

$F^\pm(z) \neq 0$, $\ln F^\pm(z)$ 分区 K- 解析, 连续延拓 $F^\pm(t) \neq 0$, 且 $\ln G(t)$ 与 $\ln F^\pm(t)$ 皆为单值函数.式(4) 两边取对数得 $\ln F^+(t) - \ln F^-(t) = \ln G(t)$.由式(7) 得齐次 R 问题(在 $F(\infty) = 1$ 的附加条件下)的解

$$\ln F(z) = \frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t)}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k),\ F(z) = \exp\left\{\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t)}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)\right\}.$$

当 $\kappa = \operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_L G(t) \neq 0$ 时,$\ln G(t)$ 为非单值函数.改写式(4):

$$F^+(t) = G_0(t)t^\kappa(k)F^-(t),$$

其中 $G_0(t) = t^{-\kappa}(k)G(t)$.因

$$\operatorname{ind}_L G_0(t) = \operatorname{ind}_L t^{-\kappa}(k) + \operatorname{ind}_L G(t) = -\operatorname{sgn}(k)\kappa + \operatorname{sgn}(k)\kappa = 0,$$

由以上讨论的结论得解

$$\begin{cases} F(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & z \in S^+, \\ z^{-\kappa}(k)e^{\Gamma(z)}, & z \in S^-, \end{cases} \\ \Gamma(z) = \dfrac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\ln[t^{-\kappa}(k)G(t)]}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k). \end{cases} \tag{9}$$

由定理 1.2 可知此解满足 H 条件,且具有在有限平面内(包括在边界 L 上) 处处非零,在无穷远点有 $-\kappa$ 阶的特性,把具有这种特性的解称为齐次 R 问题的标准解,记为

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)}, & z \in S^+, \\ z^{-\kappa}(k)e^{\Gamma(z)}, & z \in S^-. \end{cases} \tag{10}$$

利用标准解就可得齐次 R 问题的一般解有如下结论:

定理 2.1 若齐次 R 问题的指标为 κ, 则

1) 在 $F(\infty) = a(a \neq 0)$ 有限的附加条件下, 当 $\kappa \geqslant 0$ 时, 齐次 R 问题有解 $F(z) = P_\kappa(z)X(z)$(其中当 $\kappa = 0$ 时, $P_\kappa(z) \equiv C$,C 是任意常数);当 $\kappa < 0$ 时,齐次 R 问题无解.

2) 在 $F(\infty) = 0$ 的条件下,当 $\kappa \leqslant 0$ 时,齐次 R 问题无解;当 $\kappa > 0$ 时,齐次 R 问题有解 $F(z) = P_{\kappa-1}(z)X(z)$.其中 $X(z)$ 由式(10) 给出, $P_\kappa(z)$ 为 $z(k)$ 的 κ 次任意复系数多项式, $P_0(z) \equiv C$(C 是任意常数).

证明 设齐次 R 问题的一般解为 $F(z)$，从而有 $F^{+}(t)=G(t)F^{-}(t)$，又 $X^{+}(t)=G(t)X^{-}(t)$，由标准解 $X(z)$ 非零的特性得 $F^{+}(t)/X^{+}(t)=F^{-}(t)/X^{-}(t)\ (t\in L)$.作 K-解析的延拓，再注意到附加条件 $F(\infty)$ 有限或为 0，$F(z)/X(z)$ 在全平面除∞外 K-解析，在∞具有有限阶.

1）在 $F(\infty)=a(a\neq 0)$ 有限的附加条件下，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，因 ∞ 至多为 $F(z)$ 的 0 阶极，$F(z)/X(z)$ 在 ∞ 至多有 κ 阶极，由广义 Liouville（刘维尔）定理 $F(z)/X(z)=P_{\kappa}(z)$，$F(z)=P_{\kappa}(z)X(z)$（其中 $P_{\kappa}(z)$ 为 $z(k)$ 的 κ 次任意复系数多项式，当 $\kappa=0$ 时，$P_{\kappa}(z)\equiv C$，C 是任意常数）；当 $\kappa<0$ 时，$F(\infty)/X(\infty)=0$，由 Liouville 定理得 $F(z)\equiv 0$，此时称问题无解.

2）在 $F(\infty)=0$ 的附加条件下，当 $\kappa\leqslant 0$ 即 $\kappa-1\leqslant -1$ 时，因 $F(\infty)=0$，∞ 至多为 $F(z)$ 的 -1 阶极，∞ 为 $F(z)/X(z)$ 的零点：$F(\infty)/X(\infty)=0$，故齐次 R 问题只有解 $F(z)\equiv 0$，此时问题无解；当 $\kappa>0$ 时，$F(z)/X(z)$ 在 ∞ 至多有 $\kappa-1$ 阶极，由广义 Liouville 定理 $F(z)/X(z)=P_{\kappa-1}(z)$，齐次 R 问题有解 $F(z)=P_{\kappa-1}(z)X(z)$.

2.1.2 非齐次 R 问题

下面笔者仍然利用齐次 R 问题标准解来讨论非齐次 R 问题，关于非齐次 R 问题的一般解有如下结论.

定理 2.2 若 R 问题的指标为 κ，则在 $F(\infty)=a(\neq 0)$ 有限的附加条件下，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，非齐次 R 问题对任意的自由项 $g(t)$ 可解，它的一般解为

$$F(z)=X(z)\left[\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(t)}{X^{+}(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)+P_{\kappa}(z)\right],$$

其中 $P_{\kappa}(z)$ 为 $z(k)$ 的 V 次任意复系数多项式，当 $\kappa=0$ 时，$P_{\kappa}(z)\equiv C$，C 是任意常数.

当 $\kappa=-1$ 时，非齐次 R 问题有唯一解

$$F(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)X(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(t)}{X^{+}(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k).\tag{11}$$

当 $\kappa<-1$ 时，非齐次 R 问题一般来说无解.当且仅当 $g(t)$ 满足 $-\kappa-1$ 个条件：

$$\int_{L}\frac{g(t)t^{n-1}(k)}{X^{+}(t)}\mathrm{d}t(k)=0,\qquad n=1,2,\cdots,-\kappa-1\tag{12}$$

时，有唯一解，解由式（11）给出.

证明 设 $X(z)$ 为式（5）中对应的齐次 R 问题的标准解，即 $G(t)=X^{+}(t)/X^{-}(t)$.将 $G(t)$ 代入式（5）得

$$\frac{F^{+}(t)}{X^{+}(t)}-\frac{F^{-}(t)}{X^{-}(t)}=\frac{g(t)}{X^{+}(t)},\qquad t\in L,\ \frac{g(t)}{X^{+}(t)}\in \mathrm{H},\tag{13}$$

$$\frac{g(t)}{X^{+}(t)}=\psi^{+}(t)-\psi^{-}(t),\ \psi(z)=\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(t)}{X^{+}(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k).\tag{14}$$

由式（13）、（14）得

$$\frac{F^{+}(t)}{X^{+}(t)}-\psi^{+}(t)=\frac{F^{-}(t)}{X^{-}(t)}-\psi^{-}(t).$$

当 $\kappa\geqslant 0$ 时，因 ∞ 至多为 $F(z)$ 的 0 阶极，$\psi(\infty)=0$，故 $F(z)/X(z)$ 在 ∞ 至多有 κ 阶极.由广义 Liouville 定理得 $[F(z)/X(z)]-\psi(z)=P_{\kappa}(z)$，$F(z)=X(z)[\psi(z)+P_{\kappa}(z)]$，其中 $P_{\kappa}(z)$ 为 $z(k)$ 的 κ 次任意复系数多项式，当 $\kappa=0$ 时，$P_{\kappa}(z)\equiv C$，C 是任意常数.

当 $\kappa<0$ 时，$F(z)/X(z)$ 以无穷远为 $-\kappa$ 阶零点，从而得 $[F(z)/X(z)]-\psi(z)=0$，$F(z)$

$= X(z)\psi(z)$,此时 $F(z)$ 以无穷远点为极,阶数不高于 $-\kappa-1$.当 $\kappa=-1$ 时, $F(z)$ 以无穷远点为 0 阶极点, 非齐次 R 问题有唯一解, 其解由式(11) 给出;当 $\kappa<-1$ 时, 问题一般不可解.设展开式[14-15]:

$$\psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^{-n}(k),\ c_n=\frac{-\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)t^{n-1}(k)}{X^+(t)}\mathrm{d}t(k),\qquad n=1,2,3,\cdots.$$

为了保证 $F(z)$ 在 ∞ 处有 0 阶极, 须且只须展开式中前面的 $-\kappa-1$ 个系数 $c_n\equiv 0$, 即

$$\int_L \frac{g(t)t^{n-1}(k)}{X^+(t)}\mathrm{d}t(k)\equiv 0,\qquad n=1,2,\cdots,-(\kappa+1).$$

这就是说当且仅当 $-\kappa-1$ 个可解条件(12) 满足时, 非齐次 R 问题有唯一解, 解由式(11) 给出.通过同样的讨论可得非齐次 R 问题在 $F(\infty)=0$ 的附加条件下也有类似的结论.

定理 2.3 若 R 问题的指标为 κ,则在 $F(\infty)=0$ 的附加条件下,当 $\kappa\geqslant 0$ 时,非齐次 R 问题对任意的自由项 $g(t)$ 可解, 它的一般解为

$$F(z)=X(z)\left[\frac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)+P_{\kappa-1}(z)\right],\tag{15}$$

其中 $X(z)$ 可由式(10) 给出,$P_{\kappa-1}(z)$ 为 $z(k)$ 的 $\kappa-1$ 次任意复系数多项式(当 $\kappa=0$ 时, $P_{\kappa-1}(z)\equiv 0$).

当 $\kappa<0$ 时, 非齐次 R 问题一般来说无解,它有解的充要条件是自由项 $g(t)$ 满足 $-\kappa$ 个条件:

$$\int_L \frac{g(t)t^{n-1}(k)}{X^+(t)}\mathrm{d}t(k)\equiv 0,\qquad n=1,2,\cdots,-\kappa.\tag{16}$$

当可解条件(16)成立时, 其解唯一且由式(15)中令 $P_{\kappa-1}(z)\equiv 0$ 给出.

2.2 多连通区域的 Riemann 边值问题

在多连通域中,因 $L_1,L_2,\cdots,L_p$ 存在,记 L_j 上的指标

$$\kappa_j\triangleq\operatorname{sgn}(k)\operatorname{ind}_{L_j}G(t)=(2\pi)^{-1}\operatorname{sgn}(k)[\arg G(t)]_{L_j}\qquad(j=0,1,\cdots,p),$$

这里点 t 是沿每个 L_j 的正方向.边值问题的指标

$$\kappa=\sum\nolimits_{j=0}^{p}\kappa_j.$$

引入函数 $\Pi(z)=\prod_{j=1}^{p}[(z-a_j)(k)]^{\kappa_j}$,其中 a_j 为 $L_j(j=1,2,\cdots,p)$ 内任意一点.这样就有

$$\arg[t^{-\kappa}(k)\Pi(t)G(t)]_{L_j}=0\qquad(j=0,1,\cdots,p).$$

改写条件(4):

$$\Pi(t)F^+(t)=t^{\kappa}(k)[t^{-\kappa}(k)\Pi(t)G(t)]F^-(t).$$

与单连通区域类似,可得多连通区域齐次 R 问题的标准解为

$$\begin{cases}X(z)=\begin{cases}\Pi^{-1}(z)\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z\in S^+,\\ z^{-\kappa}(k)\mathrm{e}^{\Gamma(z)}, & z\in S^-,\end{cases}\\ \Gamma(z)=\dfrac{\operatorname{sgn}(k)}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\ln[t^{-\kappa}(k)\Pi(t)G(t)]}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k).\end{cases}\tag{17}$$

设齐次 R 问题的一般解为 $F(z)$, 由 $X(z)$ 非零的特性及式(4) 得:$F^+(t)/X^+(t)=F^-(t)/X^-(t)(t\in L)$, 类似于单连通区域的讨论, 可得多连通区域的齐次和非齐次 R 问题的一般解.

定理 2.4 若 R 问题的指标为 κ, 则

1）在 $F(\infty)=a(a\neq 0)$ 有限的附加条件下，当 $\kappa<0$ 时，齐次 R 问题无解；当 $\kappa\geqslant 0$ 时，齐次 R 问题有解 $F(z)=P_{\kappa}(z)X(z)$.

2）在 $F(\infty)=0$ 的附加条件下，当 $\kappa\leqslant 0$ 时，齐次 R 问题无解；当 $\kappa>0$ 时，齐次 R 问题有解 $F(z)=P_{\kappa-1}(z)X(z)$.其中 $X(z)$ 由式(17) 给出，$P_{\kappa}(z)$ 为 $z(k)$ 的 κ 次任意复系数多项式，$P_0(z)\equiv C$，C 是任意常数.

定理 2.5 若 R 问题的指标为 κ，则

1）在 $F(\infty)=a(a\neq 0)$ 有限的附加条件下，当 $\kappa\geqslant -1$ 时，非齐次 R 问题对任意的自由项 $g(t)$ 可解，它的一般解为

$$F(z)=X(z)[\psi(z)+P_{\kappa}(z)]; \tag{18}$$

当 $\kappa<-1$ 时，非齐次 R 问题一般来说无解.当且仅当 $g(t)$ 满足 $-\kappa-1$ 个条件

$$\int_L \frac{g(t)t^{n-1}(k)}{X^+(t)}\mathrm{d}t(k)\equiv 0 \qquad (n=1,2,\cdots,-\kappa-1)$$

时有唯一解.解由式(18)(其中 $P_{\kappa}(z)\equiv 0$) 给出.

2）在 $F(\infty)=0$ 的附加条件下，当 $\kappa\geqslant 0$ 时，非齐次 R 问题对任意的自由项 $g(t)$ 可解，它的一般解为

$$F(z)=X(z)[\psi(z)+P_{\kappa-1}(z)]; \tag{19}$$

当 $\kappa<0$ 时，非齐次 R 问题一般来说无解.当且仅当 $g(t)$ 满足 $-\kappa$ 条件

$$\int_L \frac{g(t)t^{n-1}(k)}{X^+(t)}\mathrm{d}t(k)\equiv 0 \qquad (n=1,2,\cdots,-\kappa)$$

时有唯一解.解由式(19)(其中 $P_{\kappa-1}(z)\equiv 0$) 给出.在式(18)、(19) 中的 $X(z)$ 与 $\psi(z)$ 分别由式(17) 与(14) 给出，$P_{\kappa}(z)$ 为 $z(k)$ 的 κ 次任意多项式，其中 $P_{-1}(z)\equiv 0$.

例 2.1 在函数类 $F(D(k))$ 中求解非齐次 Riemann 边值问题：

$$F^+(t)=t(k)[t^2(k)-1]^{-1}F^-(t)+[t^3(k)-t^2(k)+1][t^2(k)-t(k)]^{-1},$$
$$t\in L,\ F^-(\infty)=0.$$

1）$L=\{t:|t(k)|=2^{-1}\}$；

2）$L=\{t:|t(k)|=2\}$.

解 $G(t)=t(k)[t^2(k)-1]^{-1}$，$g(t)=[t^3(k)-t^2(k)+1][t^2(k)-t(k)]^{-1}$.

1）$L=\{t:|t(k)|=2^{-1}\}$ 内含有点 0，$\kappa=(2\pi)^{-1}\mathrm{sgn}(k)[\arg G(t)]_L=1>0$，R 问题无条件可解.由式(9)、(10)得

$$\varGamma(z)=\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\ln[t^2(k)-1]^{-1}}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)=\begin{cases}\ln[z^2(k)-1]^{-1}, & z\in S^+,\\ 0, & z\in S^-;\end{cases}$$

$$X(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\varGamma(z)}=[z^2(k)-1]^{-1}, & z\in S^+,\\ z^{-1}(k)\mathrm{e}^{\varGamma(z)}=z^{-1}(k), & z\in S^-.\end{cases}$$

$$\psi(z)\triangleq\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)=$$
$$\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{(t^2(k)-1)(t^3(k)-t^2(k)+1)}{(t^2(k)-t(k))(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)=$$
$$\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{t^3(k)-t(k)+1+t^{-1}(k)}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)=\begin{cases}z^3(k)-z(k)+1, & z\in S^+,\\ -z^{-1}(k), & z\in S^-.\end{cases}$$

由定理 2.3 得 R 问题的解：

$$F(z)=X(z)[\psi(z)+C]=\begin{cases}[z^2(k)-1]^{-1}[z^3(k)-z(k)+1+C], & z\in S^+,\\ z^{-1}(k)[-z^{-1}(k)+C], & z\in S^-.\end{cases}$$

2) $L=\{t:|t(k)|=2\}$ 内含有点0与 ±1, $\kappa=(2\pi)^{-1}\mathrm{sgn}(k)[\arg G(t)]_L=-1<0$, 由式(9)、(10)得

$$\Gamma(z)=\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\ln\{t^2(k)[t^2(k)-1]^{-1}\}}{(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)=$$

$$\begin{cases}0, & z\in S^+,\\ \ln\{z^{-2}(k)[z^2(k)-1]\}, & z\in S^-,\end{cases}$$

$$X(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\Gamma(z)}=1, & z\in S^+,\\ z(k)\mathrm{e}^{\Gamma(z)}=z^{-1}(k)[z^2(k)-1], & z\in S^-,\end{cases}$$

$$\psi(z)\triangleq\frac{\mathrm{sgn}(k)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{t^3(k)-t^2(k)+1}{(t^2(k)-t(k))(t-z)(k)}\mathrm{d}t(k)=$$

$$\begin{cases}z(k), & z\in S^+,\\ -z^{-1}(k)[z(k)-1]^{-1}, & z\in S^-.\end{cases}$$

因 $\kappa=-1<0$, R 问题可解的 $-\kappa-1$ 个条件满足

$$\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}\mathrm{d}t(k)=\int_L\frac{t^3(k)-t^2(k)+1}{t^2(k)-t(k)}\mathrm{d}t(k)=$$

$$\int_L\left[t(k)-\frac{1}{t(k)}+\frac{1}{t(k)-1}\right]\mathrm{d}t(k)=0.$$

故非齐次 R 问题有唯一解:

$$F(z)=X(z)\psi(z)=\begin{cases}z(k), & z\in S^+,\\ -z^{-2}(k)[z(k)+1], & z\in S^-.\end{cases}$$

3　结　　论

在前面部分,本文给出 Cauchy 型 K-积分及其边界值性质,利用它分别得到单连通区域和多连通区域的 Riemann 边值问题有分片 K-解析函数解的条件和解的表达式,即定理 2.4、2.5. 这是因为围线 $L=L_0+L_1+\cdots+L_p$ 中,当 $L_1,L_2,\cdots,L_p$ 不存在时,以其为边界的区域就是单连通区域,定理 2.1~2.3 是定理 2.4、2.5 的特例;又当 $k=\pm1$ 时,K-解析函数[1-4,11-12,14-15]分别为解析函数[5-9]与共轭解析函数[5,10,13,16],因此以上所得结果包含了(共轭)解析函数中的相应结论[5,7-10,13],它们是(共轭)解析函数理论的继续和应用.

参考文献(References):

[1]　张建元. K-解析函数及其存在的条件[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2007, **16**(4): 298-302.(ZHANG Jian-yuan. K-analytic function and its subsistence conditions[J]. *Journal of Yunnan Nationalities University*(*Natural Science Edition*), 2007, **16**(4): 298-302.(in Chinese))

[2]　张建元. K-共形映射[J].西南大学学报(自然科学版), 2010, **32**(10): 119-125.(ZHANG Jian-yuan. K-conformal transformation[J]. *Journal of Southwest University*(*Natural Science Edition*), 2010, **32**(10): 119-125.(in Chinese))

[3]　张建元, 张毅敏, 姜锐武, 刘承萍. 复变函数的 K-积分[J]. 云南师范大学学报(自然科学版),

2009, **29**(1): 24-28.(ZHANG Jian-yuan, ZHANG Yi-min, JIANG Rui-wu, LIU Cheng-ping. K-integral of the functions of complex variable[J]. *Journal of Yunnan Normal University*(*Natural Science Edition*), 2009, **29**(1): 24-28.(in Chinese))

[4] 张毅敏, 张建元, 赵书芬. K-留数及其应用[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2010, **30**(2): 15-20.(ZHANG Yi-min, ZHANG Jian-yuan, ZHAO Shu-fen. K-residu and its application [J]. *Journal of Yunnan Normal University*(*Natural Science Edition*), 2010, **30**(2): 15-20.(in Chinese))

[5] 陈方权, 蒋绍惠. 解析函数论基础[M]. 北京: 北京师范大学出版, 1987: 24-346.(CHEN Fang-quan, JIANG Shao-hui. *On the Basis of Analytic Functions*[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1987: 24-346.(in Chinese))

[6] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版, 2004: 48-248.(ZHONG Yu-quan. *Complex Function Theory*[M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2004: 48-248.(in Chinese))

[7] 赵桢. 奇异积分方程[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1984: 37-46.(ZHAO Zhen. *Singular Integral Equation*[M]. Beijing: Beijing Normal University Press, 1984: 37-46.(in Chinese))

[8] 侯宗义, 李明忠, 张万国. 奇异积分方程论及其应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990: 1-64.(HOU Zong-yi, LI Ming-zhong, ZHANG Wan-guo. *Singular Integral Equations and Its Application*[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1990: 1-64.(in Chinese))

[9] 路见可. 解析函数边值问题教程[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2009: 1-76.(LU Jian-ke. *Boundary Value Problems for Analytic Functions Tutorial*[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2009: 1-76.(in Chinese))

[10] 张建元. 共轭解析函数的 Riemann 边值问题[J]. 北京工业大学学报, 1996, **22**(3): 99-106.(ZHANG Jian-yuan. Riemann's boundary value problem for conjugate analytic function[J]. *Journal of Beijing University of Technology*, 1996, **22**(3): 99-106.(in Chinese))

[11] 张建元, 刘秀, 吴科. K-对称变换及其 K 保圆(周)性[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2011, **37**(2): 167-171.(ZHANG Jian-yuan, LIU Xiu, WU Ke. K-symmetry transformation and its K-keeping the circumferenc[J]. *Journal of Southwest University for Nationalities*(*Natural Science Edition*), 2011, **37**(2): 167-171.(in Chinese))

[12] 张建元. K-解析变换下曲线的转向[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2011, **22**(3): 292-296.(ZHANG Jian-yuan. The rotation direction of the curve in K-analytic transformation[J]. *Journal of Jiangxi Normal University*(*Natural Science*), 2011, **22**(3): 292-296.(in Chinese))

[13] 张建元. 一类复调和函数的 Riemann 边值问题[J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 1996, **17**(1): 70-71, 78.(ZHANG Jian-yuan. Riemann's boundary value problem for a class of complex harmonic analytic function[J]. *Journal of Ningxia University*(*Natural Science Edition*), 1996, **17**(1): 70-71, 78.(in Chinese))

[14] 张建元, 张毅敏, 刘承萍, 姜锐武. K-解析函数的幂级数展开式[J]. 大理学院学报(自然科学版), 2009, **8**(4): 14-18.(ZHANG Jian-yuan, ZHANG Yi-min, LIU Cheng-ping, JIANG Rui-wu. Expansion of K- analytic function in power series[J]. *Journal of Dali University*(*Natural Science*), 2009, **8**(4): 14-18.(in Chinese))

[15] 张建元, 张毅敏, 熊绍武. K-解析函数的双边幂级数与孤立奇点[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2009, **18**(3): 198-201.(ZHANG Jian-yuan, ZHANG Yi-min, XIONG Shao-wu. Two sided power series and singular point of the K-analytic function[J]. *Journal of Yunnan Nation-*

alities University(*Natural Science Edition*), 2009, **18**(3): 198-201.(in Chinese))

[16] 王见定. 半解析函数、共轭解析函数[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1988: 17-71.(WANG Jian-ding. *Half Analytic Function*, *Conjugate Analytic Function*[M]. Beijing: Beijing University of Technology Press, 1988: 17-71.(in Chinese))

Riemann's Boundary Value Problem of K-Analytic Functions

ZHANG Jian-yuan[1], ZHAO Shu-fen[1,2], HAN Yan[1]

(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Zhaotong University*, *Zhaotong*, *Yunnan* 657000, *P.R.China*;

2. *Department of Mathematics*, *Harbin Institute of Technology*, *Harbin* 150001, *P.R.China*)

Abstract: First, the concepts of the (piecewise) K-analytic function and the Cauchy type K-integral were introduced, and some properties of the Cauchy type K-integral were studied through K-symmetry transformation. Then, with the function index of the curve and the properties of the Cauchy type K-integral, the solvable conditions and the solution expressions for the Riemann's boundary value problem of the K-analytic function as well as the relationship between the solutions and the index were obtained. Since both the analytic functions and the conjugate analytic functions are special cases of the K-analytic functions, the present conclusions generalize many known related results of them.

Key words: Cauchy type K-integral; (piecewise) K-analytic function; K-symmetry transformation; boundary value formula; Riemann's boundary value problem; index

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11061028)