文章编号:1000-0887(2014)09-1046-09

一类非线性强阻尼扰动发展方程的解*

史娟荣[1], 石兰芳[2], 莫嘉琪[3]

(1. 安徽机电职业技术学院, 安徽 芜湖 241002;
2. 南京信息工程大学 数学与统计学院, 南京 210044;
3. 安徽师范大学 数学计算机科学学院 数学系, 安徽 芜湖 241003)

摘要: 研究了在数学、力学中广泛出现的一类三阶非线性强阻尼发展扰动偏微分方程,并求其近似解析解.首先,构造一个泛函同伦映射,将方程的解表示以人工参数的幂级数形式,代入同伦映射,得到一个非线性扰动方程解的逐次迭代关系式,并考虑对应的一个无扰动项情形下的强阻尼发展方程,利用 Fourier 变换理论,求出其精确解.其次,以得到的精确解为同伦映射迭代式的初始函数,通过非线性扰动方程解的迭代关系式,再用 Fourier 变换法求解对应的方程.最后,便依次地得到了非线性强阻尼发展扰动偏微分方程的各次近似解析解.用上述方法得到的各次近似解,具有便于求解、精度高等特点.

关 键 词: 发展方程; 扰动; 同伦映射
中图分类号: O175.29 **文献标志码**: A
doi:10.3879/j.issn.1000-0887.2014.09.010

引 言

非线性扰动发展方程在物理学、力学的许多领域中是十分重视的研究对象.近来许多学者,例如在激波、光波散射、量子力学、大气物理、神经网络等方面都作了研究[1-5].非线性扰动发展方程的各种定量和定性方法也大量涌现.当前研究非线性发展方程的有效方法不断地被提出和发展,如非经典 Lie(李)群方法,修正的 CK 方法,双曲函数展开法, G'/G 展开法,齐次平衡法,反散射法,Jacobi 椭圆函数展开法[6-12]等.作者也利用摄动理论、微分不等式、同伦映射、不动点原理等方法研究了一系列非线性问题[13-19].

本文是利用同伦映射方法[20-21]研究了一类非线性发展扰动方程.非线性扰动方程的渐近方法其要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性方程转化为可求得的近似式去逼近原非线性方程的解[22-23].本文使用的同伦映射方法就是属于这一类.本方法的优点在于思路简明,计算简单,得到的近似解具有较高的精度.本方法具有较广泛的研究前景.

今讨论如下一类强阻尼发展方程:

$$u_{tt} - u_{xx} + au_t + bu_{tx} - cu_{txx} = f(t,x,u), \tag{1}$$

* **收稿日期**: 2014-03-07; **修订日期**: 2014-06-20
基金项目: 国家自然科学基金(11202106);江苏省自然科学基金(13KJB170016)
作者简介: 史娟荣(1981—),女,安徽宣城人,副教授,硕士(通讯作者. E-mail: ahjdshjr@126.com).

其中, a,b,c 为阻尼参数, f 为扰动项.Sine-Gordon 方程就是这类重要非线性扰动发展方程,它是物理学中很受关注的模型.由于非线性方程(1)一般不能用有限个初等函数来表示其精确解.为此,本文引入一个同伦映射来得到求解的表示式.

假设

(H_1)　f 是关于其变量为充分光滑的有界函数,并可进行 Fourier 变换;

(H_2)　存在一个正常数 M,使得 $|f_u|\leqslant M$ 成立.

1　同伦映射

为了得到模型(1)的近似解,首先引入同伦映射 $H(u,p):\mathbf{R}\times I\to\mathbf{R}$[20-21]:

$$H(u,p)=L(u)-L(v)+p[L(v)-f(t,x,u)],\tag{2}$$

其中 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$, $I=[0,1]$, p 为人工参数, v 为辅助函数,将在下面决定,而线性算子 L 为

$$L(u)=u_{tt}-u_{xx}+au_t+bu_{tx}-cu_{txx}.$$

于是由式(2), $H(u,1)=0$ 与方程(1)相同.故方程(1)的解 $u(t,x)$ 就是 $H(u,p)=0$ 的解当 $p\to1$ 时的情形.

先考虑无扰动项情形下的强阻尼发展方程:

$$v_{tt}-v_{xx}+av_t+bv_{tx}-cv_{txx}=0.\tag{3}$$

现利用 Fourier 变换法来求方程(3)的解.对方程(3)的两边关于变量 x 进行 Fourier 变换,并设 $v(x,t)$ 的 Fourier 变换为 $\bar{v}(\lambda,t)$.这时有

$$\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2}+(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\lambda^2\bar{v}=0.\tag{4}$$

方程(4)的解为

$$\bar{v}(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\times\\ [(\bar{\psi}-r_2\bar{\phi})\exp(r_1t)-(\bar{\psi}-r_1\bar{\phi})\exp(r_2t)],\tag{5}$$

其中 $\bar{\phi},\bar{\psi}$ 分别为初始状态 $v|_{t=0}=\phi, v_t|_{t=0}=\psi$ 的 Fourier 变换,而特征值 $r_{1,2}$ 为

$$r_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)\pm\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}\right).\tag{6}$$

取关系式(6)的 Fourier 逆变换,便得到方程(3)的解 v:

$$v(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}[(\bar{\psi}(\lambda)-r_2\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_1t)-\\(\bar{\psi}(\lambda)-r_1\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_2t)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda.\tag{7}$$

再设方程(1)的解为

$$u=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(t,x)p^j.\tag{8}$$

考虑到式(2),将式(8)代入 $H(u,p)=0$,展开非线性项,合并方程 $H(u,p)=0$ 关于 p 的同次幂的系数.由 $H(u,p)=0$ 关于 p 的零次幂的系数得

$$L(u_0)=L(v).\tag{9}$$

选取无扰动情形下的强阻尼发展方程的解作为同伦映射(2)中的辅助函数 v.因此由式(7)、(9),便可得到 u_0.即

$$u_0(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}[(\bar{\psi}(\lambda)-r_2\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_1t)-(\bar{\psi}(\lambda)-r_1\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_2t)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda. \tag{10}$$

再由式(2),取 $H(u,p)=0$ 关于 p 的一次幂的系数为 0,得

$$L(u_1)=f(t,x,u_0). \tag{11}$$

用 Fourier 变换方法,对方程(11)关于 x 进行 Fourier 变换,有

$$\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial t^2}+(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial t}+\lambda^2\bar{u}_1=\bar{f}, \tag{12}$$

其中 $\bar{u}_1$, $\bar{f}$ 分别为 $u_1(t,x)$, $f(t,x,u_0)$ 关于 x 的 Fourier 变换.于是方程(12)在零初始条件下的解为

$$\bar{u}_1(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\times\int_0^t\bar{f}[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\mathrm{d}\tau, \tag{13}$$

其中, r_1, r_2 如式(6)所示.取关系式(13)关于 x 的 Fourier 逆变换.便可得到方程(12)的解 $u_1(t,x)$:

$$u_1(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{f}(\tau,\lambda,u_0(\tau,x))\times[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda. \tag{14}$$

同理,再由式(2),取 $H(u,p)=0$ 关于 $p^j(j=2,3,4,\cdots)$ 的系数为 0,得

$$L(u_j)=F_j(t,x), \tag{15}$$

其中 F_j 为

$$F_j(t,x)=\frac{1}{(j-1)!}\frac{\partial^{j-1}}{\partial p^{j-1}}f\left(t,x,\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t,x)p^k\right),\qquad j=2,3,4,\cdots.$$

对方程(15)关于 x 进行 Fourier 变换,有

$$\frac{\partial^2\bar{u}_j}{\partial t^2}+(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial t}+\lambda^2\bar{u}_j=\bar{F}_j,\qquad j=2,3,4,\cdots, \tag{16}$$

其中 $\bar{F}_j$ 为 F_j 关于 x 的 Fourier 变换.于是方程(15)在零初始条件下的解为

$$\bar{u}_j(t,\lambda)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\times\int_0^t\bar{F}_j[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\mathrm{d}\tau. \tag{17}$$

取关系式(17)关于 x 的 Fourier 逆变换.便得到方程(15)的解 $u_j(t,x)$:

$$u_j(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{F}_j(\tau,\lambda)\times[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda,\qquad j=2,3,4,\cdots. \tag{18}$$

由式(10)、(14)、(18),将得到的 $u_j(t,x)(j=0,1,2,\cdots)$ 代入式(8),并令 $p=1$, 便得到强阻尼扰动发展方程(1)在初始条件

$$u|_{t=0}=\phi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \tag{19}$$

下的解：

$$u(t,x)=\sum_{j=0}^{\infty}u_j(t,x).\tag{20}$$

可以证明[20]：关系式(20)是收敛的，且它就是强阻尼扰动发展方程(1)在满足初始条件(19)下的精确解.而

$$u_{m(\mathrm{app})}(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}[(\bar{\psi}(\lambda)-r_2\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_1t)-(\bar{\psi}(\lambda)-r_1\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_2t)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{f}(\tau,\lambda,u_0(\tau,x))[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda+\sum_{i=2}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{F}_j(\tau,\lambda)[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda\Big]\tag{21}$$

为相应问题的第 m 次近似解.

于是本文有如下定理：

定理 1　在假设(H_1)、(H_2)下，强阻尼扰动发展方程(1)在满足初始条件(19)下存在一个形如式(20)的解 $u(t,x)$，而式(21)是对应问题的第 m 次近似解 $u_{m(\mathrm{app})}(t,x)$.

2　Sine-Gordon 方程

讨论如下用于超导体中的 Sine-Gordon 方程：

$$u_{tt}-u_{xx}=-\sin u\tag{22}$$

和初始条件

$$u|_{t=0}=\phi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x).\tag{23}$$

利用上节所述，采用同伦映射方法.

事实上，比较方程(1)，可知 $a=b=c=0$，$f(x,t,u)=-\sin u$.于是由同伦映射方法，由式(10)，得到 Sine-Gordon 方程的 $u_0(t,x)$ 为

$$u_0(t,x)=-\frac{\mathrm{i}}{4\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}[(\bar{\psi}(\lambda)-r_2\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_1t)-(\bar{\psi}(\lambda)-r_1\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_2t)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda,\tag{24}$$

其中对应的特征值 $r_{1,2}=\pm\mathrm{i}\lambda$.

由式(14)，得到 Sine-Gordon 方程的 $u_1(t,x)$ 为

$$u_1(t,x)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{F}_1(\tau,\lambda)[\exp(t+\tau)-\exp(2\lambda t+r_2\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda,\tag{25}$$

其中 $\bar{F}_1(t,\lambda)$ 为 $-\sin u_0(t,x)$ 的 Fourier 变换.

由式(18)，得到 Sine-Gordon 方程的 $u_j(t,x)$ $(j=2,3,4,\cdots)$ 为

$$u_j(t,x)=-\frac{\mathrm{i}}{4\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{F}_j(\tau,\lambda)[\exp(t+\tau)-\exp(2\lambda t+r_2\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda,\quad j=2,3,4,\cdots,\tag{26}$$

其中 $\bar{F}_j$ 为 F_j 关于 x 的 Fourier 变换，而 F_j 为

$$F_j(t,x)=-\frac{1}{(j-1)!}\frac{\partial^{j-1}}{\partial p^{j-1}}\sin\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t,x)p^k\right),\qquad j=2,3,4,\cdots.$$

由式(24)~(26),便得到 Sine-Gordon 方程(22)在边界条件(23)下第 m 次近似 $u_{m(\mathrm{app})}(t,x)$ 为

$$\begin{aligned}u_{m(\mathrm{app})}(t,x)=&-\frac{\mathrm{i}}{4\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}[(\bar{\psi}(\lambda)-r_2\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_1t)-\\&(\bar{\psi}(\lambda)-r_1\bar{\phi}(\lambda))\exp(r_2t)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda-\\&\frac{\mathrm{i}}{4\pi\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{F}_1(\tau,\lambda)[\exp(t+\tau)-\exp(2\lambda t+r_2\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda+\\&\frac{\mathrm{i}}{4\pi\lambda}\sum_{j=2}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{F}_j(\tau,\lambda)[\exp(t+\tau)-\exp(2\lambda t+r_2\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}\tag{27}$$

于是有如下定理:

定理 2 Sine-Gordon 方程(22)在边界条件(23)下的第 m 次近似 $u_{m(\mathrm{app})}(t,x)$ 可由式(27)表示.

3 微扰方程

考虑强阻尼扰动发展方程(1)中的扰动项是微扰的.为计算简单起见,例如现设 $f(x,t,u)=\varepsilon\cos u$.其中 ε 为正的小参数.相应的强阻尼微扰方程初值问题为

$$u_{tt}-u_{xx}+au_t+bu_{tx}-cu_{txx}=\varepsilon\cos u,\qquad 0<\varepsilon\ll 1,\tag{28}$$

$$u|_{t=0}=\phi(x),\ u_t|_{t=0}=0.\tag{29}$$

由关系式(10)、(14)、(18),强阻尼微扰方程(28)、(29)的 $u_0(t,x)$,$u_1(t,x)$,$u_2(t,x)$ 分别为

$$\begin{aligned}u_0(t,x)=&\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}[(-r_2\exp(r_1t)+\\&r_1\exp(r_2t))\bar{\phi}(\lambda)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}u_1(t,x)=&\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{F}_1(\tau,\lambda)\times\\&[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}u_2(t,x)=&\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\bar{F}_2(\tau,\lambda)\times\\&[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}\tag{32}$$

其中 $\bar{F}_1(t,\lambda)$ 为 $\varepsilon\cos u_0(t,x)$ 的 Fourier 变换,$\bar{F}_2(t,\lambda)$ 为 $-\varepsilon(\sin u_0(t,x))u_1(t,x)$ 的 Fourier 变换.

由关系式(30)~(32),便得到强阻尼微扰方程初值问题(28)、(29)的第二次近似解 $u_{2\,\mathrm{app}}(t,x)$ 为

$$\begin{aligned}u_{2\,\mathrm{app}}(t,x)=&\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}[(-r_2\exp(r_1t)+\\&r_1\exp(r_2t))\bar{\phi}(\lambda)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda+\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t[\bar{F}_1(\tau,\lambda)+\bar{F}_2(\tau,\lambda)]\times$$
$$[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda. \tag{33}$$

因为强阻尼微扰方程初值问题(28)、(29)为微扰问题,因此还可用摄动方法来求得该问题的渐近解.

设

$$\tilde{u}_{\mathrm{per}}(t,x)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{u}_j(t,x)\varepsilon^j. \tag{34}$$

将式(34)代入问题(28)、(29),按 ε 展开非线性项,合并 ε 的同次幂项系数,并令其为0.对于 $\varepsilon^j(j=0,1,2)$ 的系数为0,分别有

$$\tilde{u}_{0tt}-\tilde{u}_{0xx}+a\tilde{u}_{0t}+b\tilde{u}_{0tx}-c\tilde{u}_{0txx}=0, \tag{35}$$
$$\tilde{u}_0\big|_{t=0}=\phi(x),\ \tilde{u}_{0t}\big|_{t=0}=0, \tag{36}$$
$$\tilde{u}_{1tt}-\tilde{u}_{1xx}+a\tilde{u}_{1t}+b\tilde{u}_{1tx}-c\tilde{u}_{1txx}=\cos\tilde{u}_0, \tag{37}$$
$$\tilde{u}_1\big|_{t=0}=0,\ \tilde{u}_{1t}\big|_{t=0}=0, \tag{38}$$
$$\tilde{u}_{2tt}-\tilde{u}_{2xx}+a\tilde{u}_{2t}+b\tilde{u}_{2tx}-c\tilde{u}_{2txx}=-(\sin\tilde{u}_0)\tilde{u}_1, \tag{39}$$
$$\tilde{u}_2\big|_{t=0}=0,\ \tilde{u}_{2t}\big|_{t=0}=0. \tag{40}$$

由 Fourier 变换方法,问题(35)~(36)、(37)~(38)、(39)~(40)的解分别是

$$\tilde{u}_0(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}[(-r_2\exp(r_1t)+$$
$$r_1\exp(r_2t))\bar{\phi}(\lambda)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda, \tag{41}$$
$$\tilde{u}_1(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\tilde{F}_1(\tau,\lambda)\times$$
$$[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda, \tag{42}$$
$$\tilde{u}_2(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\tilde{F}_2(\tau,\lambda)\times$$
$$[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda, \tag{43}$$

其中 $\tilde{F}_1(t,\lambda)$ 为 $\cos u_0(t,x)$ 的 Fourier 变换, $\tilde{F}_2(t,\lambda)$ 为 $-(\sin u_0(t,x))u_0(t,x)$ 的 Fourier 变换.将式(41)~(43)代入式(34),便得到强阻尼微扰方程初值问题(28)、(29)的二次摄动解 $\tilde{u}_{2\,\mathrm{per}}(t,x)$:

$$\tilde{u}_{2\,\mathrm{per}}(t,x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}[(-r_2\exp(r_1t)+$$
$$r_1\exp(r_2t))\bar{\phi}(\lambda)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\lambda+$$
$$\frac{\varepsilon}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\tilde{F}_1(\tau,\lambda)\times$$
$$[\exp(r_1t-r_2\tau)-\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda+$$
$$\frac{\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{(a+\mathrm{i}b\lambda+c\lambda^2)^2-4\lambda^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\tilde{F}_2(\tau,\lambda)[\exp(r_1t-r_2\tau)-$$
$$\exp(r_2t-r_1\tau)]\exp(\mathrm{i}\lambda x)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\lambda+O(\varepsilon^3),\qquad 0<\varepsilon\ll 1. \tag{44}$$

由式(33)、(44),不难看出,强阻尼微扰方程初值问题(28)、(29),用同伦映射方法得到的第二次近似解 $u_{2\,\mathrm{app}}(t,x)$ 和用摄动方法得到的二次渐近解 $\tilde{u}_{2\,\mathrm{per}}(t,x)$ 比较,具有如下的误差:

$$u_{2\,\mathrm{app}}(t,x)-\tilde{u}_{2\,\mathrm{per}}(t,x)=O(\varepsilon^3),\qquad 0<\varepsilon\ll 1.$$

于是有如下定理:

定理 3 强阻尼微扰方程初值问题(28)、(29)的解 $u_{\mathrm{app}}(t,x)$,用同伦映射方法得到的的二次近似解 $u_{2\,\mathrm{app}}(t,x)$,具有如下精度:

$$u_{\mathrm{app}}(t,x)=u_{2\,\mathrm{app}}(t,x)+O(\varepsilon^3),\qquad 0<\varepsilon\ll 1.$$

由定理 3 也可以看出,用同伦映射方法得到的近似解具有良好的精度.

4 结束语

众所周知,非线性方程一般是不能得到有限项形式的解析精确解.人们只能用数值方法得到它的模拟解,或者用近似解析解去逼近它.然而由于用数值方法得到的模拟解不能再进行解析运算,从而终止了对方程解的解析运算.这样往往会忽略对一些非线性方程的某些特性的研究.特别是一些微扰方程通常出现跳跃过渡的激波层现象的解,有时就会被忽略.用同伦映射方法是通过近似解析函数去逼近方程的精确解,所以它还可用解析的方法去继续探索方程解的其它特殊性态.

本文采用的同伦映射方法的优点还在于这种思路和方法简捷有效.同时用此方法求得方程近似解的函数序列收敛速度的快慢,很容易启发人们采用合适的初始近似.例如本文,初始近似 $v(x,t)$ 的选取是采用非扰动情形下的典型发展方程的解(10),这是十分自然的,它保证了对应于有扰动情形下的非线性发展方程较快地求得在要求的精度范围内的近似解.

参考文献(References):

[1] Parkes E J. Some periodic and solitary travelling-wave solutions of the short-pulse equation[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2008, **38**(1): 154-159.

[2] Sirendaoreji, SUN Jiong. Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations[J]. *Physics Letters A*, 2003, **309**(5/6): 387-396.

[3] McPhaden M J, Zhang D. Slowdown of the meridional overturning circulation in the upper Pacific Ocean[J]. *Nature*, 2002, **415**: 603-608.

[4] Gu D, Philander S G H. Interdecadal climate fluctuations that depend on exchanges between the tropics and extratropics[J]. *Science*, 1997, **275**(5301): 805-807.

[5] 潘留仙, 左伟明, 颜家壬. Landau-Ginzburg-Higgs 方程的微扰理论[J]. 物理学报, 2005, **54**(1): 1-5.(PAN Liu-xian, ZUO Wei-ming, YAN Jia-ren. The theory of the perturbation for Landau-Ginzburg-Higgs equation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(1): 1-5.(in Chinese))

[6] 吕大昭. 非线性发展方程的丰富的 Jacobi 椭圆函数解[J]. 物理学报, 2005, **54**(10): 4501-4505.(LÜ Da-zhao. Abundant Jacobi elliptic function solutions of nonlinear evolution equations[J]. *Acta Physica Sinica*, 2005, **54**(10): 4501-4505.(in Chinese))

[7] WU Jian-ping. Bilinear Bäcklund transformation for a variable-coefficient Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2011, **28**(6):060207. doi: 10.1088/0256-307X/28/6/060207.

[8] 吕大昭, 崔艳英, 刘长河, 张艳. mKdV-sine-Gordon 方程丰富的相互作用[J]. 物理学报, 2010, **59**(10): 6793-6798.(LÜ Da-zhao, CUI Yan-ying, LIU Chang-he, ZHANG Yan. Abundant interaction solutions of the mKdV-sine-Gordon equation [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(10):

6793-6798.(in Chinese))

[9] ZUO Jin-ming, ZHANG Yao-ming. The Hirota bilinear method for the coupled Burgers equation and the high-order Boussinesq Burgers equation[J]. *Chinese Physics B*, 2011, **20**(1): 010205. doi: 10.1088/1674-1056/20/1/010205.

[10] 庞晶, 靳玲花, 赵强. 变系数非线性发展方程的 G'/G 的展开解[J]. 物理学报, 2012, **61**(14): 140201.(PANG Jing, JIN Ling-hua, ZHAO Qiang. Nonlinear evolution equation with variable coefficient G'/G expansion solution[J]. *Acta Physica Sinica*, 2012, **61**(14): 140201.(in Chinese))

[11] XIN Xiang-peng, LIU Xi-qiang, ZHANG Lin-lin. Symmetry reduction, exact solutions and conservation laws of the modified Kadomtzev-Patvishvili-II equation[J]. *Chinese Physics Letters*, 2011, **28**(2):020201. doi: 10.1088/0256-307X/28/2/020201.

[12] 李宁, 刘希强. Broer-Kau-Kupershmidt 方程组的对称、约化和精确解[J]. 物理学报, 2013, **62**(16): 160203.(LI Ning, LIU Xi-qiang. Symmetries, reductions and exact solutions of Broer-Kau-Kupershmidt system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(16): 160203.(in Chinese))

[13] 石兰芳, 莫嘉琪. 用广义变分迭代理论求一类相对转动动力学方程的解[J]. 物理学报, 2013, **62**(4): 040203.(SHI Lan-fang, MO Jia-qi. Solution of a class of rotational relativistic rotation dynamic equation using the generalized variational iteration theory[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(4): 040203.(in Chinese))

[14] 石兰芳, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪. 一类非线性方程类孤波的近似解法[J]. 物理学报, 2013, **62**(1): 010201.(SHI Lan-fang, LIN Wan-tao, LIN Yi-hua, MO Jia-qi. Approximate method of solving solitary-like wave for a class of nonlinear equation[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(1): 010201.(in Chinese))

[15] 韩祥临, 赵振江, 程荣军, 莫嘉琪. 飞秒脉冲激光对纳米金属薄膜传导模型的解[J]. 物理学报, 2013, **62**(11): 110202.(HAN Xiang-lin, ZHAO Zhen-jiang, CHENG Rong-jun, MO Jia-qi. Solution of the transfer models of femtosecond pulse laser for nano metal film[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(11): 110202.(in Chinese))

[16] XIE Feng, LIN Wan-tao, LIN Yi-hua, MO Jia-qi. Disturbed solution of the El Niño-southern oscillation sea-air delayed oscillator[J]. *Chinese Physics B*, 2011, **20**(1): 010208. doi: 10.1088/1674-1056/20/1/010208.

[17] 莫嘉琪, 林万涛, 杜增吉. 具双参数非线性高阶椭圆型方程的奇摄动解[J]. 系统科学与数学, 2013, **33**(2): 217-221.(MO Jia-qi, LIN Wan-tao, DU Zeng-ji. A singularly perturbed solution for nonlinear higher order elliptic equations with two parameters[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2013, **33**(2): 217-221.(in Chinese))

[18] 莫嘉琪, 林万涛. 一类奇摄动燃烧 ROBIN 问题解的渐近性态[J]. 系统科学与数学, 2012, **32**(11): 1413-1418.(MO Jia-qi, LIN Wan-tao. The asymptotic behavior for a class of burning singularly perturbed Robin problem[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2012, **32**(11): 1413-1418.(in Chinese))

[19] MO Jia-qi. Solution of travelling wave for nonlinear disturbed long-wave system[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2011, **55**(3): 387-390.

[20] Liao S J. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*[M]. New York: CRC Press, 2004.

[21] 何吉欢. 工程和科学计算中的近似非线性分析方法[M]. 郑州: 河南科学技术出版社, 2002.(HE Ji-huan. *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences*[M]. Zhengzhou: Henan Science and Technology Press, 2002.(in Chinese))

[22] de Jager E M, JIANG Fu-ru. *The Theory of Singular Perturbation*[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1996.

[23] Barbu L, Morosanu G. *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems*[M]. Basel: Birkhäuserm Verlag AG, 2007.

Solutions to a Class of Nonlinear Strong-Damp Disturbed Evolution Equations

SHI Juan-rong[1], SHI Lan-fang[2], MO Jia-qi[3]

(1. *Anhui Technical College of Mechanical and Electrical Engineering*, *Wuhu*, *Anhui* 241002, *P.R.China*;
2. *College of Mathematics and Statistics*, *Nanjing University of Information Science & Technology*, *Nanjing* 210044, *P.R.China*;
3. *Department of Mathematics*, *School of Mathematics & Computer Science*, *Anhui Normal University*, *Wuhu*, *Anhui* 241003, *P.R.China*)

Abstract: Widely emerging in the fields of mathematics and mechanics, a class of 3rd-order nonlinear strong-damp disturbed partial differential evolution equations were studied. Firstly, a functional homotopic mapping was constructed to express the solution to the evolution equation in a form of power series with artificial parameters, which was substituted into the homotopic mapping to build a method of successive iteration for the solution to the nonlinear disturbed equation. Then the corresponding non-disturbed strong-damp evolution equation was analyzed with exact solution based on the theory of Fourier transform. Secondly, the found exact solution was used as the initial function of the homotopic mapping iteration, and the iteration expansion of the nonlinear disturbed equation was applied to solve the related equations with the Fourier transform method. Finally, both the exact and arbitrary-order approximate analytic solutions to the nonlinear strong-damp disturbed evolution equation were obtained. The proposed homotopic mapping method is proved to have the advantages of convenience and accuracy.

Key words: evolution equation; perturbation; homotopic mapping

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11202106)