

# 应用分数阶导数模拟桩屏障对 粘弹性 SH 波的隔离\*

李源, 陈文, 庞国飞

(河海大学 力学与材料学院, 南京 210098)

(我刊编委陈文来稿)

**摘要:** 从粘弹性体波的三维分数阶本构方程出发,分析了软粘土中粘弹性 P 波和 S 波的频散效应,对比研究了非连续刚性桩和弹性桩对粘弹性 SH 波的隔离效果.利用有限差分法,分别模拟了不同桩间距与桩直径比、不同分数阶阶数及入射频率下振幅衰减系数的变化规律,并对比分析了刚性桩和弹性桩的隔震效果.数值实验表明,桩间距与桩直径比值越小,分数阶阶数越大,刚性桩隔震效果越好.对于某些特定的隔震区域,分数阶阶数越小,弹性桩隔震效果越好.

**关键词:** 时间分数阶导数; 粘弹性波散射; 屏障隔震; 有限差分

**中图分类号:** O34; TU43      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.09.001

## 引言

非连续桩屏障隔震系统实质上是通过介质中的障碍物引起波的散射以降低隔震区域中的振动.目前,对屏障隔震问题的研究多集中于单相弹性介质,相应的非连续桩对弹性波的散射理论已较为成熟<sup>[1-3]</sup>.然而,在实际问题中,土体中波的传播显然不是弹性的,在预测振幅时需要考虑衰减效应和频散效应的影响.介质的不均匀性引起的波的散射以及介质本身存在的能量耗散机制都是导致能量衰减的原因<sup>[4]</sup>.粘弹性波考虑了介质本身的能量耗散,其最初的探索开始于地质学中在频率域内对品质因子的研究.Day 等<sup>[5]</sup>利用 Padé 方法数值模拟了时间域上的粘弹性波动问题,Emmerich<sup>[6]</sup>采用多个 Maxwell 模型和 1 个弹簧元件并联构造了新的粘弹性模型,并得到了与 Day 等<sup>[5]</sup>相似的结论.类似地,Carcione 等<sup>[7]</sup>构造了多个 Zener 模型并联的粘弹性模型.此外,还有大量的研究出现在这一领域<sup>[8-13]</sup>.值得一提的是,Carcione 等<sup>[14-15]</sup>基于分数阶微积分理论,讨论了品质因子为常数时,岩石中 P 波和 S 波的衰减和频散的情况,从能量耗散规律的角度建立了相应的物理模型.关于粘弹性波的散射问题, Borchardt<sup>[12]</sup>研究了粘弹性介质中波的反射和折射问题, Grasso 等<sup>[16]</sup>采用多尺度边界元法数值模拟了三维各向同性粘

\* 收稿日期: 2014-04-10; 修订日期: 2014-07-08

**基金项目:** 国家重点基础研究发展计划(973 计划)(2010CB832702); 国家杰出青年科学基金(11125208); 111 引智计划(B12032)

**作者简介:** 李源(1990—),女,河南新乡人,硕士生(E-mail: gclxliyuan@126.com);  
陈文(1967—),男,江苏镇江人,教授,博士生导师(通讯作者).  
E-mail: chenwen@hhu.edu.cn).

弹性波在土壤中的传播问题,需要指出的是,他们的工作都是以粘弹性波的整数阶模型为基础的。

在剪切蠕变试验中,软粘土的变形具有明显的时间效应.当土体上施加的剪应力低于屈服极限时,可将土体视为粘弹性介质,从而利用基本元件建立粘弹性土体变形的唯象本构模型<sup>[17]</sup>.与经典本构模型相比,分数阶导数本构模型具有参数少,拟合效果好等优点.文献[18]将分数阶导数算子应用到软土的一维本构方程中,并与整数阶导数模型进行了对比,发现分数阶导数模型可以更好地描述软粘土的流变特征.基于体积变形只与应力球张量有关和剪切变形只与应力偏量有关的假设, Makris<sup>[19]</sup>推导了可压缩粘弹性固体的三维分数阶本构模型, Schmidt 等<sup>[20]</sup>用应力应变分量的矩阵形式推导了粘弹性材料的三维分数阶本构方程.此外, Carcione 等<sup>[14-15]</sup>、Caputo 等<sup>[21]</sup>和 Zhu 等<sup>[22]</sup>从能量损失的角度构造了分数阶粘弹性本构方程,模拟了品质因子为常数时岩石中粘弹性波的传播问题。

考虑到分数阶模型数值模拟的复杂性,本文假设土体剪切变形满足分数阶 Kelvin 模型,基于 Makris<sup>[19]</sup>的工作,首先推导了粘弹性 SH 波的分数阶波动方程,在频率域上分析了粘弹性 P 波和 S 波的频散效应,进而对比分析了软土中非连续刚性桩和弹性桩屏障对分数阶粘弹性 SH 波的隔离效果.利用有限差分法数值模拟了非连续桩屏障对粘弹性 SH 波的散射问题,比较了刚性桩和弹性桩屏障下振幅衰减系数与分数阶方程的阶数、桩间距与直径之比及入射波频率之间的关系。

## 1 粘弹性波的分数阶建模

### 1.1 波动方程

考虑一无限大、单层、均匀的粘弹性土体,其运动方程为

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

其中  $f_i$  是体积力,  $\rho$  是土体的密度,  $\sigma_{ij}$  是应力张量,  $u$  为位移。

假设土体的体积应变是弹性的,即  $\sigma_{kk} = K \varepsilon_{kk}$ , 其中  $K$  是土体的体积模量,  $\sigma_{kk}$ ,  $\varepsilon_{kk}$  分别是球应力张量和球应变张量.用分数阶 Kelvin 模型来模拟土体的剪切变形<sup>[17]</sup>:

$$S_{ij} = (E_0 + E_1 {}_0^C D_t^\alpha) e_{ij}, \quad (2)$$

其中  $S_{ij}$ ,  $e_{ij}$  分别是土体的偏应力张量和偏应变张量,  $E_0$  是初始弹性模量,  $E_1$  是分数阶模型参数,  $\alpha$  是分数阶的阶数,  ${}_0^C D_t^\alpha$  是分数阶 Caputo 算子.当  $\alpha \in (0, 1]$  时,  ${}_0^C D_t^\alpha$  有如下表达式:

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{df(t)}{dt}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\Gamma$  是 gamma 函数.则土体的三维本构方程可写为<sup>[19]</sup>

$$\sigma_{ij} = (E_0 + E_1 {}_0^C D_t^\alpha) \varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}(K - E_0 - E_1 {}_0^C D_t^\alpha) \varepsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad (4)$$

忽略体积力,将方程(4)代入运动方程(1)得三维分数阶粘弹性波动方程的张量形式:

$$\frac{1}{2}(E_0 + E_1 {}_0^C D_t^\alpha) \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{6}(E_0 + 2K + E_1 {}_0^C D_t^\alpha) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (5)$$

忽略体积变形,即  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , 此时只有剪切变形和转动变形,则

$$\frac{1}{2}(E_0 + E_1 {}_0^C D_t^\alpha) \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}}. \quad (6)$$

式(6)为剪切波的波动方程.记 SH 波偏振方向为  $z$ , 则粘弹性 SH 波的分数阶波动方程:

$$(E_0 + E_1 {}^c D_t^\alpha) \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = 2\rho \ddot{u}_z. \quad (7)$$

在常规固结三轴土体蠕变试验中,仅能得到一维应力应变数据.一维应力应变记为  $\sigma_{11}$  和  $\varepsilon_{11}$ , 应力  $\sigma_{11}$  是常数,且  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ .则由三维分数阶本构方程(4)可知土体一维应力应变关系式:

$$\sigma_{11}(t) + \frac{E_1}{E_0 + 2K} {}^c D_t^\alpha \sigma_{11}(t) = \frac{3KE_0}{E_0 + 2K} \varepsilon_{11}(t) + \frac{3KE_1}{E_0 + 2K} {}^c D_t^\alpha \varepsilon_{11}(t). \quad (8)$$

该一维分数阶 Zener 模型的蠕变柔量为<sup>[17]</sup>

$$J(t) = \frac{1}{3K} + \frac{2}{3E_0} (1 - E_\alpha [-(t/\tau_\varepsilon)^\alpha]), \quad (9)$$

其中,  $\tau_\varepsilon$  是一维分数阶 Zener 模型的延迟时间.

## 1.2 边界条件和差分格式

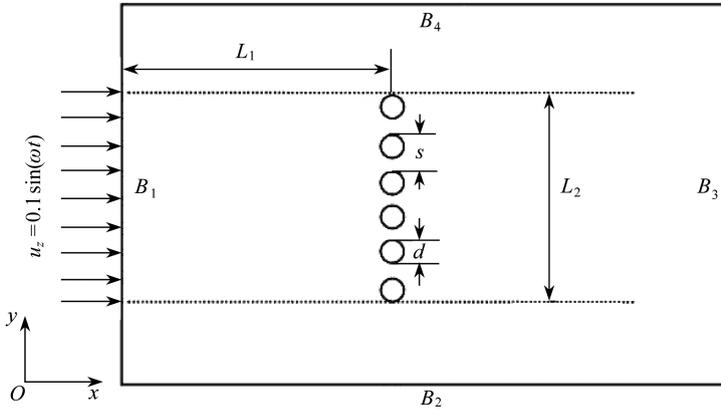


图 1 粘弹性土体中非连续桩屏障隔震体系

Fig.1 The isolation system of pile barriers in the viscoelastic soil

如图 1 所示,计算区域的边界  $B_1$  上施加简谐激励  $u_z = 0.1 \sin(\omega t)$ , 其中  $\omega$  是角频率.因为波动方程(7)尚无解析解,无法推导出类似弹性波场的吸收边界,故设边界  $B_i (i = 2, 3, 4)$  上满足 Dirichlet 边界条件,即

$$u_z|_{B_2} = u_z|_{B_3} = u_z|_{B_4} = 0. \quad (10)$$

假设非连续桩是实心刚性桩,固定在足够深的土体中,其在波动作用下不发生偏移,则散射边界条件为

$$u_z|_{r=a} = 0, \quad (11)$$

其中  $r = a$  是桩半径.若非连续桩是实心弹性柱,则 SH 波会与桩的界面处发生散射,一部分反射回来,另一部分在弹性桩内继续传播.折射波的波动方程表示为

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{z0}}{\partial y^2} \right) = \rho_0 \ddot{u}_{z0}, \quad (12)$$

其中,  $\rho_0$  是弹性桩的密度,  $u_{z0}$  是弹性桩内部质点的位移,  $\mu$  是弹性桩的 Lamé (拉梅) 常数.在柱坐标系下,弹性桩与粘弹性波交界处边界条件为垂直于交界面的应力连续条件和位移连续条件:

$$\begin{cases} \sigma_{rz} |_{r=a} = \sigma_{rz0} |_{r=a}, \\ u_z |_{r=a} = u_{z0} |_{r=a}, \end{cases} \quad (13)$$

此处  $\sigma_{rz0}$  是弹性桩的应力, 应力边界条件用位移表达:

$$\frac{1}{2}(E_0 + E_1 {}_0^C D_t^\alpha) \frac{\partial u_z}{\partial r} \Big|_{r=a} = \mu \frac{\partial u_{z0}}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (14)$$

在  $x$  方向和  $y$  方向上取均匀的网格, 于是有网格点  $(x_i, y_j, t_n)$  满足  $x_i = (i-1)h, y_j = (j-1)h, t_n = (n-1)\Delta t$ , 其中,  $i = 1, 2, \dots, m_1, j = 1, 2, \dots, m_2, n = 1, 2, \dots, N$ . 另记  $u_{i,j}^n \approx u(x_i, y_j, t_n)$ . 分数阶导数算子的差分格式选用在  $0 < \alpha \leq 1$  内有效的“L1 格式”<sup>[23]</sup>:

$$\begin{aligned} & {}_0^C D_t^\alpha f(x_i, y_j, t_{n+1}) \approx \\ & \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{l=1}^n [f(x_i, y_j, t_{l+1}) - f(x_i, y_j, t_l)] ((k-l+1)^{1-\alpha} - (k-l)^{1-\alpha}). \end{aligned} \quad (15)$$

粘弹性 SH 波的波动方程(7)的有限差分格式如下:

$$\begin{aligned} & \frac{E_0}{2} (\Delta u_z^{n+1} + \Delta u_z^{n-1}) + \\ & \frac{1}{2} \frac{E_1}{\Gamma(2-\alpha) \Delta t^\alpha} \sum_{k=1}^n (\Delta u_z^{k+1} - \Delta u_z^k) ((n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}) + \\ & \frac{1}{2} \frac{E_1}{\Gamma(2-\alpha) \Delta t^\alpha} \sum_{k=1}^{n-2} (\Delta u_z^{k+1} - \Delta u_z^k) ((n-k-1)^{1-\alpha} - (n-k-2)^{1-\alpha}) = \\ & \frac{2\rho}{\Delta t^2} ((u_z)_{i,j}^{n+1} - 2(u_z)_{i,j}^n + (u_z)_{i,j}^{n-1}), \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\Delta u_z^{n+1} = \frac{(u_z)_{i+1,j}^{n+1} - 2(u_z)_{i,j}^{n+1} + (u_z)_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} + \frac{(u_z)_{i,j+1}^{n+1} - 2(u_z)_{i,j}^{n+1} + (u_z)_{i-1,j-1}^{n+1}}{h^2}.$$

折射波方程(12)的差分格式如下:

$$\frac{\mu}{2} (\Delta u_{z0}^{n+1} + \Delta u_{z0}^{n-1}) = \frac{\rho_0}{\Delta t^2} ((u_{z0})_{i,j}^{n+1} - 2(u_{z0})_{i,j}^n + (u_{z0})_{i,j}^{n-1}), \quad (17)$$

其中,  $\Delta u_{z0}^{n+1}$  的表达式与  $\Delta u_z^{n+1}$  相类似, 此外, 不规则边界条件(14)采用阶梯形折线近似的方法处理.

### 1.3 频散关系

用张量卷积的形式描述粘弹性介质的本构关系式(4), 可知<sup>[16]</sup>

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-\tau) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau. \quad (18)$$

式中的四阶张量是松弛函数, 满足

$$C_{ijkl}(t) = [\lambda(t) \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] H(t), \quad (19)$$

其中  $H(t)$  是单位阶跃函数. 利用 Carcione<sup>[15]</sup> 的分解方法, 由式(19)得到分别对应 P 波和 S 波的松弛函数:

$$\begin{cases} C_{ijkl}^P(t) = (\lambda(t) + 2\mu(t)) \delta_{ij} \delta_{kl} H(t), \\ C_{ijkl}^S(t) = \mu(t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2\delta_{ij} \delta_{kl}) H(t). \end{cases} \quad (20)$$

将式(18)转换到频率域上, 得到频率域上的本构方程:

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\omega) = \tilde{C}_{ijkl}(\omega) \tilde{\varepsilon}_{kl}(\omega) = \lambda(\omega) \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}_{kk}(\omega) + 2\mu(\omega) \tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega). \quad (21)$$

由时间域上的三维本构方程(4)知上式中的参数形式:

$$\begin{cases} \lambda(\omega) = -\frac{1}{3}[E_0 - K + E_1(i\omega)^\alpha], \\ \mu(\omega) = \frac{1}{2}[E_0 + E_1(i\omega)^\alpha]. \end{cases} \quad (22)$$

需注意此处  $i$  是虚数,  $\omega$  是角频率.若记  $G_p(\omega)$  和  $G_s(\omega)$  分别是 P 波和 S 波对应的松弛模量,则由式(20)和(22)可得到  $G_p(\omega)$  和  $G_s(\omega)$  的表达式:

$$\begin{cases} G_p(\omega) = \frac{1}{3}[2E_0 + K + 2E_1(i\omega)^\alpha] \delta_{ij} \delta_{kl}, \\ G_s(\omega) = \frac{1}{2}[E_0 + E_1(i\omega)^\alpha] (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - 2\delta_{ij} \delta_{kl}). \end{cases} \quad (23)$$

则在频率域上的本构方程还可写为

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij}(\omega) = & \frac{1}{3}[2E_0 - K + 2E_1(i\omega)^\alpha] \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}_{kk}(\omega) + \\ & [E_0 + E_1(i\omega)^\alpha] (\tilde{\varepsilon}_{ij}(\omega) - \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}_{kk}(\omega)), \end{aligned} \quad (24)$$

其中,等式右端第 1 项对应 P 波,第 2 项对应 S 波.

相速度反映了波的运动学特征,用  $c_p$  表示.波速的复数形式用松弛模量表示<sup>[14]</sup>

$$V = \sqrt{\frac{G(\omega)}{\rho}}, \quad (25)$$

其中  $\rho$  是密度.则相速度为<sup>[14]</sup>

$$c_p = \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{1}{V} \right) \right]^{-1} = \left[ \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\rho}{G(\omega)}} \right]^{-1}. \quad (26)$$

记粘弹性 P 波和 S 波的相速度分别为  $V_p, V_s$ .考虑到复模量  $G(\omega)$  可表示为

$$G(\omega) = A e^{i\varphi}, \quad (27)$$

其中  $i$  为虚数,  $A$  是模,  $\varphi$  是辐角.代入式(26)中得

$$c_p = \left[ \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\rho}{A e^{i\varphi}}} \right]^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Re}(\sqrt{\rho/A} e^{-i\varphi/2})} = \sqrt{\frac{A}{\rho}} \sec\left(-\frac{\varphi}{2}\right). \quad (28)$$

根据复变函数和三角函数知识,可得到粘弹性 P 波和 S 波的相速度:

$$V_p = \left[ \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{\rho}{G_p(\omega)}} \right) \right]^{-1} = \frac{A_p}{\sqrt{\rho \left( 3A_p + 2E_0 + K + 2E_1 \cos \frac{\alpha\pi}{2} \omega^\alpha \right) / 6}}, \quad (29)$$

$$V_s = \left[ \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{\rho}{G_s(\omega)}} \right) \right]^{-1} = \frac{2A_s}{\sqrt{\rho \left( 2A_s + E_0 + E_1 \cos \frac{\alpha\pi}{2} \omega^\alpha \right)}}, \quad (30)$$

其中,  $A_p, A_s$  分别是  $G_p(\omega)$  和  $G_s(\omega)$  的模.由上式可以看出,粘弹性 P 波和 S 波的相速度是频率依赖的函数,其随时间的变化趋势可见图 2.如图所示, P 波的传播速度比 S 波快.而且随频率增大, P 波的传播速度增幅较大, S 波则相对较小.当入射频率为 200 Hz 时, P 波相速度接近 300 m/s, 而 S 波在 250 m/s 左右.

结合式(8)和(9),基于文献[24]中“2k1-3”试样在三轴蠕变试验下的数据,用 MATLAB 非线性拟合得到参数

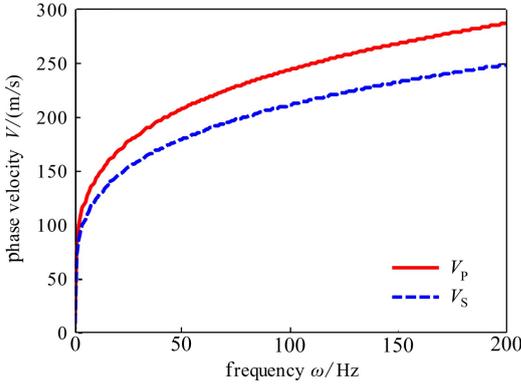


图2 粘弹性P波和S波的频散曲线  
Fig.2 Dispersion curves of the viscoelastic P wave and S wave

$$K = 8.034 4 \times 10^6 \text{ Pa},$$

$$E_0 = 1.491 6 \times 10^6 \text{ Pa},$$

$$E_1 = 1.523 3 \times 10^8 \text{ Pa},$$

$$\alpha = 0.47, \rho = 17.2 \times 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

若将土体看作弹性材料,则取一维岩土试验中初始时刻试样的瞬时变形量,由式(9)和拟合的粘弹性参数可取弹性模量  $E = 2.41 \times 10^7 \text{ Pa}$ .此处若假设 Poisson(泊松)比  $\nu = 0.25$ ,则弹性 Lamé 常数

$$\lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)] =$$

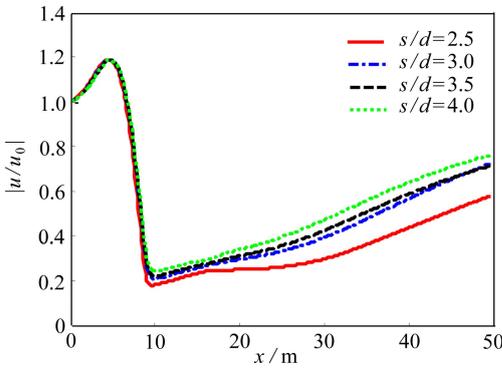
$$9.64 \times 10^6 \text{ Pa},$$

$$\mu = E / [2(1 + \nu)] = 9.64 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

此时,弹性P波的相速度  $c_p = 41.004 8 \text{ m/s}$ ,弹性S波的相速度  $c_s = 33.480 3 \text{ m/s}$ .弹性波的相速度与低频时的粘弹性波相速度接近,高频时粘弹性波的传播速度更快.

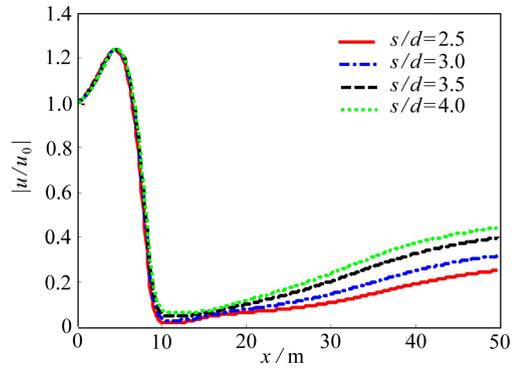
## 2 数值算例与讨论

参照工程中标准桩的设置,边界  $B_1$  到实心刚性桩的距离  $L_1 = 9 \text{ m}$ ,桩屏障长度是  $L_2 = 12 \text{ m}$ ,桩的个数  $N = 6$ ,桩直径  $d$  和桩间距  $s$  满足关系式  $d + (N - 1)s = L_2$ .考虑到计算机的性能,取边界  $B_2$  的长度  $50 \text{ m}$ ,边界  $B_1$  长度为  $30 \text{ m}$ .弹性桩的有关参数取  $\mu = 8.333 3 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,  $\rho_0 = 25 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ .在对二维波动方程(7)进行网格划分时,空间网格应明显小于桩截面的边长,使得在散射边界处有足够多的点分布.时间步长和空间步长的选取会对结果的精度、收敛性产生影响,基于文献[23]关于分数阶方程差分格式的论证,可知方程(16)的空间精度为  $O(h^2)$ ,分数阶时间导数的差分精度为  $O(\Delta t^{2-\alpha})$ .根据理论分析和数值模拟试验,取时间步长和空间步长分别为  $h = 0.125 \text{ m}$  和  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ ,模拟结果收敛稳定且具有  $2 - \alpha$  阶精度.



(a) 弹性桩屏障

(a) The elastic pile barrier



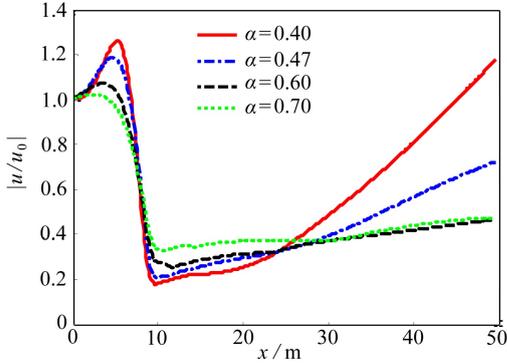
(b) 刚性桩屏障

(b) The rigid pile barrier

图3  $\alpha = 0.47, \omega = 65 \text{ Hz}$  时不同桩间距下的弹性桩屏障隔震系数在垂直于屏障的中心线处的变化曲线

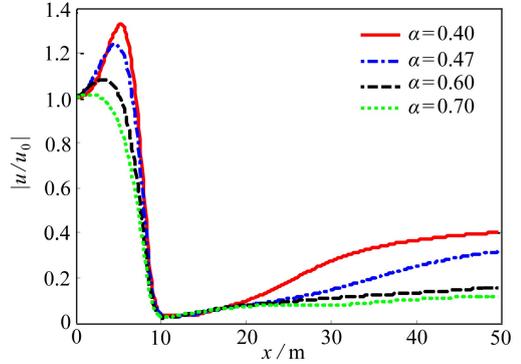
Fig.3 Curves of amplitude reduction factors at different pile space-to-diameter ratios for  $\alpha = 0.47$  and  $\omega = 65 \text{ Hz}$  at the centre line perpendicular to the barriers

Woods<sup>[25]</sup> 在研究空沟屏障对于波的隔离效果时引入振幅衰减系数,它是研究屏障隔震效果的一个有效参数.振幅衰减系数由设屏障后和设屏障前的振幅的比值来定义,是一个无量纲参数.粘弹性 SH 波的波方程(7)解析解十分复杂,波的周期性无法数学证明.分数阶算子具有记忆性,波动方程的数值模拟计算成本很高.考虑到以上因素,本文记振幅衰减系数  $|u/u_0|$  为短时间  $T$  内计算区域中各点在设屏障后和设屏障前位移绝对值的最大值之比, $T$  取 0.1 s.



(a) 弹性桩屏障

(a) The elastic pile barrier

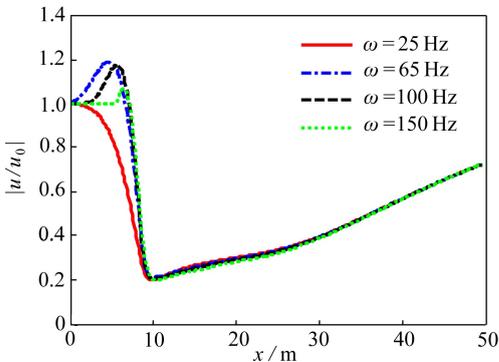


(b) 刚性桩屏障

(b) The rigid pile barrier

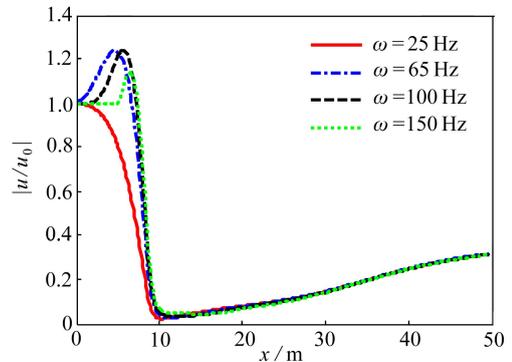
图4  $s/d = 3$ ,  $\omega = 65$  Hz 时不同分数阶数下的桩屏障隔震系数在  $y = 15$  中间位置的变化曲线

Fig.4 Curves of amplitude reduction factors at different fractional orders for  $s/d = 3$  and  $\omega = 65$  Hz at the centre line perpendicular to the barriers



(a) 弹性桩屏障

(a) The elastic pile barrier



(b) 刚性桩屏障

(b) The rigid pile barrier

图5  $s/d = 3$ ,  $\alpha = 0.47$  时不同入射频率下的振幅衰减系数在垂直于屏障的中心线处的变化曲线

Fig.5 Curves of amplitude reduction factors at different incident wave frequencies for  $s/d = 3$  and  $\alpha = 0.47$  at the centre line perpendicular to the barriers

图3给出了  $\alpha = 0.47$ ,  $\omega = 65$  Hz 时对应不同桩间距和桩直径比值  $s/d$ , 刚性桩和弹性桩屏障中心  $y = 15$  m 附近的振幅衰减系数变化曲线.如图所示, 桩屏障前有明显的振幅放大效果, 这一点与弹性波的散射特征相似<sup>[3]</sup>. 由于弹性桩内产生折射波, 弹性桩屏障的振幅放大结果比刚性桩弱, 屏障前  $x = 0 \sim 9$  m 处弹性桩最大振幅衰减系数小于 1.2, 而刚性桩略大于 1.2. 如图 3(b) 所示,  $|u/u_0|$  在屏障处的振幅衰减系数小于 0.1, 刚性桩对入射 SH 波有明显的隔离效果. 同时, 在屏障  $x = 9$  m 处,  $s/d = 2.5$  和  $s/d = 4$  两种情形的  $|u/u_0|$  值相差不超过 0.05, 而在  $x = 50$  m 处差距已超过 0.2, 说明  $s/d$  越大, 在远处的隔震效果越差. 比较图 3(a) 和 3(b), 弹

性桩对应的振幅衰减系数的变化趋势与刚性桩类似.但在屏障  $x = 9 \text{ m}$  处,  $|u/u_0|$  值在 0.2 附近,远大于刚性桩对应值.而且,在屏障后  $x = 9 \sim 50 \text{ m}$  处,  $|u/u_0|$  增长幅度在 0.4 左右,说明相同桩间距布置时弹性桩的隔震效果比刚性桩差.

图 4 展现了  $\omega = 65 \text{ Hz}$ ,  $s/d = 3$  时,分数阶阶数与刚性桩、弹性桩屏障振幅衰减系数之间的关系.如图所示,在屏障前  $x = 0 \sim 9 \text{ m}$  处,振幅衰减系数  $|u/u_0|$  的峰值在  $\alpha = 0.7$  时最小, $\alpha$  越小峰值越大,并且在  $\alpha = 0.4$  时达到最大值,这一点对于刚性桩屏障和弹性桩屏障相同.在屏障  $x = 9 \text{ m}$  处, $\alpha = 0.7$  时  $|u/u_0|$  的值最大(如图 4(a) 所示),依次类推, $\alpha = 0.4$  时  $|u/u_0|$  的值最小,两项差值 0.1.屏障后  $x = 9 \sim 50 \text{ m}$  区域,图 4(a) 中  $\alpha = 0.4$  时  $|u/u_0|$  值增幅最大,在  $x = 50 \text{ m}$  处结果变坏,可能受边界条件影响较大.如果  $x$  足够大, $\alpha = 0.7$  时的  $|u/u_0|$  值会呈现最小,与图 4(b) 刚性桩屏障有相似的规律,即  $\alpha$  越大,远处的隔震效果越好.但是对于在屏障后一定范围内的计算区域,如  $x = 9 \sim 25 \text{ m}$  范围, $\alpha$  较小的粘弹性介质隔震效果优于  $\alpha$  较大的粘弹性介质.由上可知,分数阶阶数  $\alpha$  对于刚性桩和弹性桩屏障的隔震效果影响不同,对于刚性桩屏障, $\alpha$  较大的粘弹性介质隔震效果较好;对于弹性桩屏障,应视隔震区域而定.

如图 5 所示,入射波频率取  $25 \text{ Hz}$  时,屏障前无振幅放大效应,当频率增大到一定程度时,振幅放大效应逐渐增强. $\omega = 65 \text{ Hz}$  时与  $\omega = 25 \text{ Hz}$  相比有明显的振幅放大效应,而  $\omega = 100 \text{ Hz}$  时屏障前  $x = 0 \sim 9 \text{ m}$  处振幅衰减系数  $|u/u_0|$  的峰值为 1.2 左右,与  $\omega = 65 \text{ Hz}$  相比仅有稍微的增大.当  $\omega = 150 \text{ Hz}$  时,振幅放大效应明显减弱,  $|u/u_0|$  的峰值在 1.1 附近.如图所示,随入射波频率增大,振幅衰减系数变化曲线的峰值逐渐向屏障靠近.屏障后的隔震区域内,桩屏障对不同频率的入射波的隔离效果基本相同.弹性桩和刚性桩屏障只在有关  $|u/u_0|$  的峰值处有所差别,  $|u/u_0|$  的变化曲线规律相同.由此可见,刚性桩屏障对于  $\omega = 25 \text{ Hz}$  附近的低频波和  $\omega = 150 \text{ Hz}$  左右的高频波可以忽略振幅放大效应的负面影响,而对于  $\omega = 65 \sim 100 \text{ Hz}$  左右的入射波则需要考虑振幅放大效应.此外,入射波的频率不是影响隔震效果的重要因素,它只对屏障前的振幅放大效应有影响力.

### 3 结 论

本文从粘弹性体波的三维分数阶本构方程出发,分析了粘弹性 P 波和 S 波的频散效应,粘弹性 P 波的传播速度比 S 波快,高频粘弹性波相速度大于弹性波.通过数值模拟,对比研究了刚性桩屏障和弹性桩屏障下不同桩间距与桩直径的比值、分数阶阶数及入射波频率对隔震效果的影响.数值算例表明,分数阶粘弹性波的基本散射特征(如入射波与屏障间明显的振幅放大现象、屏障处隔震效果最明显)与弹性波相似.此外,桩间距和桩直径比值  $s/d$  越小隔震效果越好.分数阶阶数  $\alpha$  对于刚性桩和弹性桩屏障的隔震效果影响不同.对于刚性桩屏障, $\alpha$  越大,粘弹性介质隔震效果较好.对于弹性桩屏障,在屏障后一定范围内的计算区域,如本文算例中  $x = 9 \sim 25 \text{ m}$  的范围, $\alpha$  越小,粘弹性介质隔震效果越好.此外,入射波的频率不是影响隔震效果的重要因素,它只对屏障前的振幅放大效应有影响力.一般来说,刚性桩对粘弹性 SH 波的隔离效果优于弹性桩.

需指出,由于分数阶导数算子的时间依赖性,其数值计算成本往往较高,因此本文只数值模拟了短时间内的波动传播.此外,由于较难得到分数阶 SH 波的解析解,数值模拟所需的吸收边界也难以得到.本文采用的 Dirichlet 边界条件(10)在一定程度上限制了数值解的精度.这些问题将在以后的研究中进一步讨论.

## 参考文献(References):

- [1] Twersky V. Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1952, **24**(1): 42-46.
- [2] 高广运, 李志毅, 邱畅. 弹性半空间不规则异质体引起的瑞利波散射[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(4): 378-382.(GAO Guang-yun, LI Zhi-yi, QIU Chang. Scattering of Rayleigh wave from irregular obstacles in elastic half-space [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, **27**(4): 378-382.(in Chinese))
- [3] Avilés J, Sánchez-Sesma F J. Foundation isolation from vibrations using piles as barriers[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1988, **114**(11): 1854-1870.
- [4] Assimaki D, Kallivokas L F, Kang J W, Li W, Kucukcoban S. Time-domain forward and inverse modeling of lossy soils with frequency-independent  $Q$  for near-surface applications[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2012, **43**: 139-159.
- [5] Day S M, Minster J B. Numerical simulation of attenuated wavefields using a Padé approximant method[J]. *Geophysical Journal International*, 1984, **78**(1): 105-118.
- [6] Emmerich H. PSV-wave propagation in a medium with local heterogeneities: a hybrid formulation and its application[J]. *Geophysical Journal International*, 1992, **109**(1): 54-64.
- [7] Carcione J M, Kosloff D, Kosloff R. Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium[J]. *Geophysical Journal International*, 1988, **93**(2): 393-401.
- [8] Carcione J M, Cavallini F. A rheological model for anelastic anisotropic media with applications to seismic wave propagation[J]. *Geophysical Journal International*, 1994, **119**(1): 338-348.
- [9] Carcione J M. Constitutive model and wave equations for linear, viscoelastic, anisotropic media[J]. *Geophysics*, 1995, **60**(2): 537-548.
- [10] Szabo T L, Wu J. A model for longitudinal and shear wave propagation in viscoelastic media [J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2000, **107**(5): 2437-2446.
- [11] Hestholm S. Composite memory variable velocity-stress viscoelastic modelling[J]. *Geophysical Journal International*, 2002, **148**(1): 153-162.
- [12] Borchardt R D. Reflection—refraction of general P- and type-I S-waves in elastic and anelastic solids[J]. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 1982, **70**(3): 621-638.
- [13] Moczo P, Kristek J. On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation[J]. *Geophysical Research Letters*, 2005, **32**(1). doi: 10.1029/2004GL021598.
- [14] Carcione J M, Cavallini F, Mainardi F, Hanyga A. Time-domain modeling of constant- $Q$  seismic waves using fractional derivatives[J]. *Pure and Applied Geophysics*, 2002, **159**(7/8): 1719-1736.
- [15] Carcione J M. Theory and modeling of constant- $Q$  P- and S-waves using fractional time derivatives[J]. *Geophysics*, 2009, **74**(1). doi: 10.1190/1.3008548.
- [16] Grasso E, Chaillat S, Bonnet M, Semblat J-F. Application of the multi-level time-harmonic fast multipole BEM to 3-D visco-elastodynamics[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2012, **36**(5): 744-758.
- [17] Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*[M]. London: Imperial College Press, 2010.
- [18] 殷德顺, 任俊娟, 和成亮, 陈文. 一种新的岩土流变模型元件[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(9): 1899-1903.(YIN De-shun, REN Jun-juan, HE Cheng-liang, CHEN Wen. A new rheological model element for geomaterials[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engi-*

- neering*, 2007, **26**(9): 1899-1903. (in Chinese))
- [19] Makris N. Three-dimensional constitutive viscoelastic laws with fractional order time derivatives[J]. *Journal of Rheology*, 1997, **41**(5): 1007-1020.
- [20] Schmidt A, Gaul L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2002, **29**(1/4): 37-55.
- [21] Caputo M, Carcione J M. Wave simulation in dissipative media described by distributed-order fractional time derivatives[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2011, **17**(8): 1121-1130.
- [22] Zhu T, Carcione J M, Harris J M. Approximating constant- $Q$  seismic propagation in the time domain[J]. *Geophysical Prospecting*, 2013, **61**(5): 931-940.
- [23] Langlands T, Henry B. The accuracy and stability of an implicit solution method for the fractional diffusion equation[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, **205**(2): 719-736.
- [24] 汤斌. 软土固结蠕变耦合特性的试验研究与理论分析[D]. 博士学位论文. 武汉: 武汉大学, 2004. (TANG Bin. Study on tests and analysis on theory of coupled behaviors of consolidation and creep of soft clay[D]. PhD Thesis. Wuhan: Wuhan University, 2004. (in Chinese))
- [25] Woods R D. Screening of surface waves in soils[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1968, **94**(4): 951-979.

## Application of Fractional Calculus to Simulate the Isolation Effects of Discontinuous Pile Barriers on Viscoelastic SH Waves

LI Yuan, CHEN Wen, PANG Guo-fei

(College of Mechanics and Materials, Hohai University,  
Nanjing 210098, P.R.China)

(Contributed by CHEN Wen, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Based on the 3-dimensional (3D) fractional order constitutive equation of viscoelastic body waves, the frequency dispersion characteristics of viscoelastic P- and S-waves were analyzed. Also, the isolation effects of the discontinuous rigid pile barrier and the elastic pile barrier in soft clay on viscoelastic SH waves were comparatively studied. With the finite difference method (FDM), an array of vibration amplitude reduction factors for different pile spacing-to-diameter ratios, different fractional orders and different frequencies of incident waves were obtained, and the isolation effect of the elastic pile isolation system in comparison with the rigid was analyzed. The results exhibit that the smaller pile spacing-to-diameter ratio is, or the larger the fractional order is, the better isolation effect of the rigid barrier will be. In contrast, the elastic barrier has better isolation effect in some special target area when the fractional order becomes smaller.

**Key words:** time fractional derivative; viscoelastic wave scattering; barrier isolation; finite difference method (FDM)

**Foundation item:** The National Basic Research Program of China (973 Program) (2010CB832702); The National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China(11125208)