

偏心冲击荷载作用下薄圆板 动力学响应的保结构分析*

秦于越¹, 邓子辰¹, 胡伟鹏^{1,2}

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072;
2. 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116023)

(本刊编委邓子辰来稿)

摘要: 关注动力学系统的局部几何性质,采用多辛分析方法研究了偏心冲击荷载作用下薄圆板振动特性.在探索偏心冲击荷载作用下薄圆板振动问题动力学控制方程的对称性和守恒律的对应关系基础上,对动力学控制方程在多辛体系下重新描述,并采用显式中点差分离散方法构造其多辛格式,通过对存在不同相对偏心距冲击荷载作用下的薄圆板振动过程的数值模拟,研究了相对偏心距对薄圆板振动特性的影响,同时,数值模拟结果也充分体现了多辛算法的良好保结构性能.该研究结果不仅为由于荷载作用位置误差带来的动力学响应偏差估计提供了依据,而且为偏心冲击动力学问题的研究提供了新的途径.

关键词: Hamilton(哈密尔顿)系统; 多辛; 薄圆板; 偏心冲击荷载

中图分类号: O241.82; O322 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.08.006

引言

薄板冲击动力学问题具有广泛的力学应用背景,包括:飞机机身抗冲击问题、装甲车车身抗冲击问题等,因而得到了力学家和数学家的广泛关注,相关的分析方法可以归结为两大类^[1-2]:一类是吸收了解析法结果准确和数值方法(主要是有限元法)处理边界灵活的优点,可以在明显减少计算量的同时提高计算精度,从而逐渐发展形成的半解析解法;另一类是在处理复杂的边界形状没有原则上的困难的数值方法.对于薄板冲击这类复杂的动力学问题,由于冲击荷载形式的特殊性,使得动力学响应时间和空间方向的变化率大,数值求解面临的主要困难在于:如何在保证计算效率(核心问题是求解步长问题)的同时,精确再现冲击动力学系统的局部几何性质.在笔者的已有工作中,已经采用保结构分析方法研究了薄圆板中心受冲击荷载作用下的振动问题^[3],而在实际工程中,冲击荷载作用的位置往往不可能恰好处于圆板中心,

* 收稿日期: 2014-04-08; 修订日期: 2014-06-16

基金项目: 国家自然科学基金(11372252; 11172239; 11372253); 工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学)开放基金(GZ0802; GZ1312)

作者简介: 秦于越(1980—),女,重庆人,讲师,博士(E-mail: 769482448@qq.com);

邓子辰(1964—),男,辽宁人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

由于冲击荷载作用的位置不是板的几何中心,这将导致圆板的动力学响应与已有的研究结果存在一定差异.本文正是基于这样的背景下,继续开展薄圆板在偏心冲击荷载作用下的动力学问题,将已有的研究工作进一步完善和推广.

保结构算法的基本思想是在数值离散过程中尽可能多地保持原连续系统的固有几何性质,使得数值分析过程与原连续系统在同一理论框架体系下进行^[4].其代表性研究成果及其相关研究阶段有:Feng(冯康)先生于1984年基于辛几何理论创立了针对有限维 Hamilton 系统的辛算法^[4],随后其所在课题组提出了多种构造辛格式的差分离散方法,这一系列的研究成果荣获1997年国家自然科学一等奖;上世纪90年代初,大连理工大学钟万勰院士等基于计算结构力学与最优控制理论的数学表述形式的一致性,将最优控制领域的“状态空间法”引入动力学系统,通过引入对偶向量,建立了一套针对 Hamilton 动力学系统的辛几何方法及时程精细积分理论^[5],凭借这一被誉为是近年来计算力学领域最重要的突破之一的研究成果,荣获2010年国家自然科学二等奖;为了将保结构思想深入到动力学系统的局部性质研究,Bridges将针对有限维 Hamilton 系统的辛几何算法推广至针对无限维 Hamilton 系统的多辛算法,并证明了多种常用的差分离散方法都是多辛的^[6];鉴于连续动力学系统中广泛存在的耗散问题,邓子辰教授等将针对保守动力学系统的多辛算法推广至用于处理弱耗散动力学问题的广义多辛算法,进一步拓展了保结构思想的应用领域^[7-8].

基于已有研究成果,本文进一步考虑冲击荷载作用位置的偏心影响,利用多辛算法研究偏心冲击荷载作用下中心对称薄圆板的动力学响应问题.

1 偏心冲击荷载作用下中心对称薄圆板振动模型及其对称形式

为与已有研究成果相区别^[3, 9],本文考虑偏心冲击荷载作用下的中心对称薄圆板动力学问题,如图1.虽然圆板振动问题是一个空间二维的动力学问题,但是由于圆板的材料参数和几何尺寸均是中心对称的,因此本文在极坐标系下,无需考虑极角这一自由度,而只需考虑极径这一自由度.其振动控制方程可表述为

$$\rho \partial_u w + D \partial_{rr} w + \frac{2D}{r} \partial_r w + \frac{D}{r^2} \partial_r w = A \delta(0, \tau),$$

$$t \geq 0, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \tau \leq R, \quad (1)$$

其中, ρ 为圆板单位面积的质量, $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$ 为圆板的弯曲刚度, E 为圆板材料弹性模量, h 为圆板厚度, ν 为圆板材料 Poisson(泊松)比, $w = w(t, r)$ 为圆板挠度, R 为圆板直径, $A \delta(0, \tau)$ 为圆板受到的冲击荷载, A 为冲击荷载的幅值, $\delta(0, \tau)$ 为冲击函数,表示在 $t = 0$ 时刻在 $r = \tau$ 的位置作用一个冲击荷载.

为了描述冲击荷载的相对作用位置,定义相对偏心距:

$$e_r = \tau / R. \quad (2)$$

与已有研究类似,冲击荷载的作用效果只反映在动力学问题的初值条件中,因此本文首先考虑中心对称薄圆板的自由振动问题:

$$\rho \partial_u w + D \partial_{rr} w + \frac{2D}{r} \partial_r w + \frac{D}{r^2} \partial_r w = 0, \quad t \geq 0, 0 \leq r \leq R. \quad (3)$$

其多辛对称形式在文献[3]中已经给出,即

$$\mathbf{M} \partial_t \mathbf{z} + \mathbf{K} \partial_x \mathbf{z} = \nabla_{\mathbf{z}} S(\mathbf{z}), \quad (4)$$

其中,状态向量 $\mathbf{z} = [w, u, p, q, \varphi]^T$ 的各分量定义为 $\partial_t w = u, \partial_r w = p, \partial_r p = q, \partial_r q = \varphi$,系统的

Hamilton 量定义为

$$S(z) = \frac{1}{2}(Dq^2 - \rho u^2) - Dp\varphi - \frac{2D}{r}w\varphi - \frac{D}{r^2}wq,$$

反对称的系数矩阵定义为

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

该对称形式是严格的多辛形式,由 Noether 定理可知,对称形式与守恒律密切相关,依据多辛积分理论^[6],该对称形式满足的多辛守恒律、局部能量守恒律和局部动量守恒律在文献[3]中已经分别给出,在此不再详述。

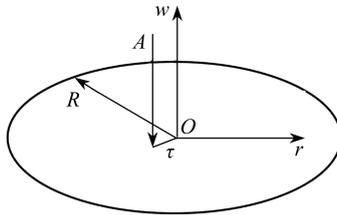


图 1 偏心冲击荷载作用下的中心对称薄圆板动力学计算模型

Fig.1 Computational model for a centrosymmetric thin circular plate under eccentric impact load

2 多辛形式的多辛差分离散

基于对冲击荷载作用下薄圆板振动问题的前期研究^[3],采用 Euler-Box 差分离散方法构造的多辛格式虽然在精度方面满足要求,但是由于 Euler-Box 差分格式属于隐式格式,其计算效率还不尽如人意,因此,本文将采用显式中点离散方法构造其显式的多辛格式。

令时间方向步长为 Δt ,空间方向的计算步长为 Δr ,采用均匀剖分计算区域之后,网格点处的挠度值 $w(i\Delta t, j\Delta r)$ 以 w_i^j 表示,分别在时间和空间方向采用显式中点差分离散方法得到多辛对称形式(4)的多辛格式:

$$M\delta_t^{1/2}z_i^j + K\delta_r^{1/2}z_i^j = \nabla_z S(z_i^j). \tag{5}$$

展开上式,即

$$\begin{cases} \rho\delta_t^{1/2}w_i^j + D\delta_r^{1/2}\varphi_i^j = -\frac{2D}{r}\varphi_i^j - \frac{D}{r^2}q_i^j, \\ -\rho\delta_t^{1/2}w_i^j = -\rho w_i^j, \\ -D\delta_r^{1/2}q_i^j = -D\varphi_i^j, \\ D\delta_r^{1/2}p_i^j = Dq_i^j, \\ -D\delta_r^{1/2}w_i^j = -Dp_i^j, \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$\delta_t^{1/2} = \frac{1}{2}(\delta_t^+ + \delta_t^-), \delta_r^{1/2} = \frac{1}{2}(\delta_r^+ + \delta_r^-), \delta_t^+ z_i^j = \frac{1}{\Delta t}(z_{i+1}^j - z_i^j),$$

$$\delta_{z_i^-} = \frac{1}{\Delta t}(z_i^j - z_{i-1}^j), \delta_{z_i^+} = \frac{1}{\Delta x}(z_i^{j+1} - z_i^j), \delta_{x_i^-} = \frac{1}{\Delta x}(z_i^j - z_{i-1}^j).$$

多辛格式(6)满足的离散多辛守恒律、离散局部能量守恒律和局部动量守恒律分别为

$$\rho \delta_i^{1/2} (du_i^j \wedge dw_i^j) + D \delta_r^{1/2} (d\varphi_i^j \wedge dw_i^j + dp_i^j \wedge dq_i^j) = 0, \quad (7)$$

$$\delta_i^{1/2} \left[D(q_i^j)^2 - \rho(u_i^j)^2 - 2Dp_i^j\varphi_i^j - \frac{4D}{j}w_i^j\varphi_i^j - \frac{2D}{j^2}w_i^jq_i^j - D\varphi_i^j\delta_r^+w_i^j + Dq_i^j\delta_r^+p_i^j - Dp_i^j\delta_r^+q_i^j + Dw_i^j\delta_r^+\varphi_i^j \right] + \delta_r^{1/2} (Dw_i^j\delta_i^+\varphi_i^j - Dp_i^j\delta_i^+q_i^j + Dq_i^j\delta_i^+p_i^j - D\varphi_i^j\delta_i^+w_i^j) = 0, \quad (8)$$

$$\rho \delta_i^{1/2} (w_i^j\delta_r^+u_i^j - u_i^j\delta_r^+w_i^j) + \delta_r^{1/2} \left[D(q_i^j)^2 - \rho(u_i^j)^2 - 2Dp_i^j\varphi_i^j - \frac{4D}{r}w_i^j\varphi_i^j - \frac{2D}{r^2}w_i^jq_i^j + \rho w_i^j\delta_i^+u_i^j - \rho u_i^j\delta_i^+w_i^j \right] = 0. \quad (9)$$

与文献[3]中离散形式的局部守恒律相比,本文构造的显式格式(6)所满足的离散守恒律(7)~(9)在数值模拟过程中的记录相对复杂一些,但是这与显式格式(6)的计算效率无关。

3 冲击荷载作用位置的偏心对圆板动力学响应影响的数值研究

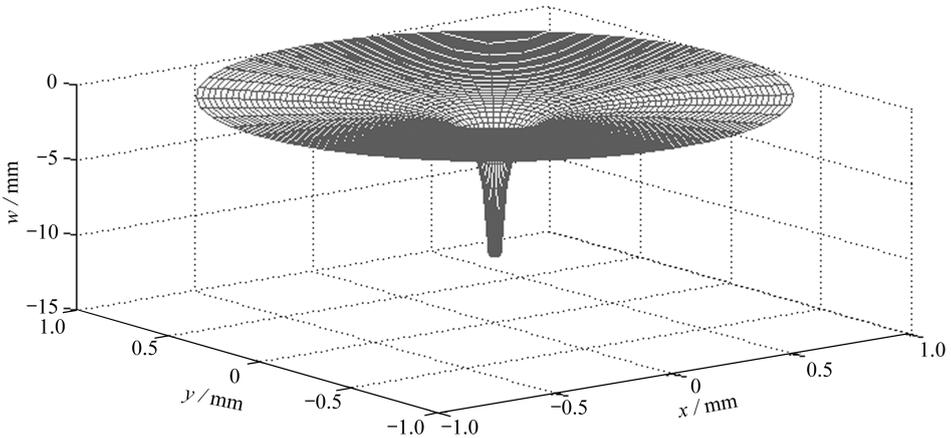
选取图1所示计算模型,考虑如下的初始条件(冲击荷载的作用效果在初始条件中体现,冲击荷载作用于 $r = \tau$ 这个圆周上的某一点,不失一般性,为初值条件数学表述的需要,将该点所对应的极角设定为 $\theta = \theta_0$, θ_0 为一常数,在以下数值实验中,本文取 $\theta_0 = 0$ (实际上,后续的计算结果与 θ_0 的取值无关)):

$$w(0, r) = 0, \partial_t w(0, r) = 0, \partial_u w(0, r) = \begin{cases} 0, & r \neq \tau, \theta \neq \theta_0, \\ Ar^2/D, & r = \tau, \theta = \theta_0, \end{cases} \quad (10)$$

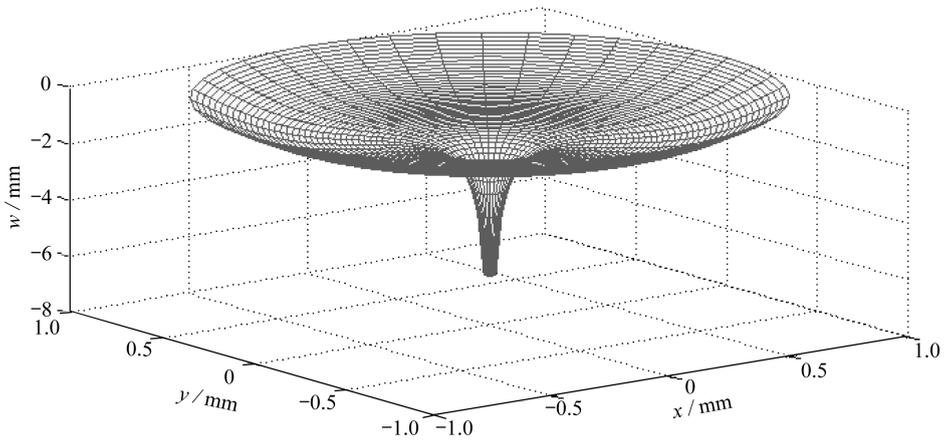
以及固定边界条件

$$w(t, R) = 0. \quad (11)$$

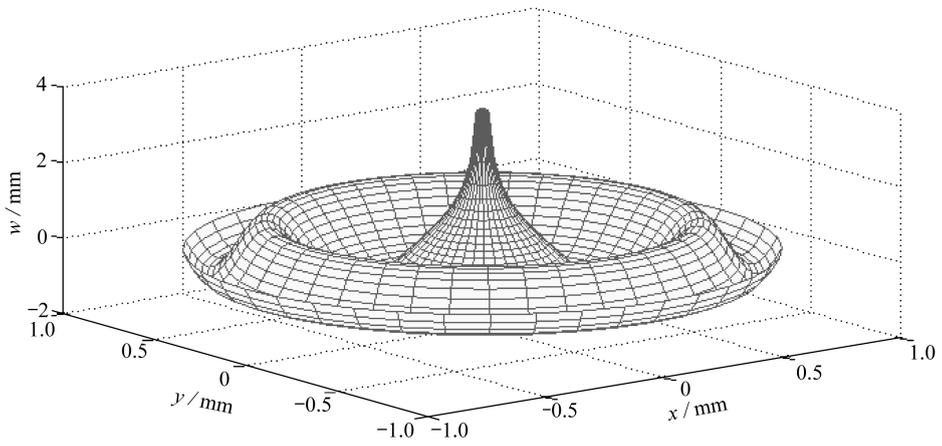
选取薄圆板的几何尺寸参数, $h = 0.01$ m, $R = 1$ m,薄圆板材料参数为 $\rho = 78$ kg/m², $E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$.取计算步长为 $\Delta t = 0.01$ s, $\Delta r = 0.02$.在 $t \in [0, 15$ s]时段内,模拟不同相对偏心距情形下,当冲击荷载幅值为 $A = 1$ kN时模拟薄圆板的振动情况,得到不同相对偏心距情形下圆板不同时刻的振动情况如图2、3、4所示。



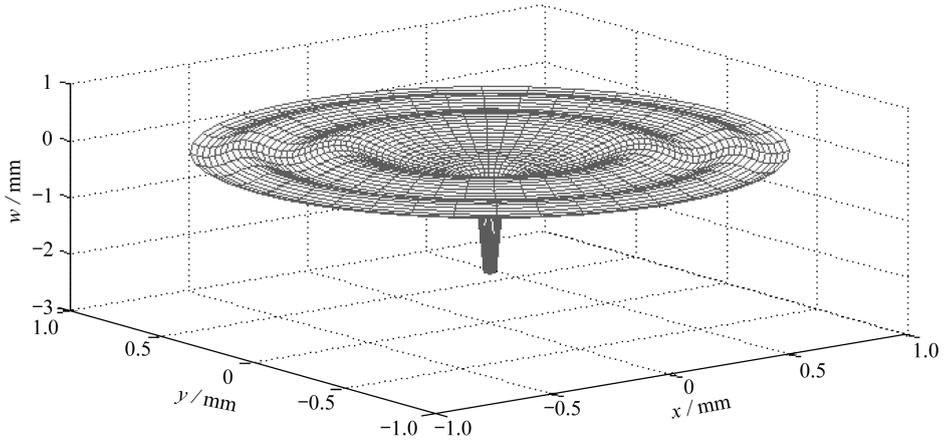
(a) $t = 0.5$ s



(b) $t = 5 \text{ s}$



(c) $t = 10 \text{ s}$

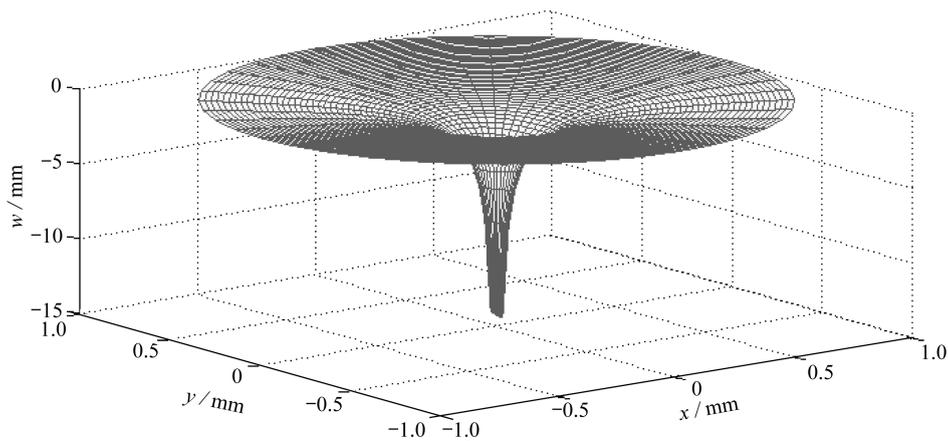
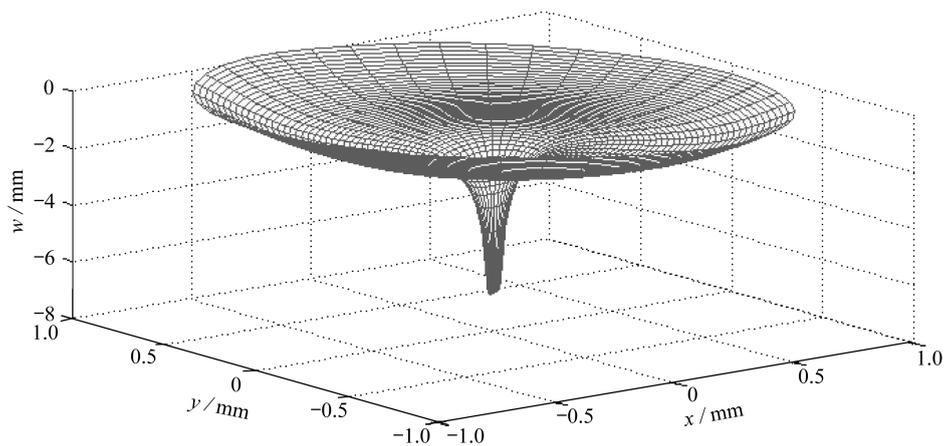
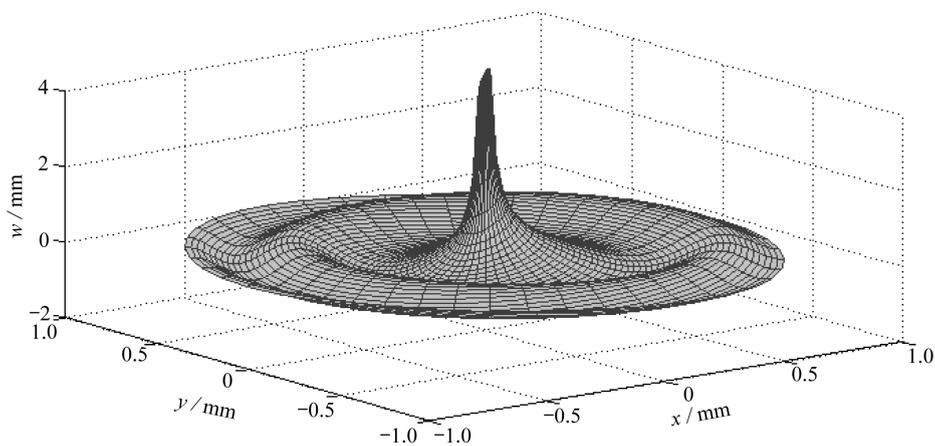


(d) $t = 15 \text{ s}$

图2 不同时刻圆板挠度分布情况, $e_r = 0$

Fig.2 Deflection of the circular plate at different moments for $e_r = 0$

图中挠度 w 的单位统一为 mm, 图 2 对应的相对偏心距为 $e_r = 0$, 图 3 对应的相对偏心距为 $e_r = 0.01$, 图 4 对应的相对偏心距为 $e_r = 0.05$.

(a) $t = 0.5$ s(b) $t = 5$ s(c) $t = 10$ s

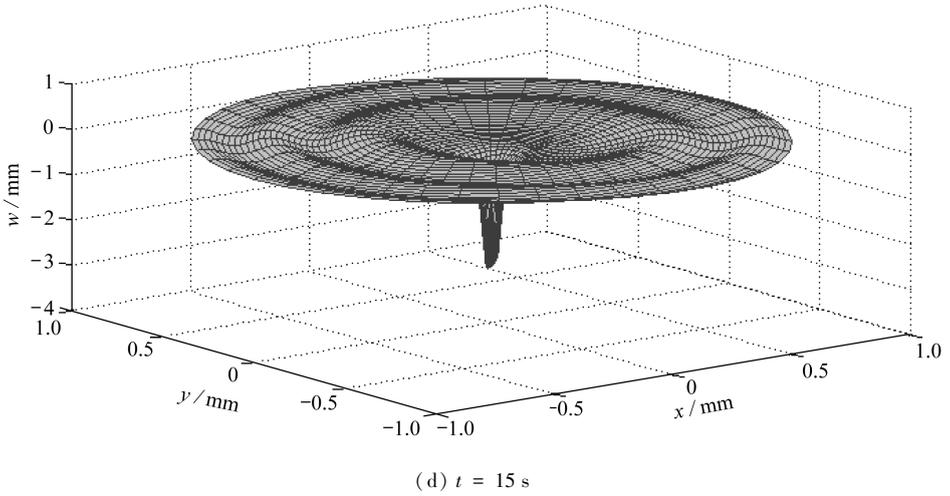
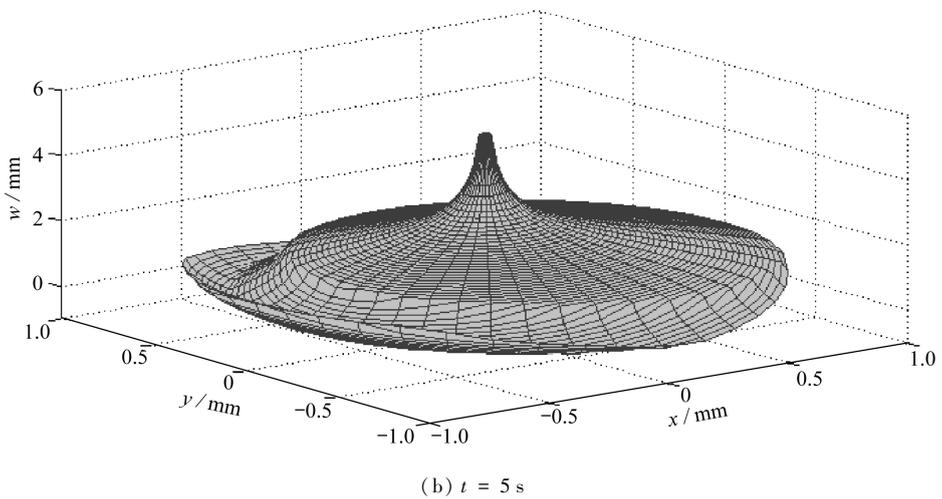
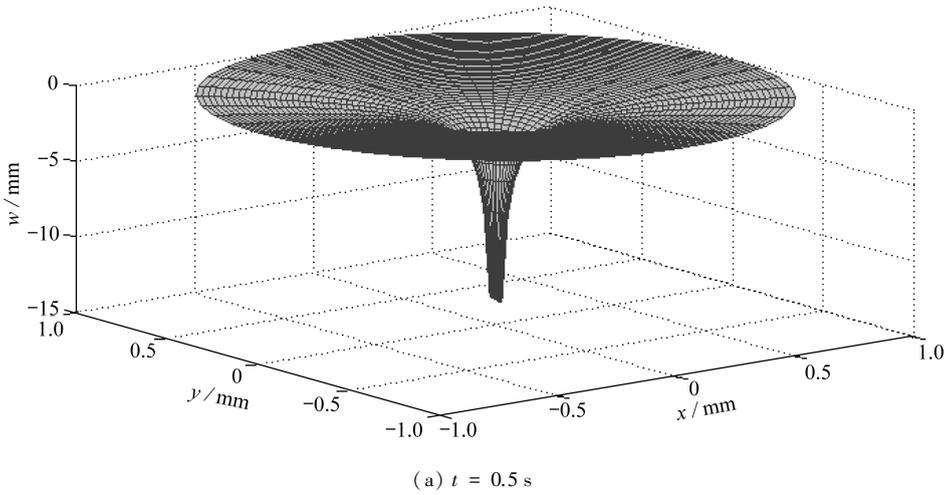


图3 不同时刻圆板挠度分布情况, $e_r = 0.01$

Fig.3 Deflection of the circular plate at different moments for $e_r = 0.01$



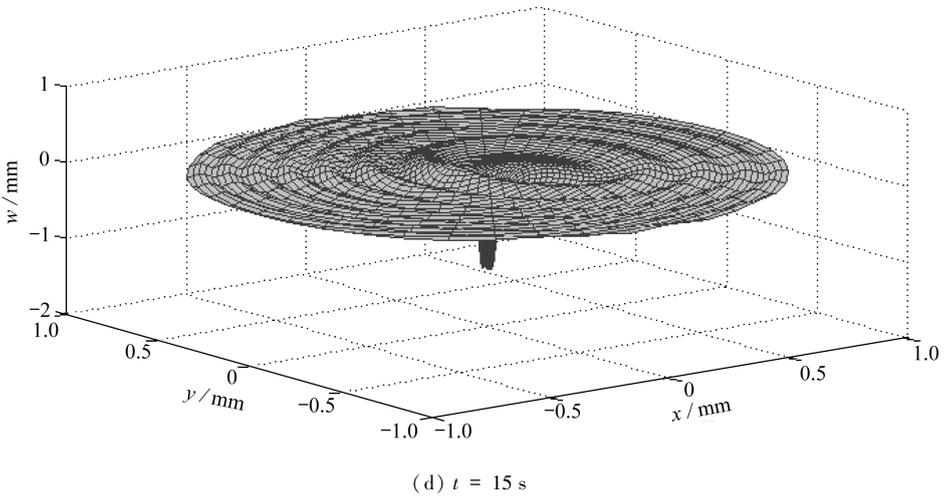
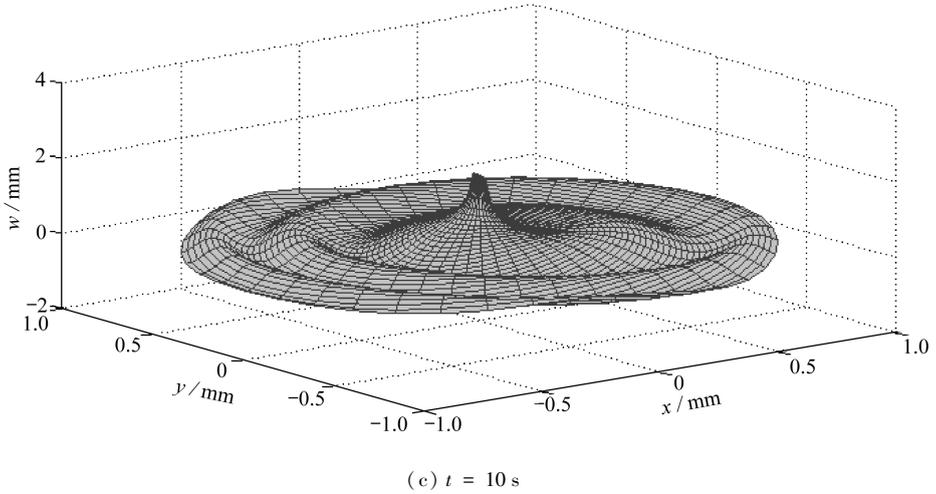


图4 不同时刻圆板挠度分布情况, $e_r = 0.05$

Fig.4 Deflection of the circular plate at different moments for $e_r = 0.05$

从以上模拟结果不难发现:在相对偏心距 $e_r = 0$ 时,即冲击荷载作用位置在圆板圆心时,圆板的振动情况每时每刻都是中心对称的,这与实际情况相符;但是当 $e_r > 0$ 时,圆板的振动就不再是中心对称的,在圆板中心与冲击荷载作用位置连线方向上,振动传播呈现出与其它方向不相同的规律,在冲击荷载作用位置的一侧,波数少,而在另一侧,波数相对较多。

比较图3和图4的模拟结果发现:随着相对偏心距的增大,冲击荷载作用位置的一侧与另一侧的振动波数差异越大,同时振动幅值越小,这些特点是偏心冲击荷载作用下薄圆板振动的特有性质,多辛算法的计算结果能够很好地再现这些特有性质,充分说明了多辛算法具有良好的保结构性能。

4 结 论

中心对称薄圆板在冲击荷载作用下的振动情况已有报道,本文在此基础上,针对实际工程中冲击荷载作用位置存在误差的情况,进一步采用多辛分析方法研究中心对称的薄圆板在偏

心冲击荷载作用下的动力学响应特点.通过对存在不同相对偏心距的冲击荷载作用下薄圆板振动特性的研究发现:1)冲击荷载作用位置的偏心将导致薄圆板振动的不对称性,不对称的程度随着相对偏心距的增大而加剧;2)随着相对偏心距的增大,薄圆板振动的振幅有所减小.以上两方面的计算结果一方面具体反映了不同相对偏心距的冲击荷载作用下薄圆板振动特性,另一方面也充分体现了本文采用的多辛算法能够很好地保持振动系统的几何性质,即多辛算法的保结构性质.

参考文献(References):

- [1] OUYANG Hua-jiang, ZHONG Wan-xie. A finite strip method in Hamiltonian formulation[J]. *Computers & Structures*, 1994, **53**(2): 241-244.
- [2] ZHONG Wan-xie. Some developments of computational solid mechanics in China[J]. *Computers & Structures*, 1988, **30**(4): 783-788.
- [3] 秦于越, 邓子辰, 胡伟鹏. 冲击荷载作用下中心对称薄圆板振动的多辛分析[J]. 西北工业大学学报, 2013, **31**(6): 931-934. (QIN Yu-yue, DENG Zi-chen, HU Wei-peng. Multi-symplectic analysis of vibration of centrosymmetric thin circular plate under impact load[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2013, **31**(6): 931-934. (in Chinese))
- [4] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[C]//*Proceeding of the 1984 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*. Beijing: Science Press, 1984: 42-58.
- [5] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993. (ZHONG Wan-xie, OUYANG Hua-jiang, DENG Zi-chen. *Computational Structural Mechanics and Optimal Control* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1993. (in Chinese))
- [6] Bridges T J. Multi-symplectic structures and wave propagation[J]. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1997, **121**(1): 147-190.
- [7] HU Wei-peng, DENG Zi-chen, HAN Song-mei, ZHANG Wen-rong. Generalized multi-symplectic integrators for a class of Hamiltonian nonlinear wave PDEs[J]. *Journal of Computational Physics*, 2013, **235**: 394-406.
- [8] 秦于越, 邓子辰, 胡伟鹏. 无限维 Hamilton 系统稳态解的保结构算法[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(1): 22-28. (QIN Yu-yue, DENG Zi-chen, HU Wei-peng. Structure-preserving algorithm for steady-state solution to the infinite dimensional Hamilton system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 22-28. (in Chinese))
- [9] Bycroft G N. Forced vibrations of a rigid circular plate on a semiinfinite elastic space and on an elastic stratum[J]. *Philosophical Transactions of the Royal of London Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*, 1956, **248**(948): 327-368.

Dynamic Analysis of Circular Thin Plates Under Eccentric Impact Load With the Structure-Preserving Method

QIN Yu-yue¹, DENG Zi-chen¹, HU Wei-peng^{1,2}

(1. *School of Mechanics and Civil. & Architecture,*

Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China;

2. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment*

(Dalian University of Technology), Dalian, Liaoning 116023, P.R.China)

(Contributed by DENG Zi-chen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Focused on the local geometric properties of the dynamic system, the multi-symplectic method was used to analyze the vibration behavior of the circular thin plate under eccentric impact load. Firstly, the governing equation for the vibration problem of the plate was re-described in the multi-symplectic framework. And then, the multi-symplectic scheme was constructed with the explicit midpoint method to simulate the dynamic process of the thin plate under impact load with different relative eccentric distances. Finally, the numerical results were presented and discussed in detail, which demonstrated the structure-preserving properties of the multi-symplectic algorithm. Generally, the numerical results not only present a reference for the estimation of the dynamic responses resulting from the acting position error of the load on the structure, but also propose a new way for the study of the eccentrically impacted plate problems.

Key words: Hamilton system; multi-symplectic; circular thin plate; eccentric impact load

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11372252; 11172239; 11372253)