

# $n$ 维糖酵解模型非常数稳态解的模式生成\*

魏美华<sup>1</sup>, 常金勇<sup>2</sup>, 祁 兰<sup>1</sup>, 张巧卫<sup>1</sup>

(1. 榆林学院 数学与统计学院, 陕西 榆林 719000;

2. 中国科学院 信息工程研究所, 北京 100093)

**摘要:** 研究了一类带 Neumann 边界条件的  $n$  维糖酵解模型. 首先, 以扩散系数  $d_1$  为分歧参数, 运用局部分歧理论分析了该模型非常数稳态解的局部结构. 其次, 利用全局分歧理论和 Leray-Schauder 度理论讨论了非常数稳态解的全局存在性. 最后, 借助数值模拟证实了所得结论. 分析结果表明  $n$  维糖酵解模型的空间模式可以生成.

**关键词:** 糖酵解模型; 稳态解; 模式生成; 全局分歧

**中图分类号:** O175.26      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.08.011

## 引 言

空间结构的模式生成一直是备受关注的热点问题<sup>[1-3]</sup>. 1952年, 英国著名数学家 Turing(图灵)<sup>[4]</sup>提出了在相互作用的化学系统中扩散导致不稳定, 并进化为空间模式. 通过建立数学模型<sup>[5]</sup>并运用相关理论来定性研究空间模式成为一个重要的手段. 本文主要研究  $n$  维糖酵解模型的空间模式的生成, 而糖酵解模型有着明显的实际背景和广泛的应用, 特别地, 它应用于冷云系流云的形成过程<sup>[6]</sup>, 相应的糖酵解模型如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \delta - ku - uv^2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + ku - v + uv^2, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_{\nu} u = \partial_{\nu} v = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Delta$  为 Laplace 算子,  $\Omega$  是  $R^n$  ( $n \geq 1$ ) 中具有光滑边界  $\partial\Omega$  的有界区域,  $u, v$  分别为两种物质的浓度,  $\delta$  表示输入量,  $k$  表示在酶的低活性状态下的速率常数,  $d_1, d_2$  为两物质的扩散系数,  $\nu$  是单位外法线向量. 本文总假定所有的常数  $\delta, k, d_1, d_2$  都是正的, 且  $0 < k < 1/8$  和  $k < \delta^2$ .

关于该模型的研究工作主要集中在空间分布均匀的情况下对时间振荡行为的研究<sup>[7-9]</sup>. 文献[7-8]在数值和实验上说明了时间振荡的存在性, 而文献[9]从数学上证实了时间振荡的存

\* 收稿日期: 2014-02-26; 修订日期: 2014-06-13

基金项目: 国家自然科学基金(11271236); 陕西省教育厅科研计划资助项目(生化反应中糖酵解模型的动力学性质研究)(14JK1862)

作者简介: 魏美华(1981—), 女, 山西大同人, 讲师, 博士(通讯作者. E-mail: wei.meihua@163.com).

在性和稳定性.考虑到空间分布的不均匀性,文献[10-11]讨论了常数稳态解的存在性和稳定性.而本文进一步运用拓扑度理论和解的先验估计研究了该模型非常数稳态解的存在性和不存在性<sup>[12]</sup>.

基于以上的工作,本文运用分歧理论和 Leray-Schauder 度理论研究  $n$  维糖酵解模型非常数稳态解的局部结构和全局存在性,并用数值模拟对所得的理论结果作出解释和验证.所做工作是笔者原有工作的继续和深入,同时也推广了文献[13].

## 1 预备知识

显然,模型(1)相应的椭圆型方程为

$$\begin{cases} d_1 \Delta u + \delta - ku - uv^2 = 0, & x \in \Omega, \\ d_2 \Delta v + ku - v + uv^2 = 0, & x \in \Omega, \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

从而模型(1)的正稳态解转化为模型(2)的正解(下文中  $\bar{\Omega}$  表示有界区域  $\Omega$  的闭区域).为了方便讨论,首先给出模型(2)正解的一些已有结论.

设特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \lambda \phi, & x \in \Omega, \\ \partial_\nu \phi = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的特征值为  $\lambda_i$ , 则  $\lambda_i$  满足  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , 并且令  $m_i \geq 1$  是  $\lambda_i$  的代数重数,  $\phi_{ij}, 1 \leq j \leq m_i$  是  $\lambda_i$  的规范化后的特征函数,  $\|\phi_{ij}\|_2 = 1$ . 从而,  $\{\phi_{ij}; i \geq 0, 1 \leq j \leq m_i\}$  构成  $L^2(\Omega)$  空间的一组标准正交基.

显然  $(u^*, v^*) = (\delta/(k + \delta^2), \delta)$  是模型(1)唯一的常数稳态解.

**引理 1**<sup>[12]</sup> 设  $(u(x), v(x))$  是方程(2)的一个正解, 则

$$\frac{\delta}{k + c^2\delta^2} < u(x) < \frac{\delta}{k}, \quad \frac{k\delta}{k + c^2\delta^2} < v(x) < c\delta, \quad c = \frac{d_1}{d_2k} + 1, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

**引理 2**<sup>[12]</sup> 如果  $d_1 \leq \frac{k^2(k + \delta^2)}{(c\delta^2)^2} \lambda_1 d_2^2$ , 那么方程(2)没有非常数正解.

引理 2 表明若  $d_1$  比较小或  $d_2$  比较大时, 方程(2)没有非常数正解.

本文总假设

$$\delta^2 \in \left( k, \frac{1 - 2k - \sqrt{1 - 8k}}{2} \right) \cup \left( \frac{1 - 2k + \sqrt{1 - 8k}}{2}, \infty \right) \quad (3)$$

成立.它是该糖酵解模型的常数稳态解无扩散稳定的充分条件.

**引理 3**<sup>[12]</sup> 假设条件(3)成立.令

$$d_1^{(i)} = \frac{f_0 g_1 - f_1 g_0 - d_2 f_0 \lambda_i}{\lambda_i (g_1 - d_2 \lambda_i)}.$$

若  $\lambda_1 \geq \frac{g_1}{d_2}$  或  $\lambda_r < \frac{g_1}{d_2} \leq \lambda_{r+1}$  且  $0 < d_1 < \min_{1 \leq i \leq r} d_1^{(i)}$ , 那么常数稳态解  $(u^*, v^*)$  是局部渐近稳定的.若

$$\lambda_r < \frac{g_1}{d_2} \leq \lambda_{r+1}, \quad d_1 > \min_{1 \leq i \leq r} d_1^{(i)},$$

那么常数稳态解  $(u^*, v^*)$  是不稳定的.

## 2 局部分歧和全局分歧

引理 3 表明在条件(3)下,  $(u^*, v^*)$  是 Turing 不稳定的. 在此基础上进一步分析该  $n$  维糖酵解模型空间模式的生成. 固定参数  $\delta, k$  和  $d_2$ , 以  $d_1$  作为分歧参数, 运用分歧理论讨论模型(2)正解的存在性.

设 Hilbert 空间  $Y = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  的内积为

$$(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)_Y = (u_1, u_2)_{L^2(\Omega)} + (v_1, v_2)_{L^2(\Omega)}, \mathbf{U}_1 = (u_1, v_1), \mathbf{U}_2 = (u_2, v_2) \in Y.$$

令  $E = \{(u, v) : u, v \in C^2(\bar{\Omega}), \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, x \in \partial\Omega\}$ , 则  $E$  是  $C^2$  范数意义下的 Banach 空间. 定义映射  $F: (0, \infty) \times E \rightarrow Y$  为

$$F(d_1, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} d_1 \Delta u + f(u, v) \\ d_2 \Delta v + g(u, v) \end{pmatrix},$$

其中  $\mathbf{U} = (u, v)$ ,  $f(u, v) = \delta - ku - uv^2$ ,  $g(u, v) = ku - v + uv^2$ , 则方程(2)的解转化为  $F$  的零点, 且有  $F(d_1, \mathbf{U}^*) = 0$ , 其中  $\mathbf{U}^* = (u^*, v^*)$ . 记

$$f_0 = f_u(u^*, v^*) = -k - \delta^2 < 0, f_1 = f_v(u^*, v^*) = -\frac{2\delta^2}{k + \delta^2} < 0,$$

$$g_0 = g_u(u^*, v^*) = k + \delta^2 > 0, 0 < g_1 = g_v(u^*, v^*) = \frac{\delta^2 - k}{\delta^2 + k} < 1.$$

**定理 1** 假设条件(3)成立. 若正整数  $j$  满足

(i)  $\lambda_j < \frac{g_1}{d_2}$ ;

(ii)  $\lambda_j$  的代数重数  $m_j = 1$ ;

(iii) 对于任意正整数  $m, m \neq j$  时  $d_1^{(m)} \neq d_1^{(j)}$ ;

则  $(d_1^{(j)}, \mathbf{U}^*)$  是  $F(d_1, \mathbf{U}) = 0$  关于曲线  $(d_1, \mathbf{U}^*)$  的分歧点, 且存在  $\delta > 0$ , 当  $|s| < \delta$  时  $C^1$  曲线  $(d_1(s), u(s), v(s))$  是模型(2)的正解, 并满足  $d_1(0) = d_1^{(j)}, \phi(0) = \psi(0) = 0$ , 其中

$$u(s) = u^* + s(a_{j1}\phi_{j1} + \phi(s)), v(s) = v^* + s(\phi_{j1} + \psi(s)), a_{j1} = \frac{d_2\lambda_j - g_1}{g_0}.$$

**证明** 1) 模型(2)相应于  $(u^*, v^*)$  的线性化算子为

$$L = F_U(d_1, \mathbf{U}^*) = \begin{pmatrix} d_1 \Delta + f_0 & f_1 \\ g_0 & d_2 \Delta + g_1 \end{pmatrix}.$$

设  $\Phi = (\phi, \psi) \in \ker L$ , 且令

$$\phi = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} a_{ij} \phi_{ij}, \psi = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} b_{ij} \phi_{ij},$$

则有

$$\sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} \mathbf{B}_i \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix} \phi_{ij} = 0, \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} f_0 - d_1 \lambda_i & f_1 \\ g_0 & g_1 - d_2 \lambda_i \end{pmatrix}.$$

由于  $\lambda_j$  的代数重数为 1, 并且  $m \neq j$  时  $d_1^{(m)} \neq d_1^{(j)}$ , 所以取  $d_1 = d_1^{(j)}$  可得

$$\ker L = \text{span} \{ \Phi \},$$

其中

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ 1 \end{pmatrix} \phi_{j1}, \quad a_{j1} = \frac{d_2 \lambda_j - g_1}{g_0} < 0.$$

2)  $L$  的共轭算子

$$L^* = \begin{pmatrix} d_1^{(j)} \Delta + f_0 & g_0 \\ f_1 & d_2 \Delta + g_1 \end{pmatrix}.$$

类似(i)可证

$$\ker L^* = \text{span} \{ \Phi^* \},$$

其中

$$\Phi^* = \begin{pmatrix} a_{j1}^* \\ 1 \end{pmatrix} \phi_{j1}, \quad a_{j1}^* = \frac{d_2 \lambda_j - g_1}{f_1} > 0.$$

所以  $R(L)$  的余维数为 1.

3) 因为

$$F_{d_1 v}(d_1^{(j)}, U^*) \Phi = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi = \begin{pmatrix} -\lambda_j a_{j1} \phi_{j1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

且

$$(F_{d_1 v}(d_1^{(j)}, U^*) \Phi, \Phi^*)_Y = (-\lambda_j a_{j1} \phi_{j1}, a_{j1}^* \phi_{j1})_{L^2(\Omega)} = -\lambda_j a_{j1} a_{j1}^* > 0,$$

所以  $F_{d_1 v}(d_1^{(j)}, U^*) \Phi \notin R(L)$ .

综上, 由文献[14]得证该定理.

**定理 2** 在定理 1 的假设下, 由  $(d_1^{(j)}, U^*)$  产生的局部分歧可延拓成整体分歧.

**证明** 令  $\tilde{u} = u - u^*, \tilde{v} = v - v^*$ , 则模型(2)可转化为

$$\begin{cases} -d_1 \Delta \tilde{u} = f_0 \tilde{u} + f_1 \tilde{v} + f_2(\tilde{u}, \tilde{v}), & x \in \Omega, \\ -d_2 \Delta \tilde{v} = g_0 \tilde{u} + g_1 \tilde{v} + g_2(\tilde{u}, \tilde{v}), & x \in \Omega, \\ \partial_\nu \tilde{u} = \partial_\nu \tilde{v} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $f_2(\tilde{u}, \tilde{v}), g_2(\tilde{u}, \tilde{v})$  是  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  的高阶量, 从而模型(2)的常数解  $(u^*, v^*)$  转化为模型(4)的

$(0, 0)$  解. 令  $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v})^T$ , 则有

$$\tilde{U} = K(d_1) \tilde{U} + H(\tilde{U}), \quad (5)$$

其中

$$K(d_1) = \begin{pmatrix} 0 & f_1(-d_1 \Delta - f_0)^{-1} \\ g_0(-d_2 \Delta + 1)^{-1} & (g_1 + 1)(-d_2 \Delta + 1)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$H(\tilde{U}) = \begin{pmatrix} (-d_1 \Delta - f_0)^{-1} f_2(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ (-d_2 \Delta + 1)^{-1} g_2(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{pmatrix}.$$

那么  $K(d_1)$  是  $E$  上的线性紧算子,  $H(\tilde{U})$  是  $E$  上的紧算子且在  $d_1$  的闭子区间上一致成立  $H(\tilde{U}) = o(\|\tilde{U}\|)$ .

由定理 1 的证明知  $\ker(K(d_1^{(j)}) - I) = \ker L = \text{span} \{ \Phi \}$ , 即 1 是  $K(d_1^{(j)})$  的特征值. 若  $0 < d_1 \neq d_1^{(j)}$  在  $d_1^{(j)}$  的小邻域内, 则  $I - K(d_1)$  是双射且  $(0, 0)$  是方程(5)的孤立零点. 从而  $I - K(d_1) - H$  的零点指标为

$$\text{index}(I - K(d_1) - H, (d_1, (0, 0))) = \text{deg}(I - K(d_1), B, (0, 0)) = (-1)^p, \quad (6)$$

其中  $B$  是以  $(0,0)$  为中心的充分小的球,  $p$  为  $K(d_1)$  所有大于 1 的特征值的代数重数之和.

设  $\mu$  是  $K(d_1)$  的特征值, 相应的特征函数为  $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ , 那么

$$-d_1\mu\Delta\bar{\phi} = f_0\mu\bar{\phi} + f_1\bar{\psi}, \quad -d_2\mu\Delta\bar{\psi} = g_0\bar{\phi} + (g_1 - \mu + 1)\bar{\psi}.$$

同样, 令

$$\bar{\phi} = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} \bar{a}_{ij} \phi_{ij}, \quad \bar{\psi} = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} \bar{b}_{ij} \phi_{ij},$$

则有

$$\sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} \mathbf{B}_i(d_1, \mu) \begin{pmatrix} \bar{a}_{ij} \\ \bar{b}_{ij} \end{pmatrix} \phi_{ij} = 0, \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{B}_i(d_1, \mu) = \begin{pmatrix} f_0\mu - d_1\mu\lambda_i & f_1 \\ g_0 & g_1 + 1 - \mu - d_2\mu\lambda_i \end{pmatrix}.$$

所以  $K(d_1)$  的所有特征值等价于所有  $i \geq 0$ ,

$$(f_0 - d_1\lambda_i)(-1 - d_2\lambda_i)\mu^2 + (f_0 - d_1\lambda_i)(g_1 + 1)\mu - f_1g_0 = 0 \quad (8)$$

对应的根. 当  $d_1 = d_1^{(j)}$  时,  $\mu = 1$  为方程(8)的一个根, 计算可得  $d_1^{(j)} = d_1^{(i)}$ , 由已知得  $j = i$ . 从而, 当  $i \neq j$  时, 对于  $d_1^{(j)}$  附近的  $d_1$ ,  $K(d_1)$  大于 1 的特征值的数量相同, 并且具有相同的代数重数. 当  $i = j$  时, 方程(8)的两个根:

$$\mu(d_1^{(j)}) = 1, \quad \tilde{\mu}(d_1^{(j)}) = \frac{g_1 - d_2\lambda_j}{1 + d_2\lambda_j} < 1,$$

则  $d_1$  在  $d_1^{(j)}$  附近时,  $\tilde{\mu}(d_1) < 1$ . 而  $\mu(d_1)$  关于  $d_1$  是递增的, 所以

$$\mu(d_1^{(j)} + \varepsilon) > 1, \quad \mu(d_1^{(j)} - \varepsilon) < 1,$$

即  $K(d_1^{(j)} + \varepsilon)$  比  $K(d_1^{(j)} - \varepsilon)$  多一个大于 1 的特征值, 记为  $\mu(d_1^{(j)} + \varepsilon)$ . 为方便起见, 记  $d_1^{(j)} + \varepsilon = \hat{d}_1$ ,  $\mu(d_1^{(j)} + \varepsilon) = \hat{\mu}$ ,  $K(d_1^{(j)} + \varepsilon) = \hat{K}$ .

下证  $\hat{\mu}$  ( $\hat{\mu} > 1$ ) 是  $\hat{K}$  的代数重数为 1 的特征值. 由式(7)可知  $\det \mathbf{B}_i(\hat{d}_1, \hat{\mu}) = 0$ , 且

$$\ker(\hat{K} - \hat{\mu}I) = \begin{pmatrix} (1 + d_2\lambda_j)\hat{\mu} - (g_1 + 1) \\ g_0 \end{pmatrix} \phi_{j1}.$$

设  $(\hat{\phi}, \hat{\psi}) \in \ker(\hat{K} - \hat{\mu}I)$ , 则有

$$-d_2\Delta\hat{\phi} = -\hat{\phi} + g_0\hat{\psi}, \quad -d_1d_2g_0\Delta\hat{\psi} = f_{\hat{\phi}}\hat{\phi} + f_{\hat{\psi}}\hat{\psi},$$

其中

$$f_{\hat{\phi}} = d_2f_1g_0 - (d_1 + d_2f_0)(g_1 + 1), \quad f_{\hat{\psi}} = d_2f_0g_0 + d_1g_0(g_1 + 1).$$

令

$$\hat{\phi} = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} \hat{a}_{ij} \phi_{ij}, \quad \hat{\psi} = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} \hat{b}_{ij} \phi_{ij},$$

则有

$$\sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m_i} \mathbf{B}_i^*(\hat{d}_1, \hat{\mu}) \begin{pmatrix} \hat{a}_{ij} \\ \hat{b}_{ij} \end{pmatrix} \phi_{ij} = 0,$$

其中

$$\mathbf{B}_i^*(\hat{d}_1, \hat{\mu}) = \begin{pmatrix} -\hat{\mu} - d_2\hat{\mu}\lambda_i & g_0 \\ f_{\hat{\phi}} & f_{\hat{\psi}} - \hat{d}_1d_2g_0\hat{\mu}\lambda_i \end{pmatrix}.$$

由于  $\det \mathbf{B}_i^*(\hat{d}_1, \hat{\mu}) = d_2 g_0 \det \mathbf{B}_i(\hat{d}_1, \hat{\mu})$ , 同样可证

$$\ker(\hat{K}^* - \hat{\mu}I) = \begin{pmatrix} g_0 \\ (1 + d_2 \lambda_j) \hat{\mu} \end{pmatrix} \phi_{j1}.$$

进而由  $0 < g_1 < 1$  和  $\hat{\mu} > 1$  可知

$$g_0[(1 + d_2 \lambda_j) \hat{\mu} - (g_1 + 1) + (1 + d_2 \lambda_j) \hat{\mu}] = g_0[2d_2 \lambda_j \hat{\mu} + 2\hat{\mu} - (g_1 + 1)] > 0,$$

这表明  $\ker(\hat{K} - \hat{\mu}I) \cap \ker(\hat{K}^* - \hat{\mu}I)^\perp = \{0\}$ , 即  $\ker(\hat{K} - \hat{\mu}I) \cap R(\hat{K} - \hat{\mu}I) = \{0\}$ . 所以  $\mu(d_1^{(j)} + \varepsilon)$  是  $K(d_1^{(j)} + \varepsilon)$  的代数重数为 1 的特征值. 从而根据式 (6) 可知

$$\text{index}(I - K(d_1^{(j)} - \varepsilon) - H, (d_1^{(j)} - \varepsilon, (0, 0))) \neq$$

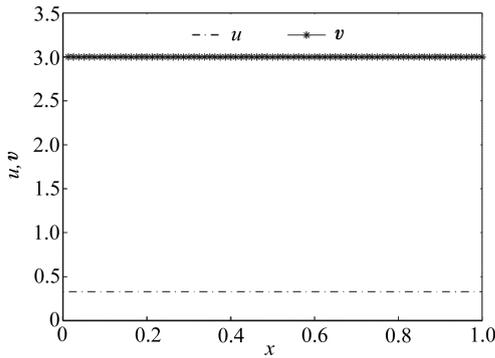
$$\text{index}(I - K(d_1^{(j)} + \varepsilon) - H, (d_1^{(j)} + \varepsilon, (0, 0))).$$

因此, 根据文献 [15] 可知, 对于模型 (2) 由  $(d_1^{(j)}, \mathbf{U}^*)$  产生的局部分歧可以延拓成整体分歧  $\Gamma_j$ , 而且  $\Gamma_j$  要么在  $R \times E$  中延伸到无穷, 要么连接  $(d_1^{(k)}, \mathbf{U}^*)$ , 其中  $d_1^{(k)} > 0, k \neq j$ .

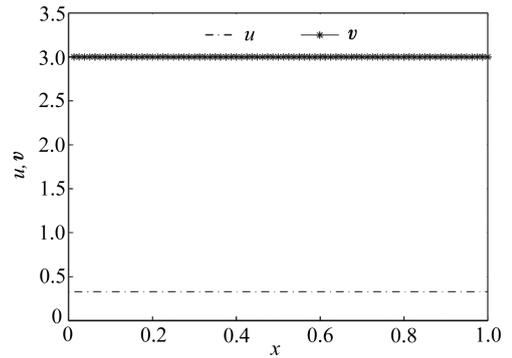
注 1 在一维情况下, 借助文献 [13] 并结合引理 1 可证实  $\Gamma_j$  随  $d_1, v$  延向无穷.

### 3 数值模拟

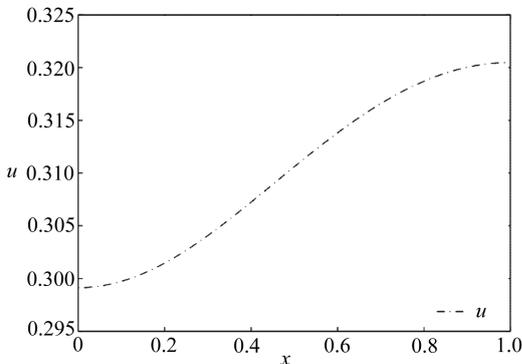
本节运用数值模拟对给出的理论结果做出了解释和证实. 在所有的数值模拟中, 固定参数  $k = 0.1, \delta = 3.0$ .



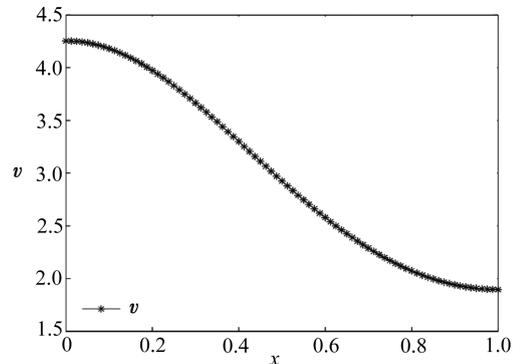
(a)  $d_2 = 0.9$



(b)  $d_2 = 0.1$



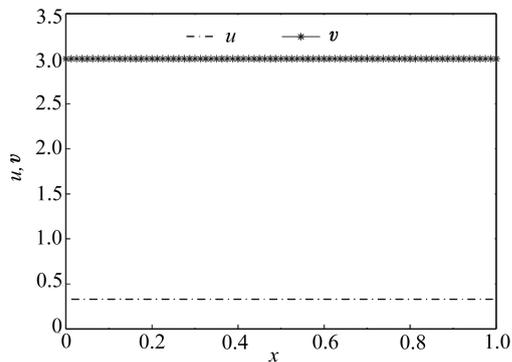
(c)  $d_2 = 0.08$



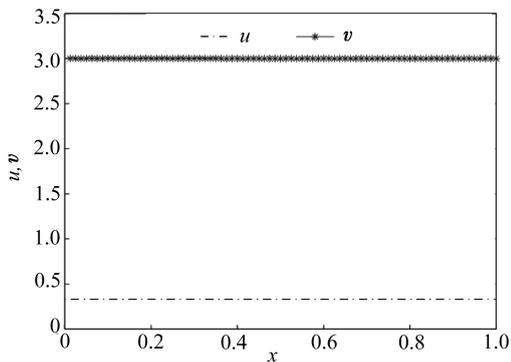
(d)  $d_2 = 0.08$

图 1 扩散系数  $d_2$  的变化对模型 (1) 空间模式的影响

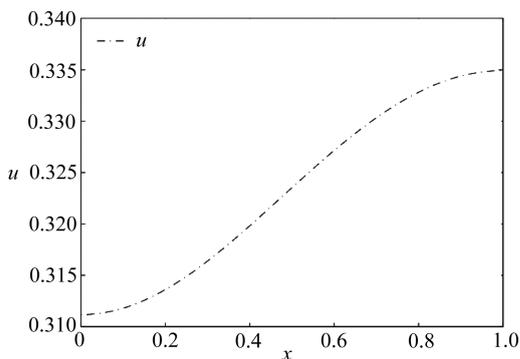
Fig.1 The influence of diffusion coefficient  $d_2$  on the spatial pattern formation of system (1)



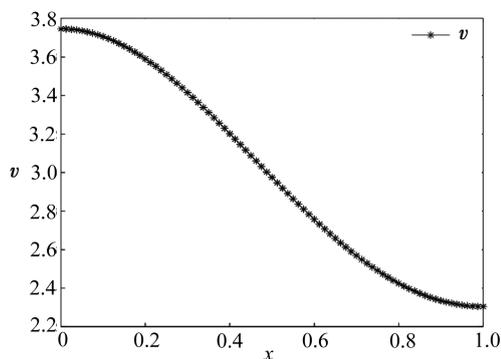
(a)  $d_1 = 7$



(b)  $d_1 = 10$



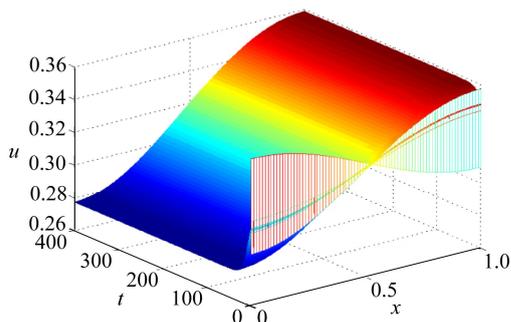
(c)  $d_1 = 11$



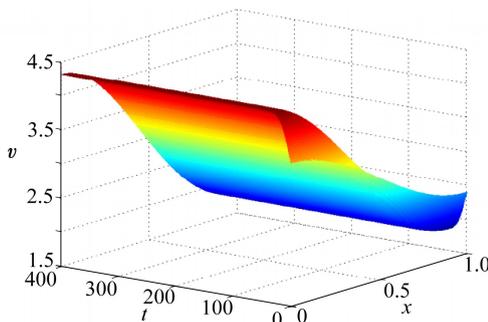
(d)  $d_1 = 11$

图2 扩散系数  $d_1$  的变化对模型(1)空间模式的影响

Fig.2 The influence of diffusion coefficient  $d_1$  on the spatial pattern formation of system (1)



(a)  $u$



(b)  $v$

图3 模型(1)的空间模式(参数  $k = 0.1, \delta = 3.0, d_2 = 0.08, d_1 = 12 > 8.7556 = d_1^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq r} d_1^{(i)}$ )

Fig.3 Spatial pattern formation of system (1) for  $k = 0.1, \delta = 3.0, d_2 = 0.08$

$$\text{and } d_1 = 12 > 8.7556 = d_1^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq r} d_1^{(i)}$$

图1说明  $d_2$  比较大时模型(1)没有非常数正稳态解,而图2说明  $d_1$  比较小时模型(1)没有非常数正稳态解.也就是说,模型(1)要有非常数正稳态解,  $d_2$  需要取值小些,而  $d_1$  需要取值大些.这证实了引理2,也得到了模型(1)的模式生成的必要条件.基于此,取  $d_2 = 0.08$ ,由引理3可得  $d_1^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq r} d_1^{(i)} = 8.7556$ .根据引理3可知当  $d_1 > \min_{1 \leq i \leq r} d_1^{(i)}$  时,常数稳态解  $(u^*, v^*)$

是 Turing 不稳定的, 结合上一节知当  $d_1 > \min_{1 \leq i \leq r} d_1^{(i)}$  模型(1) 会产生空间模式, 因此, 再取  $d_1 = 12 > \min_{1 \leq i \leq r} d_1^{(i)}$ , 图 3 证实了模型(1) 的非常数稳态解的空间模式的生成, 验证了引理 3 和定理 1.

## 4 结 论

本文主要运用分歧理论和 Leray-Schauder 度理论分析了  $n$  维糖酵解模型空间模式的生成. 由引理 2 和引理 3 可知, 当分歧参数  $d_1$  比较大时, 模型(1) 才会形成非常数稳态解. 基于此, 本文进一步以  $d_1$  为分歧参数讨论模型(1) 的模式生成. 分析结果表明: 当  $d_1$  满足  $(d_1^{(j)}, U^*)$  为单重分歧点时, 模型(1) 具有非常数稳态解, 而且其结构由 Neumann 边界条件下算子  $-\Delta$  的特征函数而决定; 结合全局分歧理论, 由  $(d_1^{(j)}, U^*)$  产生的局部分歧可以延拓为全局分歧, 说明了非常数稳态解的全局存在性. 所做工作是笔者已有成果的继续, 也推广了文献[13].

**致谢** 感谢榆林学院博士科研启动基金项目(13GK04) 和榆林市产学研合作项目(2012cxy3-30) 对本文的资助.

## 参考文献(References):

- [1] Dähmow P, Vanag V K, Müller S C. Effect of solvents on the pattern formation in a Belousov-Zhabotinsky reaction embedded into a microemulsion [J]. *Physical Review E*, 2014, **89**(1): 010902.
- [2] Kondo S, Miura T. Reaction-diffusion model as a framework for understanding biological pattern formation[J]. *Science*, 2010, **329**(5999): 1616-1620.
- [3] 张丽, 刘三阳. 一类高次自催化耦合反应扩散系统的分歧和斑图[J]. *应用数学和力学*, 2007, **28**(9): 1102-1114. (ZHANG Li, LIU San-yang. Bifurcation and patterns formation in a coupled higher autocatalator reaction diffusion system [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(9): 1102-1114. (in Chinese))
- [4] Turing A M. The chemical basis of morphogenesis[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences*, 1952, **237**(641): 37-72.
- [5] Murray J D. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*[M]. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [6] 林振山, 李湘如. 准三分子模型的时空结构[J]. *数学物理学报*, 1989, **9**(2): 183-191. (LIN Zhen-shan, LI Xiang-ru. Spatial-temporal structure of trimolecular model[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 1989, **9**(2): 183-191. (in Chinese))
- [7] Tyson J, Kauffman S. Control of mitosis by a continuous biochemical oscillation[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1975, **1**(4): 289-310.
- [8] Segel L A. *Mathematical Models in Molecular and Cellular Biology*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
- [9] Forbes L K, Holmes C A. Limit-cycle behaviour in a model chemical reaction: the cubic autocatalator[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1990, **24**(2): 179-189.
- [10] Ashkenazi M, Othmer H G. Spatial patterns in coupled biochemical oscillators[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1978, **5**(4): 305-350.
- [11] McGough J S, Riley K. Pattern formation in the Gray-Scott model[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2004, **5**(1): 105-121.
- [12] 魏美华, 吴建华. 一类糖酵解模型正平衡解的存在性分析[J]. *数学学报*, 2011, **54**(4): 553-

560. (WEI Mei-hua, WU Jian-hua. Existence analysis of the positive steady-state solutions for a glycolysis model[J]. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2011, **54**(4): 553-560. (in Chinese))
- [13] Jang J, Ni W-M, Tang M. Global bifurcation and structure of Turing patterns in 1-D Lengyel-Epstein model[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2005, **16**(2): 297-320.
- [14] Crandall M G, Rabinowitz P H. Bifurcation from simple eigenvalues[J]. *Journal of Functional Analysis*, 1971, **8**(2): 321-340.
- [15] Rabinowitz P H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems[J]. *Journal of Functional Analysis*, 1971, **7**(3): 487-513.

## Pattern Formation of Nonconstant Steady-State Solutions to the $n$ -Dimensional Glycolysis Model

WEI Mei-hua<sup>1</sup>, CHANG Jin-yong<sup>2</sup>, QI Lan<sup>1</sup>, ZHANG Qiao-wei<sup>1</sup>

(1. *School of Mathematics and Statistics, Yulin University,*

*Yulin, Shaanxi 719000, P.R.China;*

2. *Institute of Information Engineering, Chinese Academy of Sciences,*

*Beijing 100093, P.R.China)*

**Abstract:** A glycolysis model under the Neumann boundary condition was investigated in the  $n$ -dimensional space. Based on the local bifurcation theory, the local structure of the nonconstant steady-state solution to the model was studied with diffusion coefficient  $d_1$  as the bifurcation parameter. Then, according to the global bifurcation theory and the Leray-Schauder degree theory, global existence of the nonconstant steady-state solution was discussed. Moreover, the theoretical results were confirmed through numerical simulations. It is shown that the spatial pattern can form for the glycolysis model.

**Key words:** glycolysis model; steady-state solution; pattern formation; global bifurcation

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11271236)