

计及相变与塑性的 NiTi 形状记忆合金 循环伪弹性特性描述*

曾忠敏, 彭向和

(重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044)

(本刊编委彭向和来稿)

摘要: 结合 NiTi 形状记忆合金单轴循环变形试验研究结果,采用基于混合物理理论的计及相变、重取向与塑性变形的形状记忆合金本构模型发展了相应的算法和程序,对 NiTi 形状记忆合金单轴循环变形行为进行了描述,通过试验结果与模拟结果比较,验证了本构模型与算法的有效性。

关键词: 形状记忆合金; 循环伪弹性-塑性变形; 本构模型; 数值方法; 验证

中图分类号: O344.3; TB125 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.08.003

引言

自形状记忆材料问世以来,已被广泛应用于各个领域。在众多的形状记忆材料中, NiTi 形状记忆合金(shape memory alloy, SMA)因其高临界应力、高可回复应变和高疲劳寿命、强耐腐蚀性和生物相容性,在生物医学、机械、仪器仪表、航空航天和交通运输等领域^[1-3]获得了十分广泛的应用。作为驱动元件, NiTi SMA 在其应用过程中,不可避免地受到循环载荷的作用,这种循环变形行为以及由此而引起的疲劳问题决定着记忆合金的使用寿命。因此,研究 NiTi SMA 在循环载荷作用下的变形行为具有重要的理论意义和应用背景。

近 20 年来, SMA 及其结构的循环变形疲劳断裂及失效引起了人们的巨大关注,在试验研究、本构描述和数值模拟方面均取得了众多成果: Auricchio 等^[4]通过引入分别与反映热弹性马氏体相变引起的相变应变和残余的永久变形共轭的热力学变量定义相变函数,对应变控制下的循环变形行为进行了描述; Kan 和 Kang^[5]在广义塑性理论框架下,通过应力控制下的单轴循环试验结果,建立了一种描述伪弹性 NiTi 合金变形棘轮效应的循环本构模型; Morin 等^[6]研究了不同加载率下伪弹性形状记忆合金在循环载荷作用下的热机耦合行为,建立了描述热机耦合的模型; 康国政^[7]总结了伪弹性 NiTi SMA 在应变控制和应力控制循环加载下的单轴循环变形特征,阐述了该合金在单轴循环变形过程中重要力学性能参数的变化规律、残余变形的发展和相变棘轮行为特征; Wang 等^[8]通过拉伸试验研究了多晶 SMA 的塑性变形和循环对材

* 收稿日期: 2014-04-23; 修订日期: 2014-07-03

基金项目: 国家自然科学基金(11332013; 11272364)

作者简介: 曾忠敏(1988—),女,贵州人,硕士(E-mail: 13613511859@163.com);

彭向和(1953—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. Tel: +86-23-65111468;

E-mail: xhpeng@cqu.edu.cn).

料特性的影响;Peng 等^[9]建立了一种包括相变、重取向变形和塑性变形的形状记忆合金本构模型,对形状记忆合金的铁弹性、伪弹性及塑性特性进行了描述。

本文将在 Peng 等^[9]建立的本构模型的基础上,发展相应的算法和程序,对 NiTi SMA 在应变控制循环加载下的单轴循环变形行为进行模拟分析,并与 Wang 等^[8]的试验结果进行比较。结果可为设计形状记忆合金元件、评估其可靠性、研究各种循环加载条件下 TiNi 形状记忆合金的变形行为提供指导。

1 本构模型简介^[9]

Peng 等提出了一种计及相变、重取向与塑性变形的形状记忆合金本构模型^[9]。该模型假设 SMA 是由马氏体和奥氏体组成的混合物,其特性是两组成相各自特性的组合。在热力载荷作用下各相的体积分数动态变化,由此决定了材料宏观特性的变化^[9-10]。在模型中,假设小变形、各相材料均为初始各向同性和非弹性不可压缩,采用 Voigt 假设,即两相的应变均为宏观应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$,其中马氏体的应变包含弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{me}}$ 、重取向应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mr}}$ 、塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$ 和热应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{m}\theta}$;奥氏体的应变包含弹性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ae}}$ 、塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$ 和热应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{a}\theta}$,即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{me}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mr}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{m}\theta}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ae}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{a}\theta}, \quad (1)$$

其中

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{m}\theta} = \alpha^{\text{m}}(\theta)(\theta - \theta_0)\mathbf{I}_2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{a}\theta} = \alpha^{\text{a}}(\theta)(\theta - \theta_0)\mathbf{I}_2, \quad (2)$$

α^{m} 和 α^{a} 分别为马氏体和奥氏体的热膨胀系数, θ 和 θ_0 分别为温度和初始温度, \mathbf{I}_2 为二阶单位张量。由于塑性变形不可逆,考虑到各相中的塑性应变可随着相变遗传到另一相,本文假设马氏体和奥氏体的塑性参数相同。为了便于描述,将各相的塑性应变统一考虑为材料的塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{p}}$ 。考虑到非弹性不可压缩假设,可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{\text{me}} + \boldsymbol{e}^{\text{mr}} + \boldsymbol{e}^{\text{p}}, & \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^{\text{ae}} + \boldsymbol{e}^{\text{p}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{kk} = \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{\text{me}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{\text{m}\theta}, & \boldsymbol{\varepsilon}_{kk} = \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{\text{ae}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{\text{a}\theta}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_{kk} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{I}_2$, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}\mathbf{I}_2$, $\boldsymbol{e}^{\text{me}}$, $\boldsymbol{e}^{\text{mr}}$ 和 $\boldsymbol{e}^{\text{ae}}$ 分别为 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{me}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mr}}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{ae}}$ 的偏量, $\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{\text{me}}$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^{\text{ae}}$ 分别为马氏体和奥氏体的弹性体积应变。材料的应力由下式决定:

$$\boldsymbol{\sigma} = \xi\boldsymbol{\sigma}^{\text{m}} + (1 - \xi)\boldsymbol{\sigma}^{\text{a}} \quad (4)$$

或

$$\boldsymbol{s} = \xi\boldsymbol{s}^{\text{m}} + (1 - \xi)\boldsymbol{s}^{\text{a}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{kk} = \xi\boldsymbol{\sigma}_{kk}^{\text{m}} + (1 - \xi)\boldsymbol{\sigma}_{kk}^{\text{a}}, \quad (5a, b)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}^{\text{m}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{\text{a}}$ 分别为马氏体和奥氏体中的应力, $\boldsymbol{s}^{\text{m}}$ 和 $\boldsymbol{s}^{\text{a}}$ 分别为马氏体和奥氏体中的偏量应力, $\boldsymbol{\sigma}_{kk}^{\text{m}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{kk}^{\text{a}}$ 分别为马氏体和奥氏体中的体积应力, ξ 为马氏体的体积分数,在相变过程中 ξ 动态变化。

马氏体的偏量弹性响应可表示为

$$\boldsymbol{s}^{\text{m}} = 2G^{\text{m}}(\theta)\boldsymbol{e}^{\text{me}} = 2G^{\text{m}}(\theta)(\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^{\text{mr}} - \boldsymbol{e}^{\text{p}}), \quad (6)$$

式中 G^{m} 为马氏体的剪切弹性模量,上式的微分形式为

$$d\boldsymbol{s}^{\text{m}} = 2G^{\text{m}}(\theta)d\boldsymbol{e}^{\text{me}} = 2G^{\text{m}}(\theta)(d\boldsymbol{e} - d\boldsymbol{e}^{\text{mr}} - d\boldsymbol{e}^{\text{p}}) + \frac{(G^{\text{m}})'}{G^{\text{m}}}\boldsymbol{s}^{\text{m}}d\theta. \quad (7)$$

由图 1 所示的机械模型可得如下马氏体的重取向变形特性描述^[9]:

$$d\boldsymbol{s}^{\text{m}} = \boldsymbol{A}^{\text{mr}}d\boldsymbol{e}^{\text{mr}} - \boldsymbol{B}^{\text{mr}}d\boldsymbol{z}^{\text{mr}} + \boldsymbol{D}^{\text{mr}}d\theta, \quad (8)$$

其中

$$\lambda_j^m = D_j^m/b_j^m, A^{mr} = \sum_{j=1}^l D_j^m(\theta), B^{mr} = \sum_{j=1}^l \lambda_j^m P^{m(j)}, D^{mr} = \sum_{j=1}^l \frac{(D_j^m)'}{D_j^m} P^{m(j)}, \quad (9)$$

$$dz^{mr} = d\zeta^{mr}/f^{mr}(z^{mr}), d\zeta^{mr} = \sqrt{de^{mr} : de^{mr}}, \quad (10)$$

$$dP^{m(j)} = D_j^m(\theta) de^{mr} - \lambda_j^m P^{m(j)} dz^{mr} + \frac{(D_j^m)'}{D_j^m} P^{m(j)} d\theta, \quad (11)$$

式中 $D_j^m(\theta)$ 表示马氏体弹性元件的弹性系数, b_j^m 表示马氏体重取向变形阻尼器的阻尼系数, $P^{m(j)}$ 表示作用于第 j 分支上的力, $f^{mr}(z^{mr})$ 为重取向变形引起的强化。

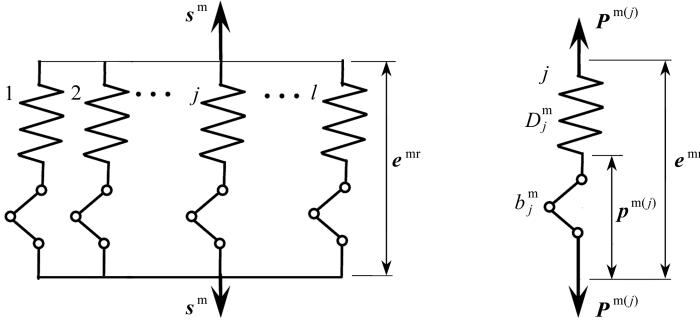


图1 描述马氏体重取向变形特性的简单机械模型

Fig.1 A mechanical model for the reorientation response of martensite

当马氏体变体的重取向完成时,重取向应变达到最大值.此后,尽管应力增加,但是重取向应变不再发展.为此,引入重取向应变的极限值 e_0^{mr} , 并定义 $\langle de^{mr} \rangle = a de^{mr}$, 其中

$$a = \begin{cases} 1, & \text{if } e_{eq}^{mr} \leq e_0^{mr}, \\ 0, & \text{if } e_{eq}^{mr} > e_0^{mr}, \end{cases} e_{eq}^{mr} = \sqrt{\frac{2}{3}}(\mathbf{e}^{mr} : \mathbf{e}^{mr}). \quad (12)$$

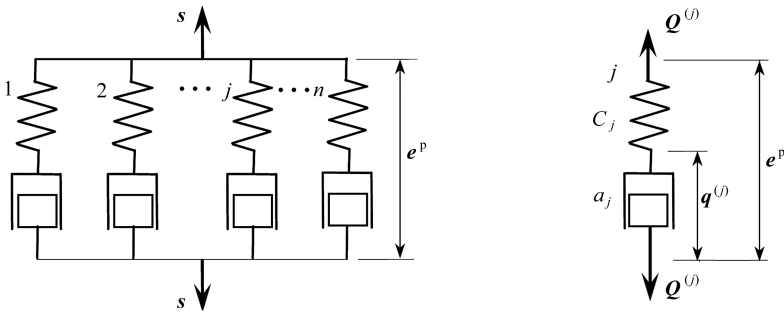


图2 描述 SMA 塑性变形特性的机械模型

Fig.2 A mechanical model for the plastic response of SMA

材料的塑性特性由图 2 所示的机械模型描述, 可得

$$ds = A^p de^p - B^p dz^p + D^p d\theta, \quad (13)$$

其中

$$\alpha_j = C_j/a_j, A^p = \sum_{j=1}^n C_j(\theta), B^p = \sum_{j=1}^n \alpha_j Q^{(j)}, D^p = \sum_{j=1}^n \frac{(C_j)'}{C_j} Q^{(j)}, \quad (14)$$

$$dz^p = \frac{d\zeta^p}{f^p(z^p)}, d\zeta^p = \sqrt{de^p : de^p}, \quad (15)$$

$$d\mathbf{Q}^{(j)} = C_j(\theta) d\mathbf{e}^p - \alpha_j \mathbf{Q}^{(j)} dz^p + \frac{(C_j)'}{C_j} \mathbf{Q}^{(j)} d\theta, \quad (16)$$

式中, C_j 表示马氏体弹性元件的弹性系数, α_j 表示马氏体塑性变形阻尼器的阻尼系数, $\mathbf{Q}^{(j)}$ 表示作用于第 j 分支上的力, dz^p 表示塑性变形对应的广义时间增量, $f^p(z^p)$ 为塑性变形引起的强化。

马氏体的体积应力应变关系为

$$d\sigma_{kk}^m = 3K^m(\theta)(d\varepsilon_{kk} - d\varepsilon_{kk}^{m\theta}) + \frac{(K^m)'}{K^m} \sigma_{kk}^m d\theta, \quad (17)$$

式中 K^m 表示马氏体体积弹性模量。

同理,假设奥氏体的变形为弹塑性,应用同样的方法可得到奥氏体的本构描述.奥氏体的弹性响应为

$$\mathbf{s}^a = 2G^a(\theta) \mathbf{e}^{ae} = 2G^a(\theta) (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p). \quad (18)$$

其微分形式

$$d\mathbf{s}^a = 2G^a(\theta) d\mathbf{e}^{ae} = 2G^a(\theta) (d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p) + \frac{(G^a)'}{G^a} \mathbf{s}^a d\theta, \quad (19)$$

式中 G^a 为奥氏体的剪切弹性模量。

参考马氏体本构特性的简单机械模型可类似得到奥氏体的模型,并类似得到奥氏体塑性变形响应

$$d\mathbf{s}^a = A^{ap} d\mathbf{e}^{ap} - \mathbf{B}^{ap} dz^{ap} + \mathbf{D}^{ap} d\theta,$$

其中

$$\alpha_j^a = C_j^a/a_j^a, A^{ap} = \sum_{j=1}^n C_j^a(\theta), \mathbf{B}^{ap} = \sum_{j=1}^n \alpha_j^a \mathbf{Q}^{a(j)}, \mathbf{D}^{ap} = \sum_{j=1}^l \frac{(C_j^a)'}{C_j^a} \mathbf{Q}^{a(j)}. \quad (20)$$

奥氏体的体积应力应变关系为

$$d\sigma_{kk}^a = 3K^a(\theta)(d\varepsilon_{kk} - d\varepsilon_{kk}^{a\theta}) + \frac{(K^a)'}{K^a} \sigma_{kk}^a d\theta, \quad (21)$$

式中 C_j^a 表示奥氏体弹性元件的弹性系数, a_j^a 表示奥氏体塑性变形阻尼器的阻尼系数, $\mathbf{Q}^{a(j)}$ 表示作用于第 j 分支上的力, K^a 表示奥氏体体积弹性模量。

在求得各相的应力之后,代入式(4)可得到材料的应力,其中马氏体体积分数 ξ 可由 Tanaka 于 1986 年提出的以下关系式^[11]决定:

$$\xi = \begin{cases} \exp[-A^a \langle \theta - [A_s + B^a \sigma_e + g(\bar{\varepsilon}_{\max}^p)] \rangle], & M \rightarrow A, \\ 1 - \exp[-A^m \langle M_s + B^m \sigma_e - \theta \rangle], & A \rightarrow M, \end{cases} \quad (22)$$

式中 σ_e 表示等效应力, A^a, A^m, B^a, B^m 是与相变和逆相变相关的材料常数, A_s, M_s 分别表示奥氏体和马氏体的开始温度, $g(\bar{\varepsilon}_{\max}^p)$ 描述了材料所经历的最大等效塑性应变对材料逆相变温度的影响,其中 $\bar{\varepsilon}_{\max}^p = \max(\bar{\varepsilon}^p)$, $\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{(2/3)(\mathbf{e}^p : \mathbf{e}^p)}$ 。

2 算 法

本文假设等温过程,即 $\Delta\theta = 0$,采用应变控制加载,即给定 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$,由式(8)和(10)得马氏体重取向变形的增量应力应变关系为

$$\Delta \mathbf{s}^m = A^{mr} \Delta \mathbf{e}^{mr} - \frac{\mathbf{B}^{mr} \Delta \mathbf{e}^{mr}}{f^{mr} \Delta \xi^{mr}} : \Delta \mathbf{e}^{mr} + \mathbf{D}^{mr} \Delta \theta = \mathbf{T} : \Delta \mathbf{e}^{mr}, \quad (23)$$

式中

$$\mathbf{T} = A^{mr} \mathbf{I}_4 - \frac{\mathbf{B}^{mr} \Delta \mathbf{e}^{mr}}{f^{mr} \Delta \xi^{mr}}. \quad (24)$$

从式(23)可得

$$\Delta \mathbf{e}^{mr} = \mathbf{T}^{-1} : \Delta \mathbf{s}^m. \quad (25)$$

同理,由式(13)得材料塑性变形的增量应力应变关系为

$$\Delta \mathbf{e}^p = \mathbf{R}^{-1} : \Delta \mathbf{s}, \quad (26)$$

其中

$$\mathbf{R} = A^p \mathbf{I}_4 - \frac{\mathbf{B}^p \Delta \mathbf{e}^p}{f^{mp} \Delta \xi^{mp}}. \quad (27)$$

将式(25)和(26)代入式(7),注意到当马氏体相中的等效应变 e_{eq}^{mr} 达到临界值 e_0^{mr} 时,相变应变停止,此时, $\Delta \mathbf{e}^{mr} = 0$,利用前面的定义 $\langle d\mathbf{e}^{mr} \rangle = a d\mathbf{e}^{mr}$,可得

$$\Delta \mathbf{s}^m = 2G^m(\theta) (\Delta \mathbf{e} - a\mathbf{T}^{-1} : \Delta \mathbf{s}^m - \mathbf{R}^{-1} : \Delta \mathbf{s}), \quad (28)$$

$$\Delta \mathbf{s}^m = \mathbf{A}^{-1} : [2G^m \Delta \mathbf{e} - 2G_k^m \mathbf{R}^{-1} \Delta \mathbf{s}], \quad \mathbf{A}_k = [\mathbf{I}_4 + 2aG_k^m \mathbf{T}_k^{-1}], \quad (29)$$

式中

$$a = \begin{cases} 1, & \text{if } e_{eq}^{mr} \leq e_0^{mr}, \\ 0, & \text{if } e_{eq}^{mr} > e_0^{mr}. \end{cases}$$

同理,将式(26)代入式(19)可得

$$\Delta \mathbf{s}^a = 2G^a [\mathbf{I}_4 + 2G^a \mathbf{R}^{-1}]^{-1} : \Delta \mathbf{e}. \quad (30)$$

将式(29)和(30)代入式(5a)的增量形式可得如下增量形式的偏量本构关系:

$$\Delta \mathbf{s} = [\mathbf{I}_4 + 2\xi G^m \mathbf{A}^{-1} : \mathbf{R}^{-1} + 2(1 - \xi) G^a \mathbf{R}^{-1}]^{-1} : \{ [2\xi G^m \mathbf{A}^{-1} + 2(1 - \xi) G^a \mathbf{I}_4] : \Delta \mathbf{e} + \Delta \xi (\mathbf{s}^m - \mathbf{s}^a) \}. \quad (31)$$

将式(17)和(21)代入式(5b)的增量形式可得如下增量形式的体积应力应变关系:

$$\Delta \sigma_{kk} = 3[\xi K^m + (1 - \xi) K^a] \Delta \varepsilon_{kk} + 3(K^m - K^a) \varepsilon_{kk} \Delta \xi. \quad (32)$$

基于 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} + \sigma_{kk} \mathbf{I}_2/3$ 的增量形式

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \Delta \mathbf{s} + \Delta \sigma_{kk} \mathbf{I}_2/3. \quad (33)$$

将式(31)和(32)代入式(33),最终可得到如下增量形式的本构方程:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{k+1} = & \Delta \mathbf{s}_{k+1} + \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{ii})_{k+1} \mathbf{I}_2 = \\ & \left\{ [\mathbf{I}_4 + 2\xi G^m \mathbf{A}_k^{-1} : \mathbf{R}_k^{-1} + 2(1 - \xi) G^a \mathbf{R}_k^{-1}]^{-1} : \right. \\ & \left. \left[[2\xi G^m \mathbf{A}_k^{-1} + 2(1 - \xi) G^a \mathbf{I}_4] : \left(\mathbf{I}_4 - \frac{1}{3} (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \right) \right] \right. \\ & \left. + [\xi K^m + (1 - \xi) K^a] (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) \right\} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} + \\ & \left\{ [[\mathbf{I}_4 + 2\xi G^m \mathbf{A}_k^{-1} : \mathbf{R}_k^{-1} + 2(1 - \xi) G^a \mathbf{R}_k^{-1}]^{-1} : (\mathbf{s}_k^m - \mathbf{s}_k^a)] + \right. \end{aligned}$$

$$(K^m - K^a)(\varepsilon_{ii})_k \mathbf{I}_2 \} \Delta \xi_{k+1}. \quad (34)$$

算法采用增量迭代方法求解,具体步骤叙述如下:

设已完成第 k 步增量加载,求得

$$\boldsymbol{\sigma}_k, (\mathbf{s}^m)_k, (\mathbf{s}^a)_k, (\mathbf{e}^{mr})_k, (\mathbf{e}^p)_k, (\mathbf{z}^{mr})_k, (\mathbf{z}^p)_k$$

和

$$(\mathbf{A}^{mr})_k, (\mathbf{A}^p)_k, (\mathbf{B}^{mr})_k, (\mathbf{B}^p)_k, \mathbf{T}_k, \mathbf{R}_k.$$

已完成第 $k+1$ 步增量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$ 的第 i 次迭代,求得 $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{k+1}^i$,进而求得

$$(\Delta \mathbf{s}^m)_{k+1}^i, (\Delta \mathbf{s}^a)_{k+1}^i, (\Delta \mathbf{e}^{mr})_{k+1}^i, (\Delta \mathbf{e}^p)_{k+1}^i, (\Delta \mathbf{z}^{mr})_{k+1}^i, (\Delta \mathbf{z}^p)_{k+1}^i.$$

现在进行第 $k+1$ 步增量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$ 的第 $i+1$ 次迭代:

已知 $\Delta \mathbf{e}_{k+1}, (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{mm})_{k+1}$,由式(22)可得 $\Delta \xi_{k+1}^{i+1}$,代入式(34)可得 $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{k+1}^{i+1}$,由式(28)和(30)分别可得 $(\Delta \mathbf{s}^m)_{k+1}^{i+1}$ 和 $(\Delta \mathbf{s}^a)_{k+1}^{i+1}$,由式(25)和(26)分别可得 $(\Delta \mathbf{e}^{mr})_{k+1}^{i+1}$ 和 $(\Delta \mathbf{e}^p)_{k+1}^{i+1}$,进而式(10)和(15)分别求得 $\Delta \mathbf{z}^{mr}$ 和 $\Delta \mathbf{z}^p$,若误差 $E_{ERR} = \|\Delta \boldsymbol{\sigma}_{k+1}^{i+1} - \Delta \boldsymbol{\sigma}_{k+1}^i\| / \|\Delta \boldsymbol{\sigma}_{k+1}^{i+1}\| < E_{ERR0}$, (其中 E_{ERR0} 为容许误差,本文取 0.001),则迭代完成,将所得增量叠加在第 k 步增量加载的结果上可得

$$\boldsymbol{\sigma}_{k+1}, (\mathbf{s}^m)_{k+1}, (\mathbf{s}^a)_{k+1}, (\mathbf{e}^{mr})_{k+1}, (\mathbf{e}^p)_{k+1}, (\mathbf{z}^{mr})_{k+1}, (\mathbf{z}^p)_{k+1}.$$

由式(11)和(16)分别可得 $(\Delta \mathbf{P}^{m(j)})_{k+1}^{i+1}$ 和 $(\Delta \mathbf{Q}^{(j)})_{k+1}^{i+1}$ 进而叠加得到 $(\mathbf{P}^{m(j)})_{k+1}^{i+1}$ 和 $(\mathbf{Q}^{(j)})_{k+1}^{i+1}$,并由式(9)、(14)、(24)和(27)得

$$(\mathbf{A}^{mr})_{k+1}, (\mathbf{A}^p)_{k+1}, (\mathbf{B}^{mr})_{k+1}, (\mathbf{B}^p)_{k+1}, \mathbf{T}_{k+1}, \mathbf{R}_{k+1}$$

后开始下一步增量加载。

3 计算结果与讨论

Wang 等^[8]对 NiTi SMA 在循环载荷作用下的伪弹性相变行为进行了系统的研究,本节对有关结果进行了数值模拟。

已知 M_f, M_s, A_s, A_f 分别为 270 K, 232 K, 244 K, 164 K^[8], 实验环境温度为 $T = 296$ K, 可见在室温下材料应处于奥氏体状态。本构模型取 $l = n = 2$ 进行分析,

$$e_0^{mr} = 0.059 + 0.039(1 - e^{-0.2(c-1)/0.162.5}), g(\bar{\varepsilon}_{\max}^p) = h \varepsilon_{\max}^p + g_0, \quad (35)$$

其中 c 表示循环次数。

采用 Wang 等^[8]的试验结果,确定其它材料参数,见表 1。

表 1 材料参数

Table 1 The test material parameters

G^m /GPa	G^a /GPa	ν^m	ν^a	D_1^m /GPa	D_2^m /GPa
10	20	0.28	0.28	1 025	0.1
λ_1^m	λ_2^m	h /K	C_1^a /GPa	C_2^a /MPa	α_1^a
5 120	100	760	2 677	3 500	5 250
α_2^a	A^a /K ⁻¹	A^m /K ⁻¹	B^a / (MPa ⁻¹ ·K)	B^m / (MPa ⁻¹ ·K)	g_0 /K
50	0.08	0.55	0.35	0.122	-31.6

表中, G^m, G^a 分别表示马氏体和奥氏体剪切弹性模量; ν^m, ν^a 分别表示马氏体和奥氏体 Poisson 比; D_1^m, D_2^m 表示马氏体弹性元件的弹性系数; C_1^a, C_2^a 表示奥氏体弹性元件的弹性系数; A^a, B^a, A^m, B^m 表示与相变和逆相变相关的材料常数; h, g_0 是与材料逆相变温度相关的材料常数。

图 3 是 NiTi SMA 在不同应变幅值 ε_{\max} 下拉伸——卸载循环 30 次的模拟结果。结果表明:

在循环中, NiTi SMA 的可回复应变随着循环次数的增加而减少, 并趋于饱和; 尽管 $\varepsilon_{\max} = 5\%$ 时的循环未见明显塑性变形, 但每一次加卸载后均残余少量的不可回复变形. 当 $\varepsilon_{\max} = 8\%$ 时, $\sigma > 600$ MPa 后可见明显的塑性变形, 且塑性变形 (或卸载后的残余应变) 随着 ε_{\max} 的增加而增大. 材料在第 1 次循环时马氏体相变的开始应力 (σ_s^{am}) 约为 432 MPa, 而马氏体逆相变的结束应力 (σ_f^{ma}) 随着 ε_{\max} (或塑性变形) 的增加而降低 (见图 4(a)). 模拟结果与 Wang 等^[8] 的试验结果吻合: 当 $\varepsilon_{\max} = 5\%$ 时, σ_f^{ma} 约为 264 MPa, $\varepsilon_{\max} = 8\%$ 时约为 244 MPa, 而 $\varepsilon_{\max} = 10\%$ 时减小到 167 MPa, 当 $\varepsilon_{\max} = 11\%$ 时 σ_f^{ma} 略小于 $\varepsilon_{\max} = 10\%$ 时的值, 约为 162 MPa. Wang 等^[8] 认为这种 σ_f^{ma} 随着 ε_{\max} (或塑性变形) 的增加而降低的现象是由于塑性应变阻碍了材料逆相变的发生: 第 1 次循环时产生的塑性应变越大, 阻碍越大, 逆相变结束应力 σ_f^{ma} 也就越小. 与此同时, 当 $\varepsilon_{\max} = 5\%$ 时, 第 1 次循环马氏体相变的开始应力 σ_{s1}^{am} 与第 2 次循环的开始应力 σ_{s2}^{am} 的差值 $\Delta\sigma_s^{\text{am}}$ (其中 $\Delta\sigma_s^{\text{am}} = |\sigma_{s1}^{\text{am}} - \sigma_{s2}^{\text{am}}|$) 较小, 但是随着 ε_{\max} (或塑性变形) 的增大 $\Delta\sigma_s^{\text{am}}$ 逐渐增大 (如图 4(b) 所示), Wang 等^[8] 通过对试验结果进行分析, 认为第 1 次循环中产生的塑性应变对循环过程相变应力 σ_s^{am} 有影响, 塑性应变越大, 差值 $\Delta\sigma_s^{\text{am}}$ 越大.

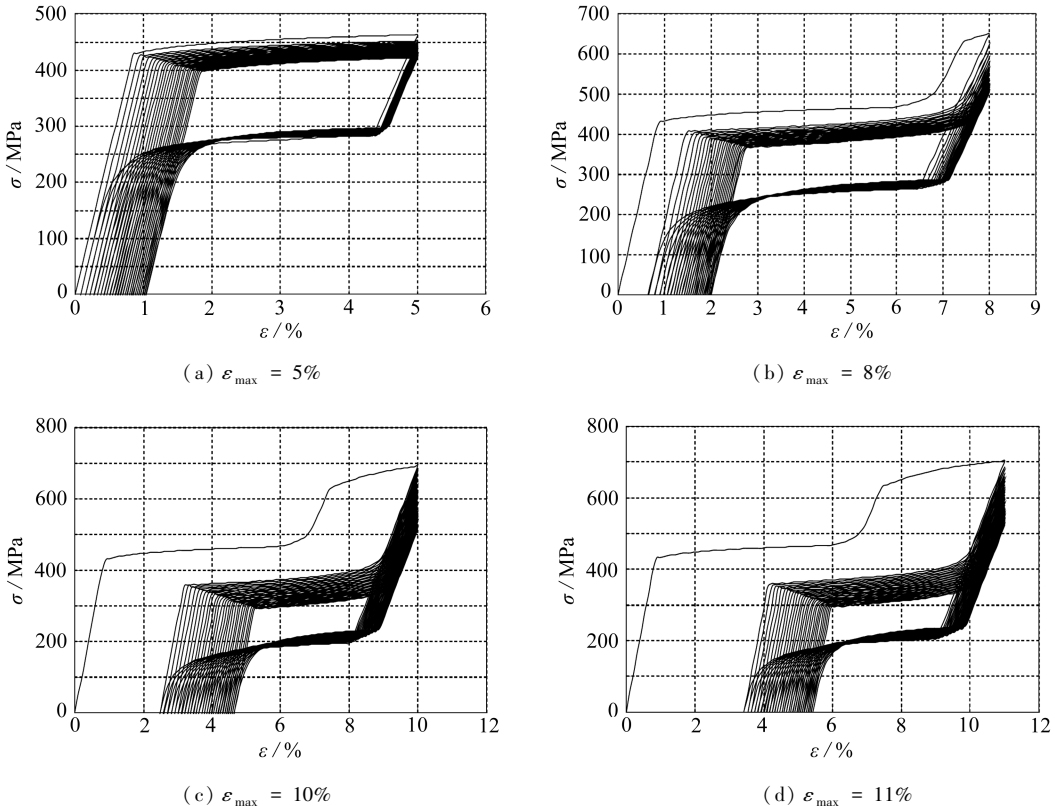


图 3 不同 ε_{\max} 下 NiTi SMA 循环响应特性的模拟结果

Fig.3 The simulated σ - ε cyclic curves of NiTi SMA with different maximum strain amplitudes ε_{\max}

此外, 由图 3 分析可知, 随着循环次数的增加重取向变形应力下降. Miyazaki 等^[12] 曾将此现象解释为: 拉伸完成后, 由于沿颗粒边界处产生的位错使其周围存在残余的内应力场, 内应力场有助于马氏体相变的产生, 因此重取向变形应力平台降低. 从第 2 次循环开始, 应力应变曲线开始点发生偏离, 这种偏离是由于残余应变引起的滑移变形的累积所造成. 随着循环次数增加, 累积的滑移变形也随之增加, 偏离也就越来越远^[13]. 随着循环次数的增加, 马氏体相

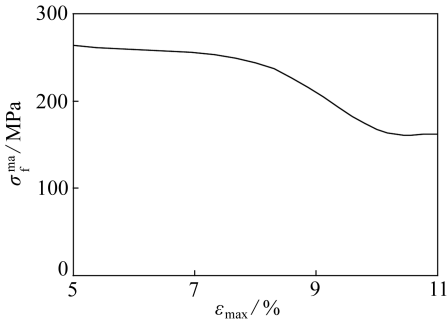


图 4(a) 马氏体逆相变结束应力 σ_f^{ma}

Fig.4(a) Inverse martensitic-transformation finishing stress σ_f^{ma}

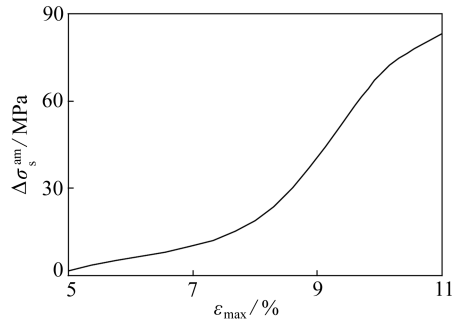


图 4(b) 马氏体相变开始应力的变化量

$\Delta\sigma_s^{am}$ 随 ε_{max} 的变化

Fig.4(b) Martensitic transformation starting stress

$\Delta\sigma_s^{am}$ vs. strain amplitude ε_{max}

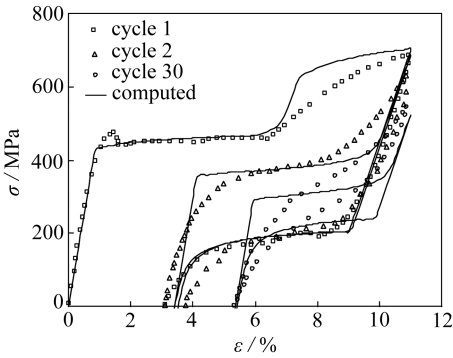
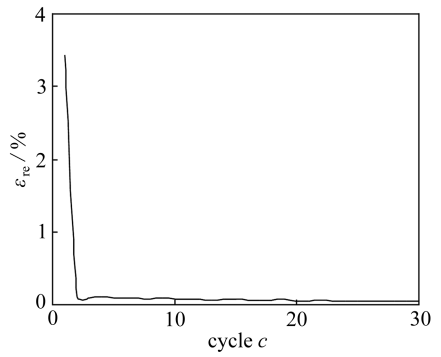


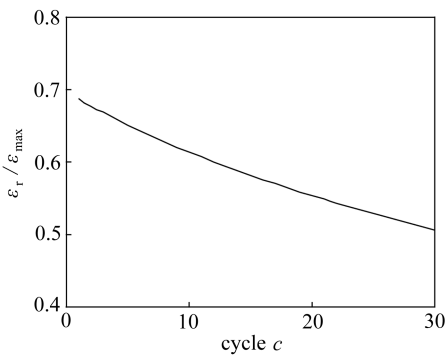
图 5 $\varepsilon_{max} = 11\%$ 时 NiTi SMA 拉伸及卸载特性

Fig.5 The σ - ε curves of NiTi SMA subjected to tensile loading-unloading at cycles for $\varepsilon_{max} = 11\%$



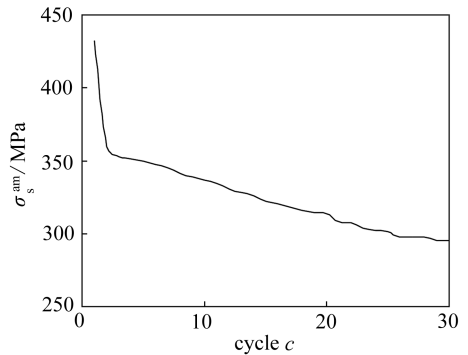
(a) 残余应变 ε_{re}

(a) Residual strain ε_{re}



(b) 可回复应变与 ε_{max} 的比值 $\varepsilon_r / \varepsilon_{max}$

(b) The normalized recoverable strain $\varepsilon_r / \varepsilon_{max}$



(c) 马氏体相变开始应力 σ_s^{am}

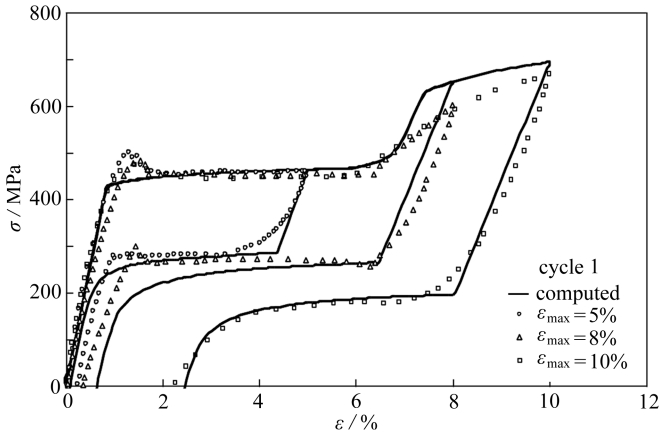
(c) The martensitic-transformation starting stress σ_s^{am}

图 6 $\varepsilon_{max} = 11\%$ 拉卸载循环中的残余应变、可恢复应变与 ε_{max} 的比值和马氏体相变开始应力的变化

Fig.6 Evolution of the residual strain, the normalized recoverable strain and the martensitic-transformation starting stress during cycling for $\varepsilon_{max} = 11\%$

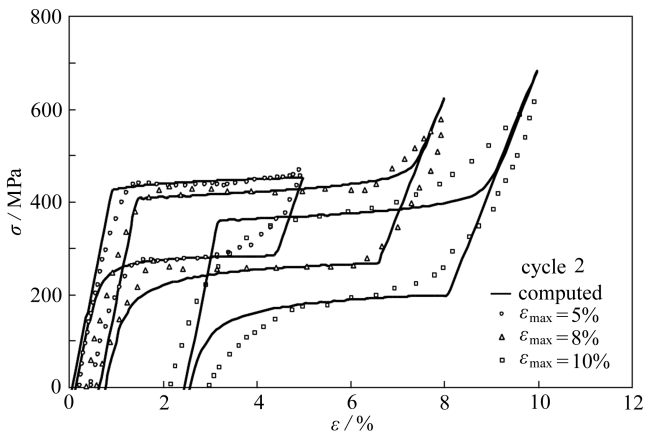
变强化增加,Zaki 等^[14]曾根据相关的试验结果对此作出过解释,认为是 SMA 的滑移变形导致了颗粒位错密度的增加,而正是由于这种增加,阻碍了马氏体的形成.另外,随着循环次数的增加,滞后区域逐渐减小,并趋于饱和.从图 3 可看出,循环 30 次时,滞后区域形成了封闭环状.与试验结果比较表明,本文所采用的本构模型能够描述 NiTi SMA 在循环变形过程中涉及相变、重取向和塑性变形的主要特征.

图 5 是 $\varepsilon_{\max} = 11\%$ 时单轴拉伸循环的第 1, 2, 30 次循环的试验结果和模拟结果.第 1 次循环结束,残余应变 ε_{re} 增加约为 3.43%,第 2 次循环结束时残余应变值增加约 0.2%,此后,随着循环次数的增加,残余应变增加幅度逐渐减小,循环 30 次后,残余应变增加幅度基本不再变化,稳定在 0.04% (见图 6(a)),总残余应变稳定在 5.39%.可恢复应变 ε_r 与应变幅值 ε_{\max} 的比值 $\varepsilon_r / \varepsilon_{\max}$ 随循环次数的增加逐渐下降,最终趋于稳定,第 30 次循环后该比值稳定在 50.7% (如图 6(b) 所示).此外,马氏体相变的开始应力 σ_s^{am} 随循环次数的变化规律:第 1 次循环约为 432 MPa,第 2 次循环约为 360 MPa,随循环次数的增加该比值逐渐趋于稳定,第 30 次循环后该比值稳定在约 295 MPa (见图 6(c)).



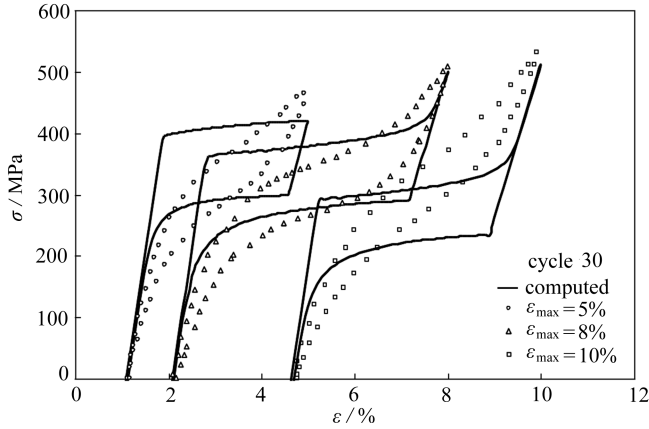
(a) 第 1 次循环

(a) The 1st cycle



(b) 第 2 次循环

(b) The 2nd cycle



(c) 第 30 次循环

(c) The 30th cycle

图 7 不同 ϵ_{\max} 下 NiTi SMA 循环拉伸—卸载的 σ - ϵ 曲线

Fig.7 The cyclic σ - ϵ curves of NiTi SMA subjected to tensile loading-unloading cycles for different values of ϵ_{\max}

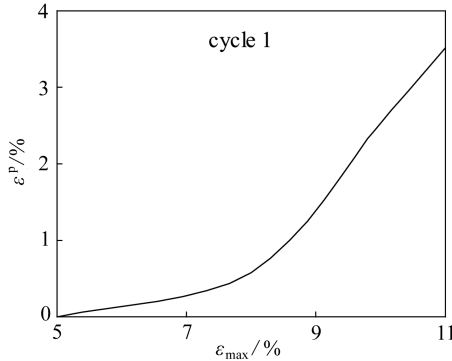


图 8 NiTi SMA 循环 1 次时的塑性应变 ϵ^p 随 ϵ_{\max} 的变化

Fig.8 Evolution of plastic strain ϵ^p at the first cycle with ϵ_{\max}

图 7 所示为不同 ϵ_{\max} 下循环拉伸及卸载 1, 2 和 30 次时 NiTi SMA 的应力应变曲线, 模拟结果与试验结果差异吻合合理. 如图 7(a) 所示, 第 1 次循环中, 当 $\epsilon_{\max} = 5\%$ 时, 材料表现为伪弹性, 没有塑性变形发生, 重取向变形开始后应力值基本保持不变直至达到 ϵ_{\max} 后卸载; $\epsilon_{\max} = 8\%$ 时, 当马氏体的重取向完成后, 材料响应先是表现为马氏体弹性, 应力迅速增加, 达到约 600 MPa 时, 开始出现微小的塑性变形 (塑性应变 ϵ^p 约为 0.58%), 直至应变值达到最大应变 ϵ_{\max} 后开始卸载, 材料产生较小的残余应变 (残余应变 ϵ_r 约为 0.64%); $\epsilon_{\max} = 10\%$ 的结果与 $\epsilon_{\max} = 8\%$ 时类似, 但 ϵ^p 增加到约 2.53%, 残余应变 ϵ_r 约为 2.45%; 当 $\epsilon_{\max} = 11\%$ 时, 塑性应变 ϵ^p 约为 3.52%, 残余应变 ϵ_r 约为 3.43%, 由此可知, 随着 ϵ_{\max} 的增加, 塑性应变和残余应变也随之增加, 图 8 所示为塑性应变随 ϵ_{\max} 的变化规律. 如图 7 所示, 相同循环次数下, 塑性硬化增强, 与 $\epsilon_{\max} = 5\%, 8\%, 10\%$ 和 11% 时对应的最大应力 σ_{\max} 、残余应变累积量 $\sum \epsilon_{re}$ 随着 ϵ_{\max} 的增大而增加; 同一应变幅度 ϵ_{\max} 下, σ_{\max} 随着循环次数的增加逐渐减少 (见图 9(a)), 而残余应变累积量 $\sum \epsilon_{re}$ 随着循环次数的增加累积得越多 (如图 9(b) 所示). 结合图 7(a), (b) 和 (c) 分析可知, 对 $\epsilon_{\max} = 5\%$ 时, 第 2 次循环的响应特性和第 1 次的类似, 材料表现为伪弹性, 没有塑性

变形产生;随着循环次数的增加,试验结果表明材料重取向变形强化明显,Zaki 等^[14]认为是 SMA 的滑移变形导致了颗粒位错密度的增加,而这种增加阻碍了马氏体的形成,使得材料产生明显的重取向变形强化.由于 NiTi SMA 的微观结构在循环变形过程中变化的复杂性,本文尚不能很好地描述这一特性.此外,随着循环次数的增加, ε_{\max} (或塑性变形)越大,材料越快达到饱和状态.Wang 等^[8]通过试验结果分析认为这里的塑性应变主要指第 1 次循环中产生的塑性应变,以后的循环中产生的塑性应变与第 1 次循环中的塑性应变相比小得多.

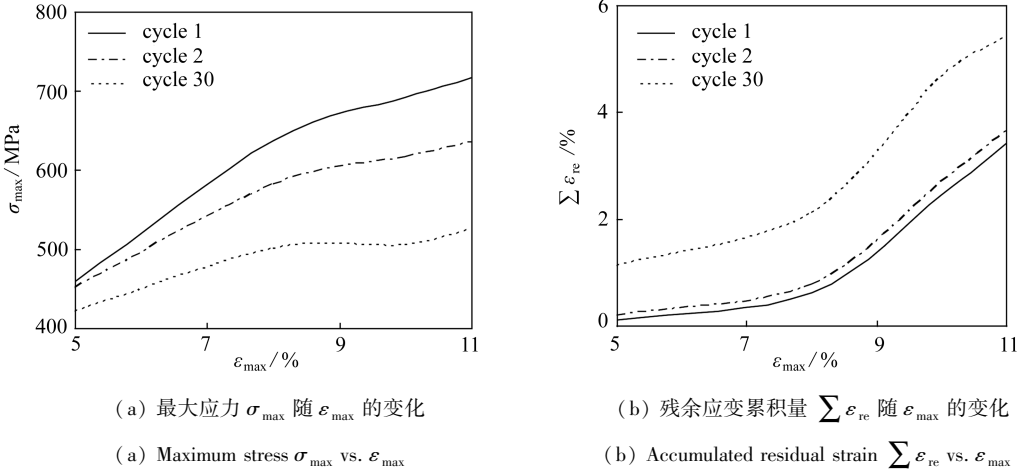


图9 NiTi SMA 拉伸——卸载循环中最大应力 σ_{\max} 和残余应变累积量 $\sum \varepsilon_{re}$ 随 ε_{\max} 的变化

Fig.9 Evolution of maximum stress σ_{\max} and accumulated residual strain $\sum \varepsilon_{re}$ with ε_{\max} during cycling

4 结 论

本文基于计及相变、重取向和塑性的形状记忆合金本构模型发展了数值算法和程序,模拟了应变控制循环加载下 NiTi SMA 的变形.通过与试验结果比较表明,本构模型及所发展的数值算法能有效地描述拉伸循环加载下 NiTi SMA 本构行为的主要特征:

1) 可恢复应变随着循环次数的增加而减少直至达到饱和,累积不可恢复变形随着循环次数的增加而增加,导致应力应变曲线起点偏离;重取向变形强化明显;此外,随着循环次数的增加,滞后区域逐渐减小,最终形成封闭环状;第 1 次循环时,最大应变幅度 $\varepsilon_{\max} = 5\%$ 时没有塑性应变产生, $\varepsilon_{\max} = 8\%$ 起,随着最大应变幅度的增加,塑性应变明显增大.

2) 随着应变幅值的增加,材料加载过程从表现为伪弹性且没有塑性变形,到发生母相弹性——相变——重取向变形——马氏体弹性——塑性变形——卸载和马氏体逆相变的复杂过程;第 1 次循环中,残余应变随最大应变幅度的增加而增加;从第 2 次循环后,随循环次数的增加,残余应变累积量逐渐增加直至饱和;第 1 次循环时产生的塑性应变越大,随着循环次数的增加,累积应力应变曲线越快达到饱和状态;同样地,第 1 次循环中产生的塑性应变越大,马氏体相变开始应力 σ_s^{sm} 在循环过程也越快达到稳定值,而马氏体逆相变结束应力值 σ_f^{sm} 随塑性应变的增加而减小.

3) 经过一定次数(本文为 30 次)加卸载的机械循环, NiTi SMA 最终将具有稳定的、完全的伪弹性变形特性,即完全封闭的滞后环出现,无新的残余变形产生.这提示了在利用 NiTi SMA 的伪弹性性能进行实际应用时,可通过机械循环训练得到稳定的伪弹性特性.

由于 NiTi SMA 特有的应力诱发相变行为,循环变形过程中其微观结构的变化和变形机理十分复杂.本文采用的本构模型在使用中尚不能完全反映微结构复杂变化的效果并解释其机理.此外,对多轴复杂循环载荷史下该类材料的本构特性亦有待于进一步深入研究.

参考文献 (References) :

- [1] Delville R, Malard B, Pilch J, Sittner P. Transmission electron microscopy investigation of dislocation slip during superelastic cycling of Ni-Ti wires[J]. *International Journal of Plasticity*, 2011, **27**(2): 282-297.
- [2] Jiang H J, Cao S, Ke C B, Ma X. Fine-grained bulk NiTi shape memory alloy fabricated by rapid solidification process and its mechanical properties and damping performance[J]. *Journal of Materials Science Technology*, 2013, **29**(9): 855-862.
- [3] Morgan N B. Medical shape memory alloy applications: the market and its products[J]. *Materials Science and Engineering A*, 2004, **378**(1/2): 134-148.
- [4] Auricchio F, Reali A, Stefanelli U. A three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformation with permanent inelasticity [J]. *International Journal of Plasticity*, 2007, **23**(2): 207-226.
- [5] Kan Q H, Kang G Z. Constitutive model for uniaxial transformation ratchetting of super-elastic NiTi shape memory alloy at room temperature[J]. *International Journal of Plasticity*, 2010, **26**(3): 441-465.
- [6] Morin C, Mounni Z, Zaki W. Thermomechanical coupling in shape memory alloys under cyclic loadings: experimental analysis and constitutive modeling[J]. *International Journal of Plasticity*, 2011, **27**(12): 1959-1980.
- [7] 康国政. 伪弹性镍钛形状记忆合金循环变形行为的研究进展[J]. 西南交通大学学报, 2011, **46**(3): 355-364. (KANG Guo-zheng. Research progress in cyclic deformation of super-elastic Ni-Ti shape memory alloy[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2011, **46**(3): 355-364. (in Chinese))
- [8] Wang X M, Xu B X, Yue Z F. Phase transformation behavior of pseudoelastic NiTi shape memory alloys under large strain[J]. *Alloys and Compounds*, 2008, **463**(1/2): 417-422.
- [9] Peng X, Chen B, Chen X, Wang J. A constitutive model for transformation, reorientation and plastic deformation of shape memory alloys[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2012, **25**(3): 285-298.
- [10] Peng X, Yang Y, Huang S. A comprehensive description for shape memory alloys with a two-phase constitutive model[J]. *International Journal Solids Structures*, 2001, **38**(38/39): 6925-6940.
- [11] Tanaka K. Thermal mechanical sketch of shape memory effect: one-dimensional tensile behavior[J]. *Res Mech*, 1986, **18**: 251-263.
- [12] Miyazaki S, Imai T, Igo Y, Otsika K. Effect of cyclic deformation on the pseudoelasticity characteristics of Ti-Ni alloys[J]. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 1986, **17**(1): 115-120.
- [13] Mounni Z, Van Herpen A, Riberty P. Fatigue analysis of shape memory alloys: energy approach[J]. *Smart Mater Struct*, 2005, **14**(287): 287-292.
- [14] Zaki W, Mounni Z. A 3D model of the cyclic thermomechanical behavior of shape memory alloys[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**(11): 2427-2454.

A Constitutive Description of Cyclic Pseudoelasticity for the NiTi SMAs Involving Coupled Phase Transformation and Plasticity

ZENG Zhong-min, PENG Xiang-he

(*College of Aerospace Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, P.R.China*)

(Contributed by PENG Xiang-he, M. AMM Editorial Board)

Abstract: According to the main experimental constitutive characteristics of the NiTi shape memory alloys (SMAs) subjected to cyclic tensile loading, and in line with the constitutive relationship for the SMAs, an analytical approach and the corresponding numerical algorithm as well as the computational program were developed. The constitutive description is based on the mixture theory, employs the Voigt hypothesis, and takes into account the effects of forward and inverse martensitic transformation, reorientation deformation and plastic deformation. The pseudoelastic behavior of a NiTi SMA subjected to cyclic tensile loading and unloading was simulated. The comparison between the computed and experimental results shows that the main characteristics of the material under cyclic loading can be satisfactorily described, which demonstrates the validity of the constitutive model and the developed numerical program.

Key words: shape memory alloy; cyclic pseudoelastic-plastic deformation; constitutive model; numerical approach; verification

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11332013; 11272364)