

# 板列弯曲振动及功率流分析的 辛空间波传播方法\*

马永彬<sup>1</sup>, 张亚辉<sup>1</sup>, 曾耀祥<sup>2</sup>

(1. 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024;

2. 北京宇航系统工程研究所, 北京 100076)

(本刊编委张亚辉来稿)

**摘要:** 基于波传播理论,在辛空间下研究了由矩形薄板组成的板列结构的自由波属性以及受迫振动问题.通过将薄板弯曲振动控制方程导入辛对偶体系,得到了薄板波传播参数以及各阶波形的辛解析解.根据波在各板之间的传播、反射以及透射关系和叠加原理得到问题的解.给出了辛空间-波传播框架下各板动能、应变能以及板间功率流的计算表达式.相比传统波传播方法,该方法具有不受边界条件限制以及能够给出波模态辛解析解的特点.以一个三板组合结构为算例,通过与 ABAQUS 程序得到的有限元参考解进行对比,验证了所提出方法的高效性与精确性.由于完全基于理性推导,不涉及任何试函数的引入,因此该方法也可推广应用于由其他类型板(如中厚板、层合板等)组合的板列结构动力响应分析问题.

**关键词:** 辛对偶体系; 组合板列; 功率流

**中图分类号:** O326      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.08.002

## 引 言

由矩形薄板组成的板列在船体、汽车及飞机等工程结构中有着大量的应用.这些交通工具在运行过程中,会经历频带非常宽的荷载作用,由此产生的振动不但会引起结构的局部疲劳破坏,也会使舱(车)内形成高声压级的恶劣动力学环境并可诱发声致疲劳,从而大大降低整个系统的安全性、可靠性和舒适性.目前的分析方法只能处理特定频带内的动力响应问题,有些方法适合于低频段分析,而有些方法只对高频段分析有效.有限元法(FEM)<sup>[1]</sup>等离散化方法在结构动力分析中应用最为广泛,但是对于高频振动问题,这类方法需要划分足够精细的网格才能准确地描述结构的变形,导致计算成本急剧增大甚至于无法接受.统计能量分析(SEA)<sup>[2]</sup>通常被认为是高频振动问题最为有效的分析工具,能够快速地对评估各子系统的振动.然而高模态密度、弱耦合等基本假设将 SEA 限制于高频段<sup>[3-4]</sup>.对于低频段与高频段之间的中频振动问

\* 收稿日期: 2014-03-12; 修订日期: 2014-06-17

基金项目: 国家自然科学基金(11172056);国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2014CB046803)

作者简介: 马永彬(1985—),男,西安人,博士生(E-mail: mayb@mail.dlut.edu.cn);

张亚辉(1972—),男,河北昌黎人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhangyh@dlut.edu.cn).

题,在应用 FEM 和 SEA 进行分析时则分别面临计算成本过高和模态密集程度不足困难。为了解决中频振动问题,近年来国内外学者陆续提出并发展了一些新的方法。这些方法大致可分为两类:第一类方法相比 FEM 能分析更高频段的振动问题,这类方法中有些是基于 FEM<sup>[5-6]</sup>,有些是基于波方法<sup>[7-12]</sup>,有些方法则是将波动理论和 FEM 相结合<sup>[13-14]</sup>;第二类是放松 SEA 的某些假设,使得分析频率范围向更低频段拓展,包括波强度分析<sup>[15]</sup>、统计模态能量分析<sup>[16]</sup>、能量有限元法<sup>[17]</sup>以及 FE-SEA 混合方法<sup>[18]</sup>等。虽然上述这些方法均在某一方面具有比较显著的优势,但同时也受到本身假设条件的限制。以基于波动理论的各种方法为例,有些方法只能处理对边简支边界条件<sup>[7-9]</sup>;有些方法忽略了近场波成分<sup>[9]</sup>;而有些方法则在精度和数值稳定性方面存在问题<sup>[14]</sup>。

本文基于波传播理论,应用钟万勰等<sup>[19-22]</sup>提出并发展的辛空间方法,针对由矩形薄板组合而成的板列结构的中频振动问题,提出一种新的高效分析方法。从波的角度描述结构的振动行为,相比模态方法在计算精度和效率方面更具优势<sup>[18]</sup>,辛空间方法的引入,则克服了传统波方法在具体应用中的不足。将板的振动方程导入辛对偶体系,得到的本征值与本征向量恰好分别是波传播方法需要的波传播参数与波形,并且较传统波方法只能在四边简支时才能给出 Navier 形式的闭合解,辛方法在任意简单边界组合下均能提供波模态的辛解析解,对此类板列结构中低频段的振动分析具有显著的优势。值得注意的是,本文方法容易考虑剪切变形和转动惯量的影响,从而可对更高频段的振动问题进行分析,这里只基于薄板理论给出基本的推导过程。

## 1 弹性薄板波传播问题的辛空间描述

应用辛对偶体系描述弹性薄板的弯曲振动,通过求解辛本征值问题,得到薄板波传播参数和波形,从而将物理空间的受迫振动问题映射到波空间。

### 1.1 薄板弯曲振动问题导入辛对偶体系

考虑如图 1 所示由  $N$  个矩形薄板组成的板列。对于稳态振动问题,板的挠度可以写为  $\text{Re}\{w(x,y)e^{i\omega t}\}$ ,因此振动方程可通过  $w(x,y)$  在频域内求解。横截面单位长度上的剪力、弯矩和扭矩( $Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$ ) 正方向的规定如图 1 所示,并且有关系式:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, Q_y = -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \omega^2 w, \quad (1)$$

$$M_x = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

其中,  $D = (E(1+i\eta)h^3)/(12(1-\nu^2))$  为板的弯曲刚度;  $E, \nu$  分别为弹性模量和 Poisson(泊松)比;  $\eta, i$  为阻尼损耗因子和虚数单位;  $\rho, h$  为板的密度和厚度。定义等效剪力

$$F_x = Q_x - \partial M_{xy} / \partial y, F_y = Q_y - \partial M_{xy} / \partial x. \quad (3)$$

令  $\theta = \partial w / \partial y$ , 由式(1)~(3)可得辛对偶体系下弹性薄板的控制方程为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}\mathbf{z}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{z} = \{w \ \theta \ F_y \ M_y\}^T$  为状态向量,  $(\cdot)$  表示关于  $y$  的导数,  $\mathbf{H}$  为 Hamilton(哈密顿)算子矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\nu \partial^2 / \partial x^2 & 0 & 0 & -1/D \\ -D(1-\nu^2) \partial^4 / \partial x^4 + \rho h \omega^2 & 0 & 0 & \nu \partial^2 / \partial x^2 \\ 0 & 2D(1-\nu) \partial^2 / \partial x^2 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

方程(4)的解为  $\mathbf{z}(x, y) = \boldsymbol{\eta}(x) e^{\mu_y y}$ ,  $\boldsymbol{\eta}(x)$  为仅与  $x$  有关的向量,  $\mu_y$  为  $y$  方向的波传播参数. 将其代入方程(4)得到辛本征值问题:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\eta}(x) = \mu_y \boldsymbol{\eta}(x). \quad (6)$$

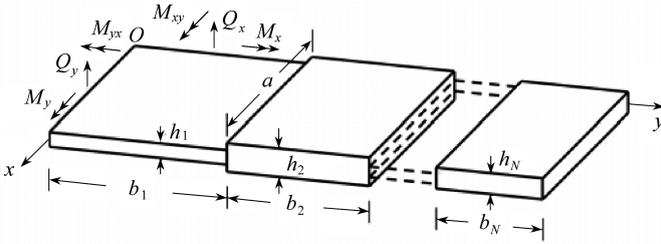


图1 板列及坐标系示意图

Fig.1 Schematic of the plate array and the associated co-ordinate system

## 1.2 辛本征问题的求解

求解方程(6), 考虑  $\boldsymbol{\eta}(x)$  中各变量在  $x$  方向上有相同变化形式, 即  $\boldsymbol{\eta}(x) = \boldsymbol{\phi} e^{\mu_x x}$ ,  $\boldsymbol{\phi}$  为与  $x$  无关的常向量,  $\mu_x$  为  $x$  方向的波传播参数. 将  $\boldsymbol{\eta}(x)$  代入方程(6), 得到

$$\begin{bmatrix} -\mu_y & 1 & 0 & 0 \\ -\nu \mu_x^2 & -\mu_y & 0 & -1/D \\ -D(1-\nu^2) \mu_x^4 + D k_b^4 & 0 & -\mu_y & \nu \mu_x^2 \\ 0 & 2D(1-\nu) \mu_x^2 & -1 & -\mu_y \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

其中  $k_b = (\rho h \omega^2 / D)^{1/4}$  为板弯曲波数. 求解式(7)的特征方程  $\mu_x^4 + 2\mu_y^2 \mu_x^2 + \mu_y^4 - k_b^4 = 0$ , 可得

$$\mu_{x,1} = -ik_1, \mu_{x,2} = ik_1, \mu_{x,3} = -ik_2, \mu_{x,4} = ik_2, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{1,2} = \{1 \quad \mu_y \quad \chi_1 \quad \chi_2\}^T, \boldsymbol{\phi}_{3,4} = \{1 \quad \mu_y \quad \chi_3 \quad \chi_4\}^T, \quad (9)$$

其中

$$k_1 = (\mu_y^2 - k_b^2)^{1/2}, k_2 = (\mu_y^2 + k_b^2)^{1/2},$$

$$\chi_1 = \mu_y D(2k_b^2 + \nu \mu_y^2 - \nu k_b^2 - \mu_y^2),$$

$$\chi_2 = D(\nu \mu_y^2 - \nu k_b^2 - \mu_y^2),$$

$$\chi_3 = \mu_y D(-2k_b^2 + \nu \mu_y^2 + \nu k_b^2 - \mu_y^2),$$

$$\chi_4 = D(\nu \mu_y^2 + \nu k_b^2 - \mu_y^2).$$

于是,  $\boldsymbol{\eta}(x)$  可以写为

$$\boldsymbol{\eta}(x) = \sum_{i=1}^4 s_i \boldsymbol{\phi}_i e^{\mu_{x,i} x}, \quad (10)$$

式中,  $s_i$  为待定系数, 记  $\mathbf{s} = \{s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4\}^T$ . 至此, 基于辛对偶体系给出了薄板的波形向量的一般表达式. 下面考虑对边界条件来得到  $\mu_y$  与  $\mathbf{s}$ , 进而得到波形矩阵.

### 1.3 求解波传播参数与波形

篇幅所限,这里仅给出对边简支、固支两种边界下传播参数 $\mu_y$ 和系数向量 $\mathbf{s}$ 。

对边简支边界条件为

$$w(x)|_{x=0,a} = 0, \quad \partial^2 w(x)/\partial x^2|_{x=0,a} = 0. \quad (11)$$

将式(10)代入上式可得到

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-ik_1 a} & e^{ik_1 a} & e^{-ik_2 a} & e^{ik_2 a} \\ -k_1^2 & -k_1^2 & -k_2^2 & -k_2^2 \\ -k_1^2 e^{-ik_1 a} & -k_1^2 e^{ik_1 a} & -k_2^2 e^{-ik_2 a} & -k_2^2 e^{ik_2 a} \end{bmatrix} \mathbf{s} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$\mathbf{s}$ 存在非平凡解的条件是系数矩阵行列式为0。于是可得 $\mu_y$ 满足的超越方程:

$$\sin(k_1 a) \sin(k_2 a) = 0. \quad (13)$$

因此波传播参数为

$$\mu_{y,n} = \pm \sqrt{(n\pi/a)^2 \pm k_b^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

进而由方程(12)得到系数向量 $\mathbf{s}$ 的一组非平凡解:

$$s_1 = -s_2 = \sin(k_2 a), \quad s_4 = -s_3 = \sin(k_1 a). \quad (15)$$

考虑对边固支:  $w(x)|_{x=0,a} = 0, \partial w(x)/\partial x|_{x=0,a} = 0$ , 同样地可得 $\mu_y$ 满足的超越方程为

$$k_1 k_2 - \mu_y^2 \sin(k_1 a) \sin(k_2 a) - k_1 k_2 \cos(k_1 a) \cos(k_2 a) = 0, \quad (16)$$

以及 $\mathbf{s}$ 的一组非平凡解:

$$\begin{cases} s_1 = k_2 e^{ik_1 a} - ik_1 \sin(k_2 a) - k_2 \cos(k_2 a), \\ s_2 = -k_2 e^{-ik_1 a} - ik_1 \sin(k_2 a) + k_2 \cos(k_2 a), \\ s_3 = -k_1 [\cos(k_1 a) - e^{ik_2 a}] - ik_2 \sin(k_1 a), \\ s_4 = k_1 [\cos(k_1 a) - \cos(k_2 a) + i \sin(k_2 a)] - ik_2 \sin(k_1 a). \end{cases} \quad (17)$$

这里需要注意两个特殊的情况: 1)  $k_1 = 0$ ; 2)  $k_2 = 0$ , 由式(8)、(10)、(15)和(17)均有 $\boldsymbol{\eta}(x) = \mathbf{0}$ , 即为平凡解, 将不予考虑。另外, 本文研究的是稳态受迫振动问题, 激励频率不为0, 所以不考虑静力分析中辛本征值的重根问题。

通过求解方程(13)和(16)便可得到各阶波的传播参数 $\mu_y$ , 进而得到系数向量 $\mathbf{s}$ , 再由式(10)便可得到各阶波形 $\boldsymbol{\eta}(x)$ 。对边简支边界可以得到解析解形式的波传播参数, 而其它简单边界条件组合下的超越方程一般不容易得到显式解, 此时可通过数值方法求解。从 $\mu_y$ 的超越方程知 $\mu_y$ 与 $-\mu_y$ 是成对出现的, 即正向波和负向波是成对出现的。在后面的具体应用中, 对波传播参数按辛共轭正交性质<sup>[19]</sup>排序, 即 $\mu_{y,1}, \mu_{y,2}, \dots, \mu_{y,m}, -\mu_{y,1}, -\mu_{y,2}, \dots, -\mu_{y,m}$ , 其中 $m$ 是正向波的个数。正向波的波传播参数 $\mu_{y,i}$ 满足 $\text{Re}\{\mu_{y,i}\} < 0$ 或者 $\text{Re}\{\mu_{y,i}\} = 0, \text{Im}\{\mu_{y,i}\} < 0$ , 且按照虚部从小到大排序, 将实部为0的波传播参数排在前面, 然后按照实部从大到小的顺序排列实部小于0的波传播参数。基于波形的辛共轭正交关系, 还需要对波形进行归一化处理。然后便可将物理坐标下的受迫振动问题转换到以正、负波幅 $\mathbf{c}^+, \mathbf{c}^-$ 所表征的波空间, 即

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^+ \mathbf{c}^+ + \mathbf{A}^- \mathbf{c}^- = \mathbf{A} \mathbf{c}, \quad (18)$$

其中, 波形矩阵 $\mathbf{A} = [\mathbf{A}^+ \quad \mathbf{A}^-] = [\boldsymbol{\eta}_1(x) \quad \boldsymbol{\eta}_2(x) \quad \dots \quad \boldsymbol{\eta}_{2m}(x)]$ , 各波形顺序与波传播参数的顺序一致,  $\mathbf{c} = [(\mathbf{c}^+)^T \quad (\mathbf{c}^-)^T]^T$ , 以下将 $(\mathbf{c}^+)^T, (\mathbf{c}^-)^T$ 简记为 $\mathbf{c}^{+T}, \mathbf{c}^{-T}$ , 其它变量类似。波形矩阵的共轭辛正交性质为

$$\int_0^a \mathbf{A}^T \mathbf{J}_2 \mathbf{A} dx = \mathbf{J}_m, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{I}_2, \mathbf{I}_m$  分别为 2 阶和  $m$  阶单位阵.

## 2 受迫振动的波传播分析

波空间下结构的振动响应分析可分为 3 个步骤:1) 确定直接激励波波幅;2) 计算波反射、散射矩阵;3) 综合直接激励波、波反射、散射以及波传播关系,得到任意位置正、负向波的波幅,进而由式(18)得到任意位置的响应.

### 2.1 确定直接激励波波幅

外力使结构自作用位置向两侧产生直接激励波,波幅用  $\mathbf{e}^+$  和  $\mathbf{e}^-$  表示.考虑激励作用位置的位移协调以及力平衡条件可得

$$[\mathbf{A}^+ \quad \mathbf{A}^-][\mathbf{e}^{+T} \quad -\mathbf{e}^{-T}]^T = [\mathbf{0} \quad \mathbf{f}^{\text{ext},T}]^T, \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  为外载荷.考虑式(19)给出的共轭辛正交性质,则进一步得到

$$[\mathbf{e}^{+T} \quad -\mathbf{e}^{-T}]^T = -\mathbf{J}_m \int_0^a [\mathbf{A}^+ \quad \mathbf{A}^-]^T \mathbf{J}_2 [\mathbf{0} \quad \mathbf{f}^{\text{ext},T}]^T dx. \quad (21)$$

### 2.2 波反射矩阵

正向波  $\mathbf{v}^+$  入射到边界上会产生负向波  $\mathbf{v}^-$ .  $\mathbf{v}^+$  与  $\mathbf{v}^-$  之间满足的关系可以表述为

$$\mathbf{E} \mathbf{A} [\mathbf{v}^{+T} \quad \mathbf{v}^{-T}]^T = \mathbf{0}, \quad (22)$$

其中,  $\mathbf{E}$  为约束自由度的指示矩阵.例如,对于简支边界,  $\mathbf{E} = \text{diag}\{1, 0, 0, 1\}$ . 式(22)两边同时左乘  $\mathbf{A}^{+T} \mathbf{J}_2$ , 并关于  $x$  积分得到

$$[\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2][\mathbf{v}^{+T} \quad \mathbf{v}^{-T}]^T = \mathbf{0}, \quad (23)$$

其中,  $\mathbf{U}_1$  与  $\mathbf{U}_2$  的表达式与边界条件有关,例如对于简支边界

$$[\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] = \int_0^a \{ \mathbf{A}_\theta^{+T}(x) \mathbf{A}_M(x) - \mathbf{A}_F^{+T}(x) \mathbf{A}_w(x) \} dx,$$

式中下标  $w, \theta, F$  和  $M$  分别对应挠度、转角、剪力和弯矩.由式(23)得

$$\mathbf{v}^- = -\mathbf{U}_2^{-1} \mathbf{U}_1 \mathbf{v}^+ = \mathbf{R} \mathbf{v}^+, \quad (24)$$

其中,  $\mathbf{R} = -\mathbf{U}_2^{-1} \mathbf{U}_1$  为反射矩阵.如果  $\mathbf{v}^-, \mathbf{v}^+$  分别为入射波和反射波则有  $\mathbf{R} = -\mathbf{U}_1^{-1} \mathbf{U}_2$ .

### 2.3 波散射矩阵

如图 2 所示,板  $j$  和板  $j+1$  在连接位置处波幅  $\mathbf{a}_{j,r}$  与  $\mathbf{a}_{j+1,l}$  的协调关系可表示为  $\mathbf{\Gamma}_j^{-1} \mathbf{A}_j \mathbf{a}_{j,r} = \mathbf{\Gamma}_{j+1}^{-1} \mathbf{A}_{j+1} \mathbf{a}_{j+1,l}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_j$  和  $\mathbf{\Gamma}_{j+1}$  为坐标转换矩阵.进一步考虑波形矩阵的共轭辛正交性质可得

$$\mathbf{a}_{j,r} = \mathbf{P}_{j,j+1} \mathbf{a}_{j+1,l}, \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{P}_{j,j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}_m \int_0^a \mathbf{A}_j^T \mathbf{J}_2 \mathbf{\Gamma}_j \mathbf{\Gamma}_{j+1}^{-1} \mathbf{A}_{j+1} dx$$

为波传递矩阵.由式(25)进一步可得

$$[\mathbf{a}_{j,r}^{-T} \quad \mathbf{a}_{j+1,l}^{+T}]^T = \mathbf{S} [\mathbf{a}_{j,r}^{+T} \quad \mathbf{a}_{j+1,l}^{-T}]^T, \quad (26)$$

其中

$$S = \begin{bmatrix} P_{21}P_{11}^{-1} & P_{22} - P_{21}P_{11}^{-1}P_{12} \\ P_{11}^{-1} & -P_{11}^{-1}P_{12} \end{bmatrix}$$

是板  $j$  与板  $j+1$  在连接处的波散射矩阵。

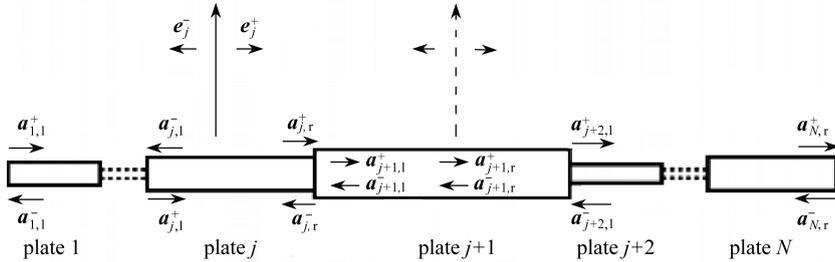


图2 结构的波传播示意图

Fig.2 Schematic of wave propagation in the structure

## 2.4 建立波传播关系并求解

至此,我们已经得到波的反射、散射系数矩阵以及直接激励波幅,以此为基础来建立以各板左右两端波幅为未知量的系统平衡方程.板  $j$  两端入射波可以用两端的反射波表示为

$$[a_{j,r}^{+T} \ a_{j,l}^{-T}]^T = \tilde{T}_j [a_{j,r}^{-T} \ a_{j,l}^{+T}]^T + \check{T}_j [e_j^{+T} \ e_j^{-T}]^T, \quad (27)$$

其中,  $T_j(y) = \text{diag} \{ e^{\mu_{y1,j}y}, \ e^{\mu_{y2,j}y}, \ \dots, \ e^{\mu_{ym,j}y} \}$  为波传播矩阵,

$$\tilde{T}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & T_j(b_j) \\ T_j(b_j) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \check{T}_j = \text{diag} \{ T_j(b_j - y_{e,j}), T_j(y_{e,j}) \},$$

$y_{e,j}$  为作用力在  $y$  方向的坐标。

于是可建立整体结构所有不连续处入射波和反射波的关系:

$$\psi = \text{diag} \{ \tilde{T}_j \} \varphi + \text{diag} \{ \check{T}_j \} \rho, \quad (28)$$

其中

$$\psi = [a_{1,r}^{+T} \ a_{1,l}^{-T} \ a_{2,r}^{+T} \ a_{2,l}^{-T} \ \dots \ a_{j,r}^{+T} \ a_{j,l}^{-T} \ \dots \ a_{N,r}^{+T} \ a_{N,l}^{-T}]^T, \quad (29)$$

$$\varphi = [a_{1,r}^{-T} \ a_{1,l}^{+T} \ a_{2,r}^{-T} \ a_{2,l}^{+T} \ \dots \ a_{j,r}^{-T} \ a_{j,l}^{+T} \ \dots \ a_{N,r}^{-T} \ a_{N,l}^{+T}]^T, \quad (30)$$

$$\rho = [e_1^{+T} \ e_1^{-T} \ e_2^{+T} \ e_2^{-T} \ \dots \ e_j^{+T} \ e_j^{-T} \ \dots \ e_N^{+T} \ e_N^{-T}]^T. \quad (31)$$

另外,根据板  $j-1$ 、板  $j$  和板  $j+1$  在连接处的散射关系,由式(26)得到

$$[a_{j,r}^{-T} \ a_{j,l}^{+T}]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_{j,j+1}^{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_{j,j+1}^{12} \\ S_{j-1,j}^{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S_{j-1,j}^{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \times \\ [a_{j-1,r}^{+T} \ a_{j-1,l}^{-T} \ a_{j,r}^{+T} \ a_{j,l}^{-T} \ a_{j+1,r}^{+T} \ a_{j+1,l}^{-T}]^T. \quad (32)$$

结合两侧边界上的波反射关系,由式(32)可建立整体结构的反射波和入射波的关系:

$$\varphi = \tilde{S} \psi, \quad (33)$$

式中  $\tilde{S}$  可由式(32)的系数矩阵组装得到.将式(33)代入式(28)可得

$$\psi = (\mathbf{I} - \text{diag} \{ \tilde{T}_j \} \tilde{S})^{-1} (\text{diag} \{ \check{T}_j \} \rho), \quad (34)$$

再由式(33)得到  $\varphi$ .于是便得到了各板两端的波幅.板  $j$  的位移与内力响应则可表示为

$$z_j(x, y) = A_j(x) \hat{T}_j(y) [a_{j,l}^{+T} \ a_{j,r}^{-T}]^T + z_j^e, \quad (35)$$

其中,  $\hat{\mathbf{T}}_j(y) = \text{diag} \{ \mathbf{T}_j(y), \mathbf{T}_j(b_j - y) \}$ ,  $\mathbf{z}_j^e$  为外力作用的附加项. 如果板  $j$  内没有外力作用, 则  $\mathbf{z}_j^e$  值为 0. 如果有外力作用则需要分两种情况计算:

$$\begin{cases} \mathbf{z}_j^e = \mathbf{A}_j(x) \mathbf{T}_{j,l} \mathbf{e}_j, & y \leq y_{e,j}; \\ \mathbf{z}_j^e = \mathbf{A}_j(x) \mathbf{T}_{j,r} \mathbf{e}_j, & y > y_{e,j}, \end{cases} \quad (36)$$

其中,  $\mathbf{T}_{j,l} = \text{diag} \{ \mathbf{0}, \mathbf{T}_j(y_{e,j} - y) \}$ ,  $\mathbf{T}_{j,r} = \text{diag} \{ \mathbf{T}_j(y - y_{e,j}), \mathbf{0} \}$ , 子矩阵  $\mathbf{0}$  与  $\mathbf{T}_j$  同等大小.

### 3 能量与功率流

#### 3.1 动能与应变能

高频激励环境下更关注结构的稳态能量以及部件之间的稳态功率流. 由式 (35) 知

$$\mathbf{w}_j(x, y)^T = \mathbf{A}_{j,w} \hat{\mathbf{T}}_j [\mathbf{a}_{j,l}^{+T} \quad \mathbf{a}_{j,r}^{-T}]^T + \mathbf{z}_{j,w}^e. \quad (37)$$

于是可得板的动能、应变能时间均值分别为

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle_j &= \rho_j h_j \omega^2 / 4 \times \\ &\text{Re} \left( [\mathbf{a}_{j,l}^{+H} \quad \mathbf{a}_{j,r}^{-H}] \int_0^{b_j} \hat{\mathbf{T}}_j^H \mathbf{\Omega}_k \hat{\mathbf{T}}_j dy [\mathbf{a}_{j,l}^{+T} \quad \mathbf{a}_{j,r}^{-T}]^T \right) + \rho_j h_j \omega^2 \xi_j^k / 4, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \langle E_s \rangle_j &= h_j / 4 \times \\ &\text{Re} \left( [\mathbf{a}_{j,l}^{+H} \quad \mathbf{a}_{j,r}^{-H}] \int_0^{b_j} \hat{\mathbf{T}}_j^H \mathbf{\Omega}_s \hat{\mathbf{T}}_j dy [\mathbf{a}_{j,l}^{+T} \quad \mathbf{a}_{j,r}^{-T}]^T \right) + h_j \xi_j^s / 4, \end{aligned} \quad (39)$$

其中,  $(\cdot)^H$  表示共轭转置,  $\mathbf{\Omega}_k = \int_0^a \mathbf{A}_{j,w}^H \mathbf{A}_{j,w} dx$ ,  $\mathbf{\Omega}_s = \int_0^a \tilde{\mathbf{A}}_j^H \tilde{\mathbf{A}}_j dx$ ,  $\xi_j^k$  和  $\xi_j^s$  为外界激励产生的附加项, 如果所在板没有外界激励, 则这两项值为 0. 具体表达式为

$$\begin{aligned} \xi_j^k &= \text{Re} \left( [\mathbf{a}_{j,l}^{+H} \quad \mathbf{a}_{j,l}^{-H}] \left( \int_0^{y_{e,j}} \hat{\mathbf{T}}_j^H \mathbf{\Omega}_k \mathbf{T}_{j,l} dy + \int_{y_{e,j}}^{b_j} \hat{\mathbf{T}}_j^H \mathbf{\Omega}_k \mathbf{T}_{j,r} dy \right) [\mathbf{e}_j^{+T} \quad \mathbf{e}_j^{-T}]^T + \right. \\ &[\mathbf{e}_j^{+H} \quad \mathbf{e}_j^{-H}] \left( \int_0^{y_{e,j}} \mathbf{T}_{j,l}^H \mathbf{\Omega}_k \hat{\mathbf{T}}_j dy + \int_{y_{e,j}}^{b_j} \mathbf{T}_{j,r}^H \mathbf{\Omega}_k \hat{\mathbf{T}}_j dy \right) [\mathbf{a}_{j,l}^{+T} \quad \mathbf{a}_{j,l}^{-T}]^T + \\ &\left. [\mathbf{e}_j^{+H} \quad \mathbf{e}_j^{-H}] \left( \int_0^{y_{e,j}} \mathbf{T}_{j,l}^H \mathbf{\Omega}_k \mathbf{T}_{j,l} dy + \int_{y_{e,j}}^{b_j} \mathbf{T}_{j,r}^H \mathbf{\Omega}_k \mathbf{T}_{j,r} dy \right) [\mathbf{e}_j^{+T} \quad \mathbf{e}_j^{-T}]^T \right), \end{aligned} \quad (40)$$

将  $\xi_j^k$  表达式中的  $\mathbf{\Omega}_k$  替换成  $\mathbf{\Omega}_s$  即可得到  $\xi_j^s$ . 另外

$$\tilde{\mathbf{A}}_j = \sum_{i=1}^4 s_i \begin{Bmatrix} \mu_{x,i}^2 \\ \mu_{y,j}^2 \\ 2\mu_{x,i} \mu_{y,j} \end{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_{i,1} e^{\mu_{x,i} x}, \quad \tilde{\mathbf{\Xi}} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu/2 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

#### 3.2 功率流

板之间的功率流可通过两板连接处的位移与内力获得. 板  $j-1$  对板  $j$  的输入功率为

$$\langle \Pi \rangle_{j-1,j} = 1/2 \int_0^a \text{Re} (i \omega \mathbf{f}_j^H \mathbf{q}_j) dx, \quad (42)$$

其中,  $\mathbf{q}_j = \{ w_j(x) \quad \theta_j(x) \}^T$ ,  $\mathbf{f}_j = \{ F_j(x) \quad M_j(x) \}^T$ . 结合式 (18) 得到

$$\langle \Pi \rangle_{j-1,j} = -\frac{\omega}{2} \text{Im} \left( [\mathbf{a}_{j,l}^{+H} \quad \mathbf{a}_{j,l}^{-H}] \mathbf{\Omega}_{\Pi} [\mathbf{a}_{j,l}^{+T} \quad \mathbf{a}_{j,l}^{-T}]^T \right), \quad (43)$$

其中,  $\mathbf{\Omega}_{\Pi} = \int_0^a \{ \mathbf{A}_F^H(x) \mathbf{A}_w(x) + \mathbf{A}_M^H(x) \mathbf{A}_\theta(x) \} dx$ .

## 4 算例

考虑由 3 个矩形薄板构成的板列结构,如图 1 所示.各板的宽度均为 0.5 m,长度均为 0.7 m,厚度分别为 0.002 m、0.003 m 和 0.004 m.各板的弹性模量、密度与 Poisson 比也都一致,分别为 71 GPa、2 700 kg/m<sup>3</sup> 和 0.3.各板的阻尼损耗因子均为  $\eta = 0.03$ .3 个板纵向对边均简支,第一个板与最后一个板的侧边为简支边界.第一个板受到横向点激励(作用位置为  $x_{e,1} = 0.4a$ ,  $y_{e,1} = 0.4b_1$ ),激励频率范围为 1~1 000 Hz.

### 4.1 输入点导纳

首先,采用 ABAQUS 有限元软件计算板列的输入点导纳,并确定有限元参考解.为了考察有限元网格粗细对计算结果的影响,给出 3 种网格划分方式,单元总数分别为 66 150(网格 1)、107 742(网格 2)和 156 821(网格 3).网格 3 的网格大小与板厚度相同.图 3 给出了模态取到 223 阶(此时结构自振频率为 2 003.2 Hz)时采用网格 1、网格 2 与网格 3 输入点导纳结果的相对误差.可以看出采用前两种网格与网格 3 的计算结果有较大差异,因此后续有限元计算结果都基于网格 3.

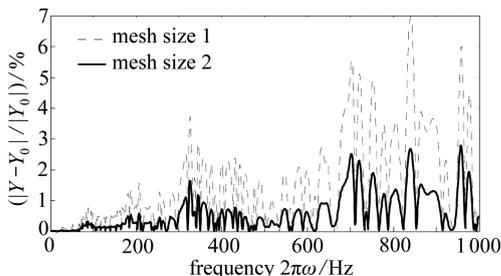


图 3 ABAQUS 程序不同有限元网格下的输入点导纳的比较(以网格 3 为基准)

Fig.3 The relative tolerance of magnitude of the input admittance calculated by ABAQUS software with different mesh sizes (compared with the result of mesh size 3)

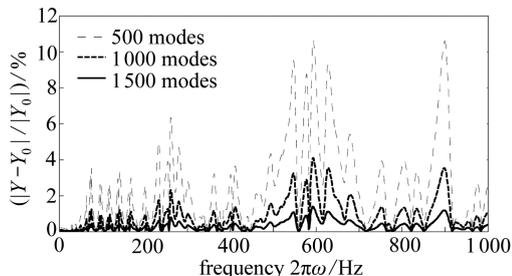


图 4 ABAQUS 程序不同模态数下输入点导纳的相对误差(以 2 000 阶模态为基准)

Fig.4 The relative tolerance of magnitude of the input admittance calculated by ABAQUS software with different mode numbers (compared with the result of 2 000 modes)

ABAQUS 计算得到的结构自振频率分布为:(131 阶,1 208.0 Hz),(223 阶,2 003.2 Hz),(500 阶,4 328.4 Hz),(1 000 阶,8 508.4 Hz),(1 500 阶,12 566.0 Hz),(2 000 阶,16 587.0 Hz).图 4 给出了在模态叠加中分别选取 500 阶、1 000 阶和 1 500 阶模态时输入点导纳与选取 2 000 阶模态时的相对误差.可以看到取 1 500 阶模态的相对误差在整个频域内都小于 1%.因此,将采用网格 3、取 1 500 阶模态的有限元计算结果将作为本文方法的参考解.

图 5 比较了本文方法分别选取 30、40、70 对波与选取 80 对波得到的输入点导纳的相对误差.可以看出 70 对波与 80 对波的结果已经非常接近,最大相对误差为 0.34%.事实上本文方法取 40 对波便能得到与参考解同等精度的解,如图 6 所示.此时本文方法与参考解的计算时间比为 698 : 27 950.因此,本文方法具有很高的计算精度和计算效率.

### 4.2 稳态能量分布与功率流

结构的近场波会随着传播距离的增加急剧消逝.虽然在计算结构的局部响应时近场波不可忽略,但在计算能量及功率流时考虑较少近场波即可.图 7~9 分别为本文方法取 20 对波以

及参考解给出的结构总能量和各板稳态应变能与动能.图 10 是板间功率流  $\langle \Pi \rangle_{1,2}$  和  $\langle \Pi \rangle_{2,3}$ . 图 11 是前两个板的能量传递效率,即  $\langle \Pi \rangle_{1,2}/\langle \Pi \rangle_{in,1}$  和  $\langle \Pi \rangle_{2,3}/\langle \Pi \rangle_{in,2}$ ,其中  $\langle \Pi \rangle_{in,1}$  为外力输入给第一个板的功率, $\langle \Pi \rangle_{in,2} = \langle \Pi \rangle_{1,2}$  为第一个板输入给第二个板的功率.可以看到在 28 Hz 到 69 Hz 间第一个板的功率传递效率均大于 0.5,也就是传递给第二个板的能量大于它本身耗散掉的能量;并且在 40 Hz 处达到最大值 0.79.在 676 Hz 后,第一个板的能量传递效率总是低于第二个板的.因此可以基于这样的能量、功率流分析对结构整体动力特性有一个初步的把握.基于方法的高效性,可以多次对模型进行修改完善而不会受到计算时间过长的困扰.

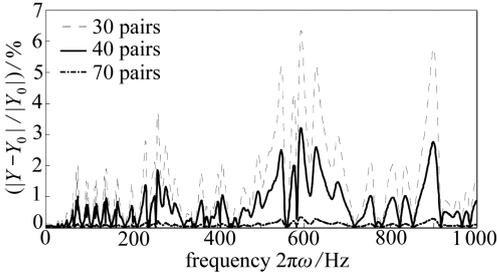


图 5 本文方法不同波形数量下输入点导纳的比较(以 80 对波形为基准)

Fig.5 The relative tolerance of magnitude of the input admittance calculated by the presented method with different numbers of wave modes (compared with the result of 80 pairs)

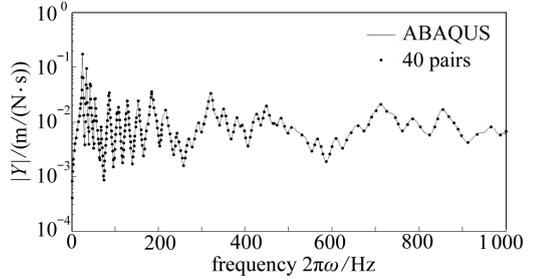


图 6 本文方法(40 对波形)与 ABAQUS 程序(1 500 阶模态)输入点导纳的比较

Fig.6 Comparison of magnitude of the input admittance calculated by ABAQUS (with 1 500 modes) with that by the presented method (with 40 pairs of waves)

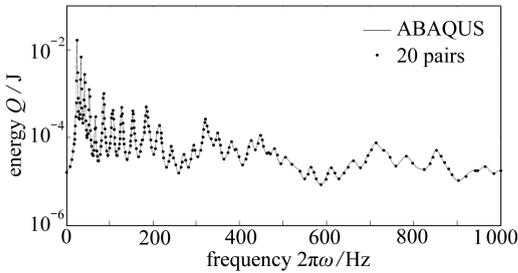


图 7 整体结构的总能量

Fig.7 Energy of the whole structure

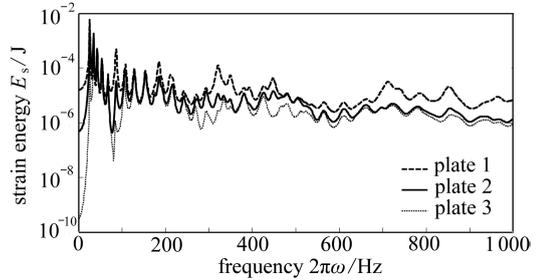


图 8 各板件应变能

Fig.8 Strain energy of each plate

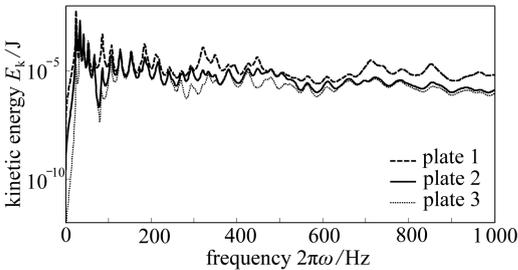


图 9 各板件动能

Fig.9 Kinetic energy of each plate

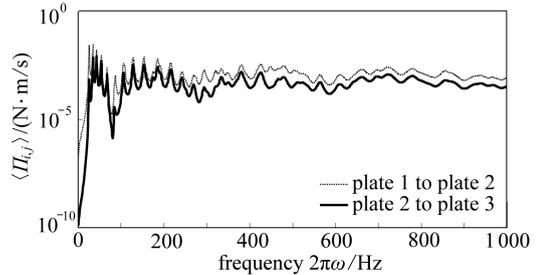


图 10 板之间功率流

Fig.10 Power flow between plates

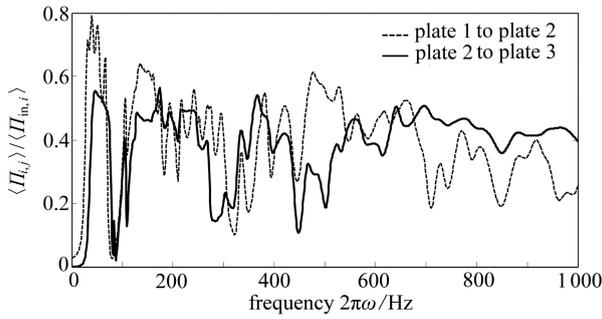


图 11 板的能量传递效率

Fig.11 The energy transmission efficiency

## 5 结 论

本文基于辛空间方法与波传播理论,分析了由矩形薄板组合而成的板列结构的受迫振动响应,从而将辛空间方法拓展应用于板列结构中高频振动分析领域.和某些数值波方法相比,本文方法具有更高的精度和稳定性,同时克服了传统解析波方法受限于边界条件的困难.与有限元参考解的对比说明了本文方法的高效性与精确性.另外本文还推导了辛空间-波传播理论框架下动能、应变能以及功率流的表达式,并分析了算例结构的能量分布与功率流.这在结构振动预示阶段具有重要的意义.本文方法可进一步推广应用于由其他类型板(如中厚板、层合板等)组合的板列结构的中高频振动问题中.

### 参考文献(References):

- [1] Petyt M. *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [2] Lyon R H, DeJong R G. *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*[M]. Boston: Butterworth-Heinemann, 1995.
- [3] Woodhouse J. An introduction to statistical energy analysis of structural vibration[J]. *Applied Acoustics*, 1981, **14**(6): 455-469.
- [4] Mace B R, Rosenberg J. The SEA of two coupled plates: an investigation into the effects of subsystem irregularity[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **212**(3): 395-415.
- [5] Silvester P. A general high-order finite-element analysis program waveguide[J]. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 1969, **17**(4): 204-210.
- [6] Koshiba M, Maruyama S, Hirayama K. A vector finite element method with the high-order mixed-interpolation-type triangular elements for optical waveguiding problems[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 1994, **12**(3): 495-502.
- [7] Langley R S. Application of the dynamic stiffness method to the free and forced vibrations of aircraft panels[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, **135**(2): 319-331.
- [8] Grice R M, Pinnington R J. A method for the vibration analysis of built-up structures—part I: introduction and analytical analysis of the plate-stiffened beam[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **230**(4): 825-849.
- [9] Wester E C N, Mace B R. Wave component analysis of energy flow in complex structures—part I: a deterministic model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **285**(1): 209-227.

- [10] Ladevèze P, Arnaud L, Rouch P, Blanze C. The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations[J]. *Engineering Computations*, 2001, **18**(1/2): 193-214.
- [11] Vanmaele C, Vandepitte D, Desmet W. An efficient wave based prediction technique for plate bending vibrations[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **196**(33): 3178-3189.
- [12] Vergote K, Vanmaele C, Vandepitte D, Desmet W. An efficient wave based approach for the time-harmonic vibration analysis of 3D plate assemblies[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, **332**(8): 1930-1946.
- [13] Mace B R, Duhamel D, Brennan M J, Hinke L. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 2005, **117**(5): 2835-2843.
- [14] Waki Y, Mace B R, Brennan M J. Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **327**(1): 92-108.
- [15] Langley R S. A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, **159**(3): 483-502.
- [16] Maxit L, Guyader J L. Extension of SEA model to subsystems with non-uniform modal energy distribution[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **265**(2): 337-358.
- [17] Nefske D J, Sung S H. Power flow finite element analysis of dynamic systems: basic theory and application to beams[J]. *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, 1989, **11**(1): 94-100.
- [18] Shorter P J, Langley R S. Vibro-acoustic analysis of complex systems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **288**(3): 669-699.
- [19] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002. (YAO Wei-an, ZHONG Wan-xie. *Symplectic Elasticity*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese))
- [20] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002. (ZHONG Wan-xie. *Duality System in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese))
- [21] 鲍四元, 邓子辰. 环扇形板弯曲问题中环向模拟为时间的辛体系[J]. 西北工业大学学报, 2004, **22**(6): 734-738. (BAO Si-yuan, DENG Zi-chen. Symplectic solutions of annular sector plate clamped along two circular edges with circumfluent coordinate treated as "time"[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2004, **22**(6): 734-738. (in Chinese))
- [22] 钟阳, 李锐, 田斌. 矩形中厚板自由振动问题的哈密顿体系与辛几何解法[J]. 动力学与控制学报, 2009, **7**(4): 302-307. (ZHONG Yang, LI Rui, TIAN Bin. On Hamilton system and new symplectic approach for free vibration of moderately thick rectangular plates[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, **7**(4): 302-307. (in Chinese))

# Bending Vibration and Power Flow Analysis of Plate Assemblies in the Symplectic Space

MA Yong-bin<sup>1</sup>, ZHANG Ya-hui<sup>1</sup>, ZENG Yao-xiang<sup>2</sup>

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment (Dalian University of Technology)*, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;

2. *Beijing Institute of Astronautical System Engineering*, Beijing 100076, P.R.China)

(Contributed by ZHANG Ya-hui, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The free wave propagation and forced vibration of thin rectangular plate assemblies were investigated with the symplectic method based on wave propagation theory. The governing equations of bending vibration of the thin plates were introduced into the symplectic duality system firstly, then the wave propagation parameters and wave shapes were determined as analytical solution to the symplectic eigenvalue problem. And responses of the thin plates described in physical domain were transformed into wave coordinates. The amplitudes associated with the mode shapes were obtained through solving of the equations involving excitation, scattering and propagation. Superimposition of the wave amplitudes gave the physical responses. Expressions were derived for the mean power flow through the system and mean energy in the plate components. Compared with the traditional wave methods, the provided method is applicable for any combination of classical boundary conditions. The method was applied to the forced vibration of a built-up structure of 3 directly connected thin plates and the results were compared with those from the ABAQUS finite element software. A significant improvement on accuracy and computational efficiency is achieved. As the derivation of the formulae is rigorously rational, the provided method is also applicable for the dynamic analysis of plate assemblies composed of any other types of plates (such as moderately thick plates, and layered plates, etc.).

**Key words:** symplectic duality system; plate assembly; power flow

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11172056); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2014CB046803)