文章编号:1000-0887(2014)08-0913-07

具有承袭性的高阶导数有理插值算法*

荆 科[1,2], 刘业政[1], 康 宁[3]

(1. 合肥工业大学 管理学院, 合肥 230009;
2. 阜阳师范学院 数学与金融学院, 安徽 阜阳 236037;
3. 阜阳师范学院 经济与管理学院, 安徽 阜阳 236037)

摘要: 切触有理插值是函数逼近的一个重要内容,而降低切触有理插值的次数和解决切触有理插值函数的存在性是有理插值的一个重要问题.切触有理插值函数的算法大都是基于连分式进行的,其算法可行性是有条件的,且计算量较大.利用 Newton(牛顿)多项式插值的承袭性和分段组合的方法,构造出了一种无极点且满足高阶导数插值条件的切触有理插值函数,并推广到向量值切触有理插值情形;既解决了切触有理插值函数存在性问题,又降低了切触有理插值函数的次数.最后给出误差估计,并通过数值实例说明该算法具有承袭性、计算量低、便于编程等特点.

关 键 词: 切触有理插值; Newton 插值; 分段组合; 承袭性; 高阶导数

中图分类号: O241.3;O174.42 **文献标志码:** A

doi:10.3879/j.issn.1000-0887.2014.08.009

引 言

切触有理插值是类似于多项式插值中的 Hermite(埃米特)插值的一种插值.即给定 $n+1$ 个互异的点 $\{x_i\}$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b. \tag{1}$$

寻求有理函数 $r(x) = p(x)/q(x)$ 使之满足下列插值条件:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)\Bigg|_{x=x_i} = f_i^{(k)} \qquad (k=0,1,\cdots,s_i-1;\ i=0,1,\cdots,n). \tag{2}$$

文献[1]将式(2)的非线性插值问题转化为等价的线性问题.但求解线性方程组需较大计算量.文献[2]利用连分式的方法构造切触有理插值的函数,可以称之为经典的算法.文献[3]利用 Hermite-Newton 插值公式给出了一个判断切触有理插值函数存在性的充要条件.文献[4]给出了切触有理插值的 Neville(内维尔)递推算法.文献[5]利用凸组合方法,构造出了一种切触有理插值函数,但是有理函数的次数较高.文献[6]利用 Hermite 插值基函数和多项式插值误差的性质,给出了一种切触有理插值算法.文献[7]给出一种具有重节点的 Padé(帕德)逼近与切触有理插值有关的算法.文献[8-9]给出了一种基于 Newton-Padé 逼近方法的切触有理插

* **收稿日期:** 2013-12-06; **修订日期:** 2014-06-09
基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2013CB329603)
作者简介: 荆科(1983—),男,安徽颍上人,博士生(E-mail: jingxuefei296@sina.com);
刘业政(1965—),男,安徽和县人,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: liuyezheng@hfut.edu.cn).

值算法.上述算法结果虽然很好,但是算法的可行性都需要一定的条件,不便于实际应用,且大都是针对 $s_i = 2$ 的情形.

所谓的向量值切触有理插值问题,就是寻求向量值有理函数

$$\boldsymbol{R}(x) = \frac{\boldsymbol{N}(x)}{Q(x)} = \frac{(n_1(x), n_2(x), \cdots, n_t(x))}{Q(x)},$$

使得下列条件满足:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k \left(\frac{\boldsymbol{N}(x)}{Q(x)}\right)_{x=x_i} = \boldsymbol{V}_i^{(k)} \qquad (k = 0,1,\cdots,s_i - 1;\ i = 0,1,\cdots,n), \tag{3}$$

其中 $Q(x)$ 和 $n_j(x)\,(j = 1,2,\cdots,t)$ 是实系数多项式.

文献[10]利用连分式及 Samelson 逆和文献[11]利用 Hermite-Newton 插值公式给出了不同的向量值切触有理插值函数的构造方法,但是计算量较大,且算法的可行性都是有条件的.

本文利用 Newton 插值的承袭性思想和分段组合的方法,构造了一种具有承袭性且满足高阶导数插值条件的切触有理插值算法并将其推广到向量值切触有理插值情形,既解决了切触有理插值函数的存在性问题,又降低了切触有理插值函数的次数.

1 切触有理插值公式

为了建立切触有理插值公式,利用文献[12-13]的 Newton 插值的承袭性思想和分段组合的方法,引入非负整数 $m(0 \leqslant m \leqslant n)$, 将节点(1)按

$$x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n \qquad (i = 0,1,\cdots,m) \tag{4}$$

进行分组,记每组节点(4)和函数值及导数值 $f_j^{(k)}\,(k = 0,1,\cdots,s - 1;\ j = i,i + 1,\cdots,n)$ 所做的插值多项式记为 $p_i(x)$.根据文献[14]中的定理 1 可知, 多项式 $p_i(x)$ 是唯一确定的且次数为 $s(n - i) + s - 1$.对节点(1)取过节点(4)后剩下的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}$ 做如下代数多项式:

$$\omega_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)^s, \qquad s_i = s,\ s \geqslant 2,\ s \in \mathbf{Z}_+ . \tag{5}$$

令

$$q(x) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i(x), \tag{6}$$

$$\beta_i(x) = \frac{\omega_i(x)}{q(x)}, \qquad i = 0,1,\cdots,m, \tag{7}$$

显然 $\beta_i(x)$ 是[$(si)/(sm)$]型有理函数.利用 $\beta_i(x)$ 及 $p_i(x)$ 做线性组合:

$$r(x) = \sum_{i=0}^{m} \beta_i(x) p_i(x) = \frac{\sum_{i=0}^{m} \omega_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{m} \omega_i(x)}, \tag{8}$$

容易得出 $r(x)$ 是[$(sn + s - 1)/(sm)$]型有理函数.

定理 1 对任意给定的非负整数 $m(0 \leqslant m \leqslant n)$,由式(8)所确定的有理函数 $r(x)$ 满足插值条件:

$$r^{(k)}(x_i) = f_i^{(k)} \qquad (k = 0,1,\cdots,s - 1;\ i = 0,1,\cdots,n). \tag{9}$$

证明 设被插值函数为 $f(x)$ 及 $f(x) - p_i(x) = \alpha_i(x)$, $1/\sum_{i=0}^{m} \omega_i(x) = D(x)$, 则根据式(5)、(6)可得,当 $k = i, i + 1, \cdots, n$ 时, $\omega_i(x_k) > 0$, 否则 $\omega_i(x_k) = 0$, $i = 0,1,\cdots,n$, 所以有理插

值函数的分母多项式(6)在插值节点(1)上的函数值恒大于0.

$$f(x)-r(x)=\frac{f(x)\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)-\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)p_i(x)}{\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)}=$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)[f(x)-p_i(x)]}{q(x)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)\alpha_i(x)}{q(x)}=\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)\alpha_i(x)D(x),\tag{10}$$

利用Leibniz(莱布尼茨)公式得

$$[\omega_i(x)\alpha_i(x)D(x)]^{(s-1)}=\sum_{j=0}^{s-1}C_{s-1}^{j}[\omega_i(x)\alpha_i(x)]^{(j)}D^{(s-1-j)}(x),\tag{11}$$

$$[\omega_i(x)\alpha_i(x)]^{(j)}=\sum_{t=0}^{j}C_j^t\omega_i^{(t)}(x)\alpha_i^{(j-t)}(x),\tag{12}$$

当 $k=0,1,\cdots,i-1$ 时,$\omega_i^{(t)}(x_k)=0$,当 $k=i,i+1,\cdots,n$ 时,$\alpha_i^{(j-t)}(x_k)=0$,所以在节点(1)处式(10)~(12)的值为0,故可得 $r(x)$ 满足插值条件.

同样为了建立向量值切触有理插值公式,引入非负整数 $m(0\leqslant m\leqslant n)$,将节点(1)按节点(4)进行分组,记由每组节点(4)和相应的向量值及其导数值 $\boldsymbol{V}_j^{(k)}(k=0,1,\cdots,s-1;j=i,i+1,\cdots,n)$ 所做的向量值插值多项式记为 $\boldsymbol{N}_i(x)$.根据文献[10]中的定理1可知向量多项式 $\boldsymbol{N}_i(x)$ 是唯一确定的且次数为 $s(n-m)+s-1$.对节点(1)取过节点(4)剩下的节点 $x_0,x_1,\cdots,x_{i-1}$ 做如式(5)的代数多项式.同样利用 $\beta_i(x)$ 及 $\boldsymbol{N}_i(x)$ 做线性组合:

$$\boldsymbol{R}(x)=\sum_{i=0}^{m}\beta_i(x)\boldsymbol{N}_i(x)=\frac{\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)\boldsymbol{N}_i(x)}{\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)}.\tag{13}$$

定理2 对任意给定的所有非负整数 $m(0\leqslant m\leqslant n)$,由式(13)所确定的向量值有理函数 $\boldsymbol{R}(x)$ 满足插值条件 $\boldsymbol{R}^{(k)}(x_i)=\boldsymbol{V}_i^{(k)}(k=0,1,\cdots,s-1;i=0,1,\cdots,n)$.

事实上,只需要将定理1中的函数换成向量,采用类似的方法即可证明定理2.

式(8)和(13)即本文给出的数量值和向量值切触有理插值公式.通过选取不同的非负整数 m,可以得到不同类型的切触有理插值函数.且相比其他算法具有下列优点:

1)其他算法不具有承袭性,本文的算法在计算 $p_i(x)$ 和 $\omega_i(x)$ 时具有承袭性,例如计算 $\omega_{i+1}(x)$ 只需要对 $\omega_i(x)$ 乘以 $(x-x_i)^s$.

2)其他算法对于不同的有理函数类型,需要重新计算分子和分母多项式;而本文的算法对于不同的正整数 m,只需要对 $p_i(x)$ 和 $\omega_i(x)$ 增加或减少相应的项.

3)如果要增加或减少插值节点,其他算法需要重新计算所有分子和分母多项式,而本文的算法只需增加或减少 $p_i(x)$ 和 $\omega_i(x)$ 相应的项.

4)如果本文和其他算法的有理函数具有相同的次数,则本文算法在计算 $\omega_i(x)$ 时具有计算量低的特点.

本文的切触有理插值算法推广到向量值切触有理插值情形,相比于其他算法同样具有上述的优点.

2 误差估计

定理 3 设 $f^{(sn+s-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $f^{(sn+s)}(x)$ 在 (a,b) 内存在, $r(x)$ 是满足插值条件(9)的有理函数,则对于任何 $x\in[a,b]$, 插值余项为

$$f(x)-r(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(s(n-i)+s)}(\xi_i)}{(s(n-i)+s)!}}{\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)},\tag{14}$$

其中 $\xi_i\in[x_i,x_n]$。

特别当 $x\in(x_{m-1},b]$ 时,更有下面误差公式:

$$|f(x)-r(x)|\leqslant\left|\sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(s(n-i)+s)}(\xi_i)}{(s(n-i)+s)!}\right|[h^{(n-j+1)}(n-j+1)!]^{s},\tag{15}$$

其中 $h=\max_{0\leqslant i\leqslant n-1}(x_{i+1}-x_i)$。

证明 设

$$\lambda_i(x)=\frac{\omega_i(x)}{\omega_{n+1}(x)},\tag{16}$$

根据误差公式(14)对于任何 $x\in[a,b]$, 插值余项为

$$f(x)-r(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)\sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(s(n-i)+s)}(\xi_i)}{(s(n-i)+s)!}}{\sum_{i=0}^{m}\omega_i(x)}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(s(n-i)+s)}(\xi_i)}{(s(n-i)+s)!}}{\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(x)}.$$

下面考虑当 $x\in(x_{m-1},b]$ 时分母多项式:

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(x)\right|=\frac{q(x)}{\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^s\right|}\geqslant\frac{\omega_j(x)}{\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^s\right|}=$$

$$|\lambda_j(x)|=\frac{1}{|(x-x_j)^s,(x-x_{j+1})^s,\cdots,(x-x_n)^s|}.\tag{17}$$

假设 $x_m\leqslant x_k<x<x_{k+1}\leqslant x_n$, 则有

$$|(x-x_j)^s,(x-x_{j+1})^s,\cdots,(x-x_n)^s|\leqslant\prod_{i=j}^{k}(x_{k+1}-x_i)^s\prod_{i=k+1}^{n}(x_i-x_k)^s\leqslant$$

$$[(k-j+1)!]^s[(n-k)!]^s h^{(n-j+1)s}\leqslant[(n-j+1)]^s h^{(n-j+1)s},\tag{18}$$

由此可得

$$\left|\sum_{i=0}^{m}\lambda_i(x)\right|\geqslant\frac{1}{[(n-j+1)!]^s h^{(n-j+1)s}}.$$

所以误差公式:

$$|f(x)-r(x)|\leqslant\left|\sum_{i=0}^{m}\frac{f^{(s(n-i)+s)}(\xi_i)}{(s(n-i)+s)!}\right|[h^{(n-j+1)}(n-j+1)!]^{s}.\tag{19}$$

仿照定理 3 的证明方法,对于条件(12)所定义的向量值有理插值函数,类似地可以得出下面的向量值有理插值误差定理.

定理 4 设 $\boldsymbol{V}^{(sn+s-1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\boldsymbol{V}^{(sn+s)}(x)$ 在 (a,b) 内存在, $\boldsymbol{R}(x)$ 是满足条件

(12)的向量值有理函数,则对于任何 $x \in [a,b]$, 插值余项为

$$\boldsymbol{V}(x) - \boldsymbol{R}(x) = \frac{\omega_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{m} \dfrac{\boldsymbol{V}^{(s(n-i)+s)}(\xi_i)}{(s(n-i)+s)!}}{\sum_{i=0}^{m} \omega_i(x)}, \tag{20}$$

其中 $\xi_i \in [x_i, x_n]$.

同样当 $x \in (x_{m-1}, b]$ 时,则也有如下的误差公式:

$$\| \boldsymbol{V}(x) - \boldsymbol{R}(x) \| \leqslant \left\| \sum_{i=0}^{m} \frac{\boldsymbol{V}^{(s(n-i)+s)}(\xi_i)}{(s(n-i)+s)!} \right\| [h^{(n-j+1)}(n-j+1)!]^s. \tag{21}$$

3 数值例子

通过下面的数值例子,可以验证本文的有理插值算法的可行性是无条件的,具有计算量较低、有理函数次数较低、以及承袭性等特点.

例 1 已知插值条件 $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$, $f_0 = 0$, $f'_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f'_1 = 2$, $f_2 = 2$, $f'_2 = 3$, 试求 $m = 1$ 时的切触有理插值函数.

解 由式(5)得

$$\omega_0(x) = 1,\ \omega_1(x) = (x+1)^2,$$

$$p_0(x) = 1.5x^5 + 0.5x^4 - 2.5x^3 - 0.5x^2 + 2x + 1,\ p_1(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1,$$

将数据代入式(8)得

$$r(x) = \frac{\sum_{i=0}^{1} \omega_i(x) p_i(x)}{\sum_{i=0}^{1} \omega_i(x)} = \frac{(1.5x^5 + 0.5x^4 - 2.5x^3 - 0.5x^2 + 2x + 1) + (3x^3 - 4x^2 + 2x + 1)(x+1)^2}{x^2 + 2x + 2} = \frac{4.5x^5 + 2.5x^4 - 5.5x^3 + 0.5x^2 + 6x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

例 2 已知 $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ 及 $\boldsymbol{V}_0 = (0,1)$, $\mathrm{D}\boldsymbol{V}_0 = (1,1)$, $\boldsymbol{V}_1 = (-1,0)$, $\mathrm{D}\boldsymbol{V}_1 = (1,-1)$, $\boldsymbol{V}_2 = (2,1)$, $\mathrm{D}\boldsymbol{V}_2 = (1,2)$, 试求 $m = 1$ 时的向量值切触有理插值函数.

解 由式(5)得

$$\omega_0(x) = 1,\ \omega_1(x) = (x+1)^2,$$

$$\boldsymbol{N}_0(x) = (-2x^4 + 4x^2 + x - 1,\ -0.25x^5 - 0.75x^4 + 1.25x^3 + 1.75x^2 - x),$$

$$\boldsymbol{N}_1(x) = (-4x^3 + 6x^2 + x - 1,\ -x^3 + 3x^2 - x),$$

将数据代入式(12)得

$$\boldsymbol{R}(x) = \frac{\sum_{i=0}^{1} \omega_i(x) \boldsymbol{N}_i(x)}{\sum_{i=0}^{1} \omega_i(x)} = \frac{\left(-4x^5 - 4x^4 + 9x^3 + 11x^2 - 2,\ -\dfrac{5}{4}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{21}{4}x^3 + \dfrac{11}{4}x^2 - 2x\right)}{x^2 + 2x + 2},$$

容易检验上面的有理函数都是满足插值条件的,算法的可行性是无条件的(分母多项式恒大于0),有理函数的次数较低(分母多项式的次数仅为2).

4 结 论

本文利用Newton插值的承袭性思想和分段组合方法,构造的只是一种针对在所有插值节点导数阶数相同的切触有理插值算法,虽然解决了切触有理插值函数的存在性问题,又降低了切触有理插值函数的分母多项式次数且算法具有承袭性,但是对于导数阶数不同情况的切触有理插值算法并没有解决,且本文的算法也不能降低分子多项式的次数,这些问题值得进一步研究.

对于本文给定的算法,如何选取合适非负参数 m, 需要视情况而定.特别是当插值节点的数量较大以及需要增加或减少插值节点时,本文算法的简便性更能够得到体现.

致谢 感谢阜阳师范学院科研项目(2013FSKJ11)对本文的资助.

参考文献(References):

[1] Salzer H E. Note on osculatory rational interpolation[J]. *Mathematics of Computation*, 1962, **16**(80): 486-491.

[2] Wuytack L. On the osculatory rational interpolation problem[J]. *Mathematics of Computation*, 1975, **29**(131): 837-843.

[3] 朱晓临. (向量)有理函数插值的研究及其应用[D]. 博士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2002: 32-43.(ZHU Xiao-lin. Research on (vector) rational function interpolation and its application[D]. PhD Thesis. Hefei: University of Science and Technology of China, 2002: 32-43.(in Chinese))

[4] 王仁宏, 朱功勤. 有理函数逼近及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 117-183.(WANG Ren-hong, ZHU Gong-qin. *Rational Function Approximation and Its Application*[M]. Beijing: Science Press, 2004: 117-183.(in Chinese))

[5] 朱功勤, 马锦锦. 构造切触有理插值的一种方法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2006, **29**(10): 1320-1326.(ZHU Gong-qin, MA Jin-jin. A way of constructing osculatory rational interpolation[J]. *Journal of Hefei University of Technology*(*Natural Sciences*), 2006, **29**(10): 1320-1326.(in Chinese))

[6] 朱功勤, 何天晓. 具有重节点的分段Padé逼近的一个算法[J]. 计算数学, 1981, **3**(2): 179-182.(ZHU Gong-qin, HE Tian-xiao. A method of calculation about the *N*-point sectional Padé approximant[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 1981, **3**(2): 179-182.(in Chinese))

[7] 朱功勤, 黄有群. 插值(切触)分式表的构造[J]. 计算数学, 1983, **5**(3): 310-317. (ZHU Gong-qin, HUANG You-qun. The construction of the table of interpolating (osculatory) rationals [J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 1983, **5**(3): 310-317.(in Chinese))

[8] 苏家铎, 黄有度. 切触有理插值的一个新算法[J]. 高等学校计算数学学报, 1987, **9**(2): 170-176.(SU Jia-duo, HUANG You-du. A new algorithm of osculatory rational interpolation[J]. *Numerical Mathematics*: *A Journal of Chinese Universities*, 1987, **9**(2): 170-176.(in Chinese))

[9] 荆科, 康宁, 姚云飞. 一种切触有理插值的构造方法[J]. 中国科学技术大学学报, 2013, **43**(6): 477-479.(JING Ke, KANG Ning, YAO Yun-fei. A new method of constructing osculatory rational interpolation function [J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2013, **43**(6): 477-479.(in Chinese))

[10] 朱功勤，顾传青. 向量的 Salzer 定理[J]. 数学研究与评论，1990，**10**(4)：516.(ZHU Gong-qin，GU Chuan-qing. Vector Salzer theorem[J]. *Journal of Mathematical Research and Exposition*，1990，**10**(4)：516.(in Chinese))

[11] 陶有田，朱晓临，周金明，徐鑫. 向量值切触有理插值存在性的一种判别方法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版)，2007，**30**(1)：117-120.(TAO You-tian，ZHU Xiao-lin，ZHOU Jin-ming，XU Xin. A decision method for existence of vector-valued osculatory rational interpolants[J]. *Journal of Hefei University of Technology* (*Natural Sciences*)，2007，**30**(1)：117-120.(in Chinese))

[12] Sidi A. A new approach to vector-valued rational interpolation[J]. *Journal of Approximation Theory*，2004，**130**(2)：179-189.

[13] Sidi A. Algebraic properties of some new vector-valued rational interpolants[J]. *Journal of Approximation Theory*，2006，**141**(2)：142-161.

[14] 盛中平，林正华. 广义 Vandermonde 行列式及其应用[J]. 高等学校计算数学学报，1996，**18**(3)：217-225.(SHENG Zhong-ping，LIN Zheng-hua. The generalized Vandermonde determinant and its applications[J]. *Numerical Mathematics*：*A Journal of Chinese Universities*，1996，**18**(3)：217-225.(in Chinese))

High Order Derivative Rational Interpolation Algorithm With Heredity

JING Ke[1,2]， LIU Ye-zheng[1]， KANG Ning[3]

(1. *School of Management*，*Hefei University of Technology*，*Hefei* 230009，*P.R.China*；
2. *School of Mathematics and Finance*，*Fuyang Teachers College*，*Fuyang*，*Anhui* 236037，*P.R.China*；
3. *School of Economics and Management*，*Fuyang Teachers College*，*Fuyang*，*Anhui* 236037，*P.R.China*)

Abstract：Osculatory rational interpolation was an important theme of function approximation，meanwhile，reducing the degree and solving the existence of the osculatory rational interpolation function made a crucial problem for rational interpolation. The previous algorithms of osculatory rational interpolation functions mostly depended on the continued fraction with conditional feasibility and high computation complexity. Based on heredity of the Newton interpolation and the method of piecewise combination，an osculatory rational interpolation function without real poles was constructed to meet the condition of high order derivative interpolation，and was in turn extended to the vector-valued cases. It not only solved the existence problem for the osculatory rational interpolation function，but reduced the degree of the rational function. Furthermore，the error estimates of the new algorithm was given. Results of the numerical examples illustrate the new algorithm's heredity，low computation complexity and easy programmability.

Key words：osculatory rational interpolation；Newton interpolation；piecewise combination；heredity；high order derivative

Foundation item：The National Basic Research Program of China (973 Program) (2013CB329603)