

基于 Gauss 全局径向基函数的近岸 浅水变形波高数值计算新方法*

李 怡^{1,2,3}, 吴林键^{1,2}, 舒 丹^{1,2}, 陈嘉玉^{1,2}

- (1. 国家内河航道整治工程技术研究中心,
水利水运工程教育部重点实验室(重庆交通大学), 重庆 400074;
2. 重庆交通大学 河海学院, 重庆 400074;
3. 中国交建海岸工程水动力重点实验室, 天津 300222)

(我刊编委王平义推荐)

摘要: 应用 Gauss 全局径向基函数来模拟波浪浅水变形波高变化方程中的未知函数,经实例分析探讨得到了一种可用于求解该方程数值解的新方法,并将其计算结果与常用数值分析方法得到的数值解相互对比印证,证明了基于 Gauss 全局径向基函数法计算结果的正确性.经验证, Gauss 径向基函数法的平均计算误差相比其他方法均要小,表明该方法拥有更高的计算精度.同时,根据 Gauss 全局径向基函数的逼近结果,得出了浅水变形波高变化微分方程数值解的拟合函数,在实际工程中,可以利用该拟合函数来代替原方程的解析解,研究成果可为求解近岸浅水区域波浪运动提供一种新思路.

关键词: Gauss 全局径向基函数(GRBF); 浅水变形; 波高变化方程; 数值解

中图分类号: O353.2 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.08.008

引 言

波浪从深海向近岸传播,当第一次“触底”时会发生浅水变形.随着水深的不断减小,在周期不变的情况下,波长和波速也将逐渐减小,而波高却逐渐增加,当水深减小到一定程度时,波浪将出现各种形式的破碎.浅水波的一系列变化与近岸地区的泥沙运动有着十分密切的关系,文献资料表明,近岸泥沙运动主要是由波浪引起的^[1-5].因此,研究近岸浅水地区的波浪运动特征具有十分重要的意义.

近岸浅水区域内,假设波浪沿着 x 方向传播,可根据波能流连续性方程^[6]分别推导得出在层流边界层和紊流边界层条件下,浅水波高 H 在任意水深 h 处(即对应任意位置 x)的常微分方程.到目前为止,国内外学者均未得到该方程的解析解,只能根据现有的数值分析方法得出其数值解.本文基于前人对该问题研究的前提下,根据近些年来在国际上应用广泛的径向基

* 收稿日期: 2014-04-22; 修订日期: 2014-06-27

作者简介: 李怡(1972—),男,重庆人,教授,博士(E-mail: liyicqjtgw@163.com);

吴林键(1990—),男,重庆人,硕士生(通讯作者. E-mail: wljbgf@126.com).

函数几乎可以逼近所有的函数^[7-8]这一重要性质,利用 Gauss 全局径向基函数^[9]来模拟方程中的未知函数.得出一种可用于求解近岸浅水区任意水深 h 处的波高 H 数值解的新思路,并将该方法的计算结果与常用数值分析方法所得数值解进行对比,确保本文方法的正确性.研究成果可为求解近岸浅水区域波浪运动数值解提供一种新思路.

1 浅水变形波高变化方程

波浪由深水正向传播至浅水区域,其深水波高为 H_0 ,周期为 T .如图 1 所示,假设浅水区域海床底坡的坡角为 α ,坡度为 $m(m = \tan \alpha)$.本文中暂不考虑波浪折射,但必须考虑底部摩擦损失,其中摩擦因数为 f_w ,且来波均视为微幅波.

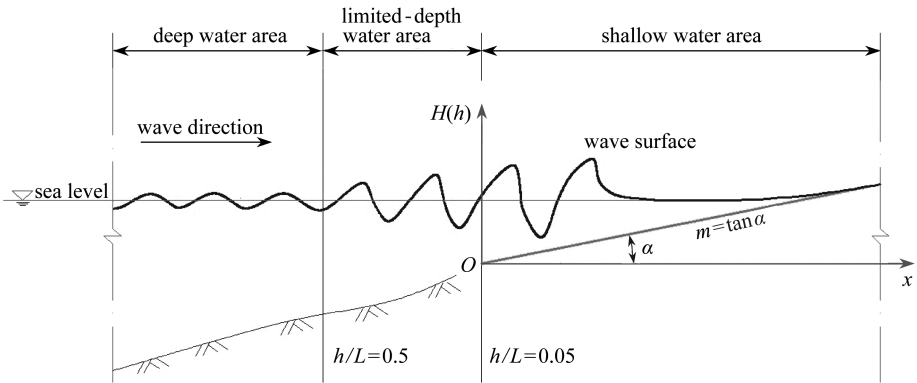


图 1 波浪由深水区传递至浅水区示意图

Fig.1 Wave transmission from deep to shallow water areas

令波浪刚进入浅水区域作为坐标原点 O ,建立水深 h 与 x 、浅水波高 H 与 x 的直角坐标系(分别为 xOh 和 xOH 坐标系),两个坐标系相互重合.由于波浪沿着 x 方向传播,根据波能守恒方程^[2]:

$$\frac{d(Ecn)}{dx} = -D_f, \tag{1}$$

式中, E 为波浪能量,其值为波动动能 E_k 与势能 E_p 之和,即 $E = 0.125 \rho g H^2$; c 为波速; $n = 0.5 [1 + (2kh) / (\sinh(2kh))]$; D_f 为单位床面上周期平均能量损耗率,根据层流边界层和紊流边界层分别计算.在浅水区域时, $c \approx \sqrt{gh}$, $n = 1$,由于浅水区域水深随 x 线性变化,故在 xOh 坐标系下,可求得浅水区任意位置处的水深,其表达式为

$$h = h_k - mx, \tag{2}$$

式中, h_k 为浅水临界水深.

1.1 层流边界层

在层流状态时,单位床面上周期平均能量损耗率 D_f 的表达式为

$$D_f = \frac{\rho \nu u_m^2}{2\delta}, \tag{3}$$

式中, ρ 为海水密度; ν 为海水粘滞系数; u_m 为波浪水质点近底水平速度最大值,在浅水区时,

$$u_m \approx \frac{\sigma H}{2kh} = \frac{Hc}{2h} \approx \frac{H}{2h} \sqrt{gh},$$

δ 为波浪边界层厚度, $\delta = \sqrt{2\nu/\sigma}$, 其中 σ 为圆频率。

将式(3)中所有参数代入式(1)中, 可得下式:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \sqrt{gh} \right) = - \frac{\rho \nu}{2\sqrt{2\nu/\sigma}} \left(\frac{H}{2h} \sqrt{gh} \right)^2. \quad (4)$$

再将式(2)代入式(4)中, 经一系列推导变换得

$$\frac{dH}{dx} = - \sqrt{\frac{\nu\sigma}{2g}} \cdot \frac{H}{2(h_k - mx) \sqrt{h_k - mx}} + \frac{H \cdot m}{4(h_k - mx)}. \quad (5)$$

式(5)即为层流边界层条件下, 波浪的浅水变形波高变化方程, 即波高值 H 在任意位置 x 处(对应任意水深 h) 的常微分方程。

1.2 紊流边界层

在紊流状态时, 单位床面上周期平均能量损耗率 D_f 的表达式为

$$D_f = \frac{2}{3\pi} \rho f_w u_m^3, \quad (6)$$

式中各参数值同上。同理, 将式(6)中所有条件代入式(1)中, 可得

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \sqrt{gh} \right) = - \frac{2}{3\pi} \rho f_w \left(\frac{H}{2h} \sqrt{gh} \right)^3, \quad (7)$$

再将式(2)代入式(7)中, 经推导变换可得

$$\frac{dH}{dx} = - \frac{f_w}{3\pi} \cdot \frac{H^2}{(h_k - mx)^2} + \frac{H \cdot m}{4(h_k - mx)}. \quad (8)$$

式(8)为在紊流边界层条件下波浪的浅水变形波高变化方程。

1.3 求解微分方程数值解的边界条件

1.3.1 “浅水”边界条件

波浪进入浅水区将发生浅水变形, 这将导致波高发生变化^[2]。如图1所示, 在 xOH 坐标系中, 当 $x = 0$ 时 ($h/L = 0.05$), 波高 $H_k = k_s \cdot H_0$, 其中, L 为波浪的波长, k_s 为浅水变形系数。同时, 在 xOh 坐标系中, 水深为 h_k 。即“浅水”边界条件可表示为

$$\begin{cases} H|_{x=0} = H_k, \\ h|_{x=0} = h_k. \end{cases} \quad (9)$$

1.3.2 “零水深”边界条件

当波浪传播到岸上时, 假设在 $x = x_h$ 这个位置的水深 $h = 0$, 即 $h(x_h) = 0$, 结合式(2), 可得到“零水深”边界条件表达式为

$$x_h = \frac{h_k}{m}. \quad (10)$$

1.3.3 “破波”边界条件

按照实际情况, 当波高与水深之比 (H/h) 接近于1时, 波浪将发生破碎。假设波浪破碎时 $x = x_b$, 此时破碎波高 H_b 与破碎水深 h_b 之间的关系为 $H_b = \gamma_b \cdot h_b$ 。其中, γ_b 为破碎指标, 可根据文献[2]中介绍的各种方法计算。故“破波”边界条件可表示为

$$\begin{cases} H|_{x=x_b} = H_b, \\ h|_{x=x_b} = h_b. \end{cases} \quad (11)$$

1.4 层、紊流边界层条件下的浅水变形波高方程

本文根据“浅水”、“零水深”边界条件,分别求解在层、紊流边界层条件下,浅水波高 H 在任意位置 x 处(即对应任意水深 h) 的数值解.而在实际情况下,波浪并未传播至 $x = x_h$ 时就已经发生了破碎,因此最后的求解结果需用“破波”边界条件来进行修正.故“浅水”、“零水深”边界条件下的浅水变形波高方程可表示为

1) 层流边界层

$$\begin{cases} \frac{dH}{dx} = -\sqrt{\frac{\nu\sigma}{2g}} \cdot \frac{H}{2(h_k - mx)\sqrt{h_k - mx}} + \frac{H \cdot m}{4(h_k - mx)}, & 0 \leq x \leq x_h, \\ H|_{x=0} = H_k; \end{cases} \quad (12)$$

2) 紊流边界层

$$\begin{cases} \frac{dH}{dx} = -\frac{f_w}{3\pi} \cdot \frac{H^2}{(h_k - mx)^2} + \frac{H \cdot m}{4(h_k - mx)}, & 0 \leq x \leq x_h, \\ H|_{x=0} = H_k. \end{cases} \quad (13)$$

2 Gauss 全局径向基函数

2.1 径向基函数

径向基函数(radial basis function,简称 RBF)^[9],其实质是通过定义在 $[0, +\infty)$ 上,以点 x 到节点 x_i 的距离 $R_i = \|x - x_i\|_2$ 为自变量的函数,其中 R_i 为 $(x - x_i)$ 的 Euclid(欧几里得)范数^[10].由于 RBF 具有形式简单、与空间维数无关、各向同性等优点,使其在多变量插值和逼近理论中已成为一种强有力的工具^[11].Gauss 全局径向基函数^[9]正是其中的一种,其表达式为

$$\phi_i(x) = e^{-cR_i^2}, \quad (14)$$

式中, c 为大于零的常数.本文想要利用径向基函数几乎可以逼近所有的函数这一性质,根据 Gauss 全局径向基函数的插值和逼近理论,来探讨一种可用于求解式(12)和式(13)中常微分方程数值解的新思路.

2.2 Gauss 全局径向基函数配点法

针对本文中需求解的 $H(x)$ 函数而言,将求解区域 X 用 n 个节点 x_i 进行离散,其中 $i = 1, 2, \dots, n$.函数 $H(x)$ 在域 X 中的近似函数 $H_s(x)$ 可用以各节点 x_i 为中心的 Gauss 全局径向基函数 $\phi_i(x)$ 表示,其表达式为

$$H_s(x) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_j(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \cdots \quad \phi_n(x)] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad (15)$$

式中,矩阵 \mathbf{a} 中各个元素 a_j 为待定系数,令 $\Phi(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \cdots \quad \phi_n(x)]$.式(15)中含有 n 个未知数,令近似函数 $H_s(x)$ 在节点 x_i 处的值等于原函数 $H(x)$ 在该节点处的值 H_i ,即 $H_s(x_i) = H_i$,就可得到 n 个方程组,即

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (16)$$

令式(16)中含有的 $\phi_{i,j}$ 元素的矩阵为 \mathbf{A} ,故由式(16)可解出系数矩阵 $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H}$,代入式(15)中,可得

$$H_s(x) = \Phi(x) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{H}, \quad (17)$$

式(17)中所得的 $H_s(x)$ 即为常微分方程中 $H(x)$ 的近似表达式, $\mathbf{N}(x)$ 为形函数矩阵.该式是利用 Gauss 全局径向基函数的逼近能力所得到的类似于解析解的解析表达式,这与有限元、差分方法求解数值解有着本质的区别,也是采用径向基函数求解数值解的最大优势所在.在实际工程中,可以利用该解析表达式来代替微分方程中 $H(x)$ 函数的解析解.

同理,方程中 H 的 1 阶导数项表达式为

$$H_s(x)_{,1} = \mathbf{N}(x)_{,1} \cdot \mathbf{H}, \quad (18)$$

式中下标“ $,1$ ”表示关于坐标 x 的 1 阶导数.则 $\mathbf{N}(x)_{,1}$ 的表达式为

$$\mathbf{N}(x)_{,1} = \Phi(x)_{,1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = [\phi_{1,1}(x), \phi_{2,1}(x), \cdots, \phi_{n,1}(x)] \cdot \mathbf{A}^{-1}. \quad (19)$$

在上述过程中,需求得 Gauss 全局径向基函数对 x 的 1 阶导数,其表达式为

$$\phi_{i,1}(x) = \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} = -2c(x - x_i) \cdot e^{-c \cdot (x - x_i)^2}. \quad (20)$$

将式(17)、(18)中的近似函数值 $H_s(x)$ 和 $H_s(x)_{,1}$ 代入式(12)、(13)中,构成含有 n 个未知数(H_1, H_2, \cdots, H_n)的方程组,通过施加本质边界条件,即可求得在每一个节点 x_i 处的近似函数值 $H_s(x_i)$.由于径向基函数插值满足 $H_s(x_i) = H(x_i) = H_i$ 的条件,因此在各个节点上的近似函数值与原函数值完全一致,当节点个数 n 趋近于无穷大时,则原函数与近似函数的图像在理论上就应该完全重合.本文正是利用了径向基函数的这一重要性质,来求解式(12)和式(13)中常微分方程的数值解.

3 算法流程

根据前面部分的公式推导,本文利用可视化通用数值分析软件 MATLAB 来计算得到常微分方程的 Gauss 全局径向基函数法数值解.如图 2 所示,为该算法的程序流程.

4 实例分析

4.1 初步计算

本文选取文献[2]中的波浪要素值,取深水波高 $H_0 = 1.06$ m,周期 $T = 9$ s,浅水区坡度为 $m = \tan \alpha = 0.05, \nu = 10^{-6}$ Pa·s, $f_w = 0.009 3$,经由上述条件,式(12)、(13)可写为

$$\begin{cases} \frac{dH}{dx} = -\frac{9.436 5 \times 10^{-5} \cdot H}{(1.984 5 - 0.05x)^{3/2}} + \frac{0.012 5H}{1.984 5 - 0.05x}, & 0 \leq x \leq 39.69, \\ H|_{x=0} = 1.337 3; \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{dH}{dx} = -\frac{9.867 6 \times 10^{-4} \cdot H^2}{(1.984 5 - 0.05x)^2} + \frac{0.012 5H}{1.984 5 - 0.05x}, & 0 \leq x \leq 39.69, \\ H|_{x=0} = 1.337 3. \end{cases} \quad (22)$$

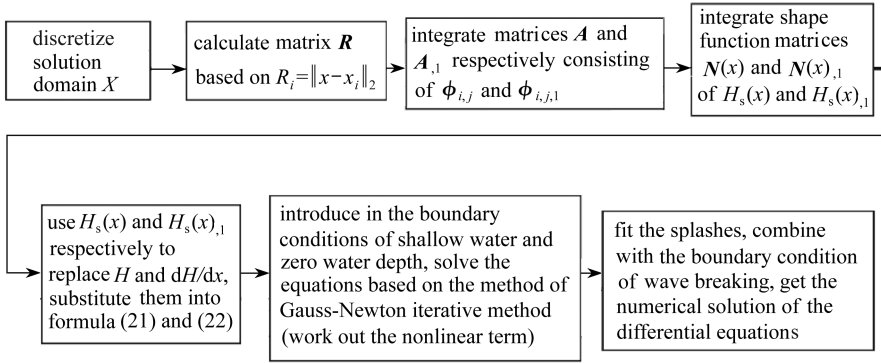


图2 Gauss 全局径向基函数算法流程

Fig.2 The flowchart for the Gauss RBF algorithm

利用 Gauss 全局径向基函数算法,经图 2 所示的计算程序,可计算得到式(21)、(22)的数值解.如图 3、4 所示.(共取了 41 个点,每 2 点之间的间距为 1 m)

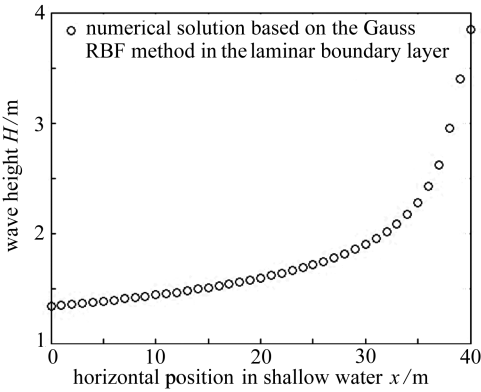


图3 层流边界层数值解

Fig.3 The numerical solution in the laminar boundary layer

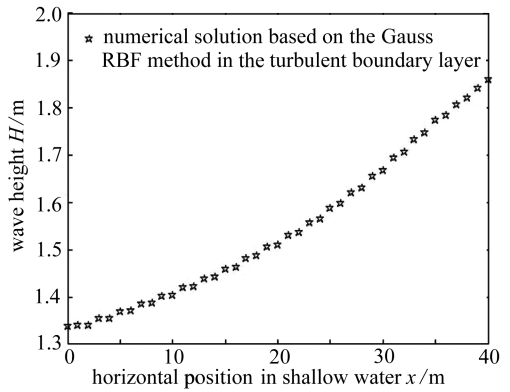


图4 紊流边界层数值解

Fig.4 The numerical solution in the turbulent boundary layer

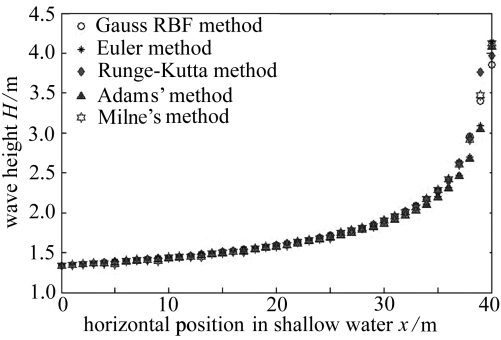


图5 层流边界层数值解与其它数值解比较

Fig.5 Comparison of numerical solutions in the laminar boundary layer

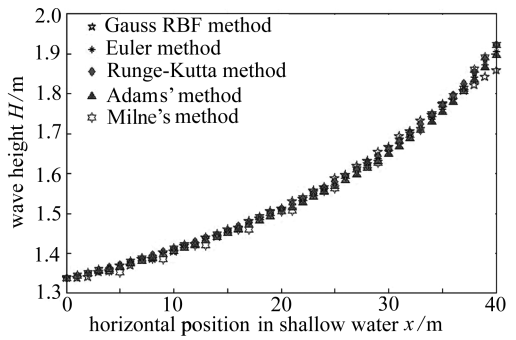


图6 紊流边界层数值解与其它数值解比较

Fig.6 Comparison of numerical solutions in the turbulent boundary layer

从图中的计算结果可知,随着 x 的增加,水深 h 不断变浅,在周期 T 不变的情况下,波高 H 不断增大,这与理论分析相吻合^[2],充分表明了计算结果在变化趋势上的正确性.但为了进一

步验证 Gauss 全局径向基函数算法的可靠性,将计算结果与 Euler 法、Runge-Kutta 法、Adams 方法和 Milne 方法^[12]计算得到的数值解进行比较,如图 5、6 所示。

从图中可以看出,经由 Gauss 全局径向基函数算法得到的数值解与其余多种方法得到的结果吻合程度较高,表明了该算法计算结果的正确性和可靠性.为进一步验证 Gauss 全局径向基函数法相比于其余算法的计算精度,将计算得到的数值解结果重新代入常微分方程表达式中,令误差 δ 等于式(21)、(22)中等号左式减去等号右式,同时计算得到各方法中 δ 的平均值,其结果如表 1 所示。

表 1 各方法的平均误差绝对值

Table 1 The absolute average error values of each method

boundary layer condition	Gauss RBF method	Runge-Kutta method	Euler method	Adams' method	Milne's method
laminar	0.014 9	0.039 8	0.038 5	0.038 3	0.039 7
turbulent	0.005 8	0.012 3	0.012 4	0.012 5	0.012 2

从表 1 中可以看出,Gauss 径向基函数法的平均计算误差相比于其他方法均要小,表明该方法拥有更高的计算精度。

4.2 “破波”边界条件修正

以上计算的结果并未考虑“破波”边界条件,当 $x > x_b$ 之后,波浪将出现各种程度上的破碎,根据 Collins 和 Weir 经验公式^[13],可计算得到本算例中波浪破碎指标 $\gamma_b = 1.0$.由于破碎波高 H_b 与破碎水深 h_b 之间存在如下关系:

$$H_b(x_b) = \gamma_b \cdot h_b = \gamma_b \cdot (h_k - mx_b), \tag{23}$$

故将图 3、4 中得到的图形进行曲线拟合^[14],如图 7、图 8 所示。

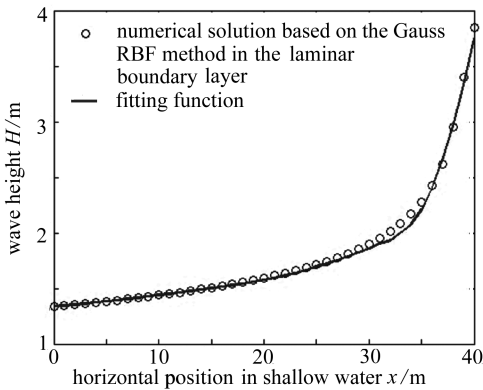


图 7 层流边界层拟合函数

Fig.7 The fitting function in the laminar boundary layer

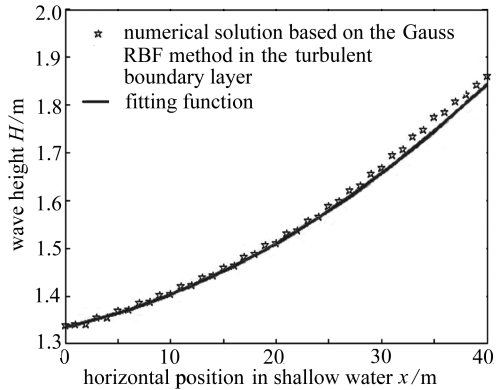


图 8 紊流边界层拟合函数

Fig.8 The fitting function in the turbulent boundary layer

层流、紊流边界层的拟合函数表达式分别为层流:

$$H = \begin{cases} 0.000 2x^2 + 0.008 1x + 1.337 8, & 0 \leq x \leq 15 (R^2 = 0.999 9), \\ 0.001x^2 + 0.021 4x + 1.603 6, & 16 \leq x \leq 30 (R^2 = 0.999 3), \\ 0.028 1x^2 - 1.8x + 30.787, & 31 \leq x \leq 40 (R^2 = 0.992 6); \end{cases} \tag{24}$$

紊流:

$$H = 0.0002x^2 + 0.0047x + 1.3359, \quad 0 \leq x \leq 40 (R^2 = 0.9993), \quad (25)$$

式中, R 表示相关系数. 将式(24)、(25)代入式(23)中, 可计算得到层流边界层波浪破碎位置 $x_b = 13.085$ m; 紊流边界层波浪破碎位置 $x_b = 11.384$ m. 也就是说, 当 $x > x_b$ 之后的数值解结果就不再有意义. 故在 $0 < x < x_b$ 时(“破波”边界条件), 层流、紊流边界层的数值解及拟合如图9、10所示.

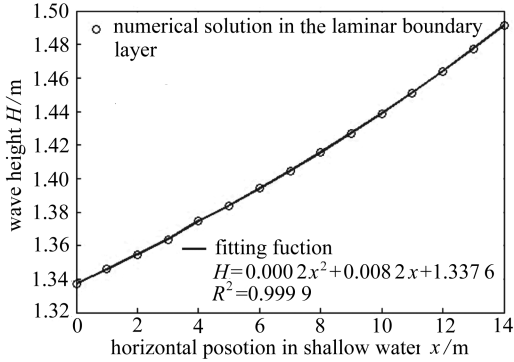


图9 层流边界层“浅水”至“破波”边界条件的数值解

Fig.9 The numerical solution in the laminar boundary layer from shallow water to wave breaking boundary condition

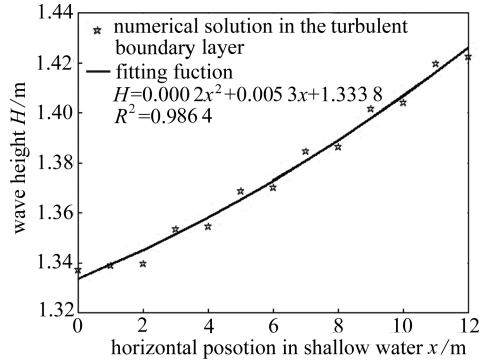


图10 紊流边界层“浅水”至“破波”边界条件的数值解

Fig.10 The turbulent solution in the laminar boundary layer from shallow water to wave breaking boundary condition

5 结 论

本文应用 Gauss 全局径向基函数来模拟波浪浅水变形波高变化方程中的未知函数, 经实例分析探讨得到了一种可用于求解近岸浅水区任意水深 h 处波高 H 数值解的新方法, 并将该方法的计算结果与常用数值分析方法 (Euler 法、Runge-Kutta 法、Adams 方法和 Milne 方法) 得到的数值解相互对比印证, 证明了基于 Gauss 全局径向基函数法计算结果的正确性. 经验证, Gauss 径向基函数法的平均计算误差相比于其他方法均要小, 表明该方法拥有更高的计算精度. 同时, 根据 Gauss 全局径向基函数的逼近原理, 得出了浅水变形波高变化微分方程的解析表达式 $H_s(x)$, 在实际工程中, 可以利用该 $H_s(x)$ 表达式来代替 $H(x)$ 函数的解析解, 研究成果可为求解近岸浅水区域波浪运动数值解提供一种新思路.

致谢 作者衷心感谢重庆交通大学研究生教育创新基金(20130102;20130105;20130119)对本文的资助.

参考文献 (References):

- [1] 邱大洪. 波浪理论及其在工程上的应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000. (QIU Da-hong. *Wave Theory and Application in Engineering* [M]. Beijing: China Communications Press, 2000. (in Chinese))
- [2] 邹志利. 海岸动力学[M]. 第四版. 北京: 人民交通出版社, 2009. (ZOU Zhi-li. *Coastal Dynamics* [M]. 4th ed. Beijing: China Communications Press, 2009. (in Chinese))
- [3] 黄建维. 海岸与河口粘性泥沙运动规律的研究与应用[M]. 北京: 海洋出版社, 2008. (HUANG Jian-wei. *The Study and Application of Cohesive Sediment Motion in Coastal and Estuarine*

- [M]. Beijing: Ocean Press, 2008. (in Chinese))
- [4] P·D·柯马尔. 海滩过程与沉积作用[M]. 邱建立, 庄振业, 崔承琦 译. 北京: 海洋出版社, 1985. (Kemal P D. *The Beach and Deposition Process* [M]. QIU Jian-li, ZHUANG Zhen-ye, CUI Cheng-qi transl. Beijing: Ocean Press, 1985. (in Chinese))
- [5] 刘家驹. 海岸泥沙运动研究及应用[M]. 北京: 海洋出版社, 2009. (LIU Jia-ju. *The Study and Application of Coast Sediment Movement* [M]. Beijing: Ocean Press, 2009. (in Chinese))
- [6] 薛鸿超. 海岸及近海工程[M]. 北京: 中国环境科学出版社, 2003. (XUE Hong-chao. *Coastal and Offshore Engineering* [M]. Beijing: China Environmental Science Press, 2003. (in Chinese))
- [7] 吴宗敏. 径向基函数、散乱数据拟合与无网格偏微分方程数值解[J]. 工程数学学报, 2002, 19(2): 1-12. (WU Zong-min. Radial basis function scattered data interpolation and the meshless method of numerical solution of PDEs [J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2002, 19(2): 1-12. (in Chinese))
- [8] 马利敏. 径向基函数逼近中的若干理论、方法及其应用[D]. 硕士学位论文. 上海: 复旦大学, 2009. (MA Li-min. Some theory, methods and application in RBF approaching [D]. Master Thesis. Shanghai: Fudan University, 2009. (in Chinese))
- [9] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (ZHANG Xiong, LIU Yan. *Meshless Method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))
- [10] 张耀屹. 正向入射波波压力在散体斜坡内的变化机理研究[D]. 硕士学位论文. 重庆: 重庆交通大学, 2012. (ZHANG Yao-yi. Research on the change mechanism of positively incident wave pressure in the granular slope [D]. Master Thesis. Chongqing: Chongqing Jiaotong University, 2012. (in Chinese))
- [11] 徐绩青, 李正良, 吴林健. 基于径向基函数逼近的结构动力响应计算方法[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(5): 533-541. (XU Ji-qing, LI Zheng-liang, WU Lin-jian. The calculation method of structural dynamics response based on the approximation theory of radial basis function [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(5): 533-541. (in Chinese))
- [12] 任玉杰. 数值分析及其 MATLAB 实现[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007. (REN Yu-jie. *Numerical Analysis and MATLAB Implementation* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2007. (in Chinese))
- [13] 李远林. 近海结构水动力学[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1999. (LI Yuan-lin. *Offshore Structure Hydrodynamics* [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1999. (in Chinese))
- [14] 汪宏健. 用 MATLAB 进行曲线拟合的方法[J]. 铜陵学院学报, 2003, 2(2): 77-78, 81. (WANG Hong-jian. The method of curve-fitting by MATLAB [J]. *Journal of Tongling College*, 2003, 2(2): 77-78, 81. (in Chinese))

A New Method to Calculate the Wave Height of Deformed Shallow Water Based on the Gauss Global Radial Basis Function

LI Yi^{1,2,3}, WU Lin-jian^{1,2}, SHU Dan^{1,2}, CHEN Jia-yu^{1,2}

(1. *Key Laboratory of Hydraulic & Waterway Engineering of the Ministry of Education (Chongqing Jiaotong University), National Engineering Technology Research Center for Inland Waterway Regulation, Chongqing 400074, P.R.China;*

2. *School of River & Ocean Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R.China;*

3. *CCCC Key Hydrodynamic Laboratory for Coastal Engineering, Tianjin 300222, P.R.China)*

(Recommended by WANG Ping-yi, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The Gauss global radial basis function (GRBF) was used to simulate the unknown function of the changing wave height differential equation for shallow water deformation. Through a case analysis a new GRBF method was built to obtain the numerical solution of this equation in the conditions of laminar as well as turbulent boundary layers, and the GRBF calculation results were compared with those from the traditional numerical methods. The average calculation error of the GRBF method is smaller than that of the other methods, which indicates higher calculation accuracy of the proposed method. Meanwhile, based on the GRBF approximation results, a fitting function to the numerical solution of the wave height differential equation for deformed shallow water was formulated and intended to replace the corresponding intangible analytical solution in engineering application. The work provides a new way to study the wave motion in the coastal shallow water areas.

Key words: Gauss global radial basis function (GRBF); shallow water deformation; changing wave height equation; numerical solution