文章编号:1000-0887(2014)09-1055-08

复变量热传导方程的动力系统*

熊 辉, 杨 光

(东莞理工学院 数学教研室, 广东 东莞 523808)

摘要: 探讨一个复变量热方程的 Cauchy 问题,其中的非线性项是倒数型的.先提出一些全局解的存在性与不存在性的判定准则,然后采用解平面的不变子集的变换,证明了当初始值渐近于常数时,解是否会在无穷远处消失或在任意时间内全局存在,均依赖于初始值的渐近极限值.

关 键 词: 复变量热方程; 全局解; 淬火点
中图分类号: O193;O175.26 **文献标志码:** A
doi:10.3879/j.issn.1000-0887.2014.09.011

引 言

本文讨论以下的复变量热方程初值问题:

$$\begin{cases} w_t = w_{xx} - \dfrac{1}{w}, \\ w(x,t) = u(x,t) + \mathrm{i}v(x,t), \\ (u(\cdot,0), v(\cdot,0)) = (u_0, v_0), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, $w = w(x,t)$ 是关于空间变量 $x \in \mathbf{R}$ 与时间变量 $t \geqslant 0$ 的复值函数, 而 u, $v \in \mathbf{R}$.热传导方程广泛出现于声学、空气动力学、弹性力学、电动力学、流体动力学、地球物理学、气象学、海洋学、光学、石油工程、等离子体物理、量子力学、数字信号处理等领域,是偏微分方程中最重要的发展方程.随着研究的深入,除基本理论与求解技巧外,不少人开始将热传导方程的实变量拓广至复变量,用来研究一些动态系统及其解的性质.另外,热传导方程在复平面与流形上的推广是处理 Atiyah-Singer(阿蒂亚-辛格)指标定理的主要工具之一,由此也导出该类方程在 Riemann(黎曼)几何中的许多深入应用.类似于式(1)的问题,是作者在对数字图像进行边缘检测与结构增强时所面临的一种主要模型,其中,利用 Cauchy-Riemann 方程构造原始图像的共轭图像时,由于图像的像素是离散的,其噪声点就会使得共轭图像出现一些意料不到的问题.为了研究这一类图像处理模型的理论上的解析解,剥离原始问题,将其转化为一个纯粹的偏微分方程,并对其进行研究.

方程(1)等价于抛物型方程组:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u/(u^2 + v^2), \\ v_t = v_{xx} + v/(u^2 + v^2), \\ (u(\cdot,0), v(\cdot,0)) = (u_0, v_0). \end{cases} \tag{2}$$

* **收稿日期:** 2013-12-25; **修订日期:** 2014-01-13
基金项目: 国家自然科学基金(11271069)
作者简介: 熊辉(1978—), 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: xhui@163.com).

若 $v=0$,即 w 是实值函数,则方程组(2)可简化为 $u_t=u_{xx}-1/u$,关于这一方程的初边值问题,最早由 Kawarada[1] 于 1974 年研究.而对于更一般的负指数非线性问题,读者可参阅文献[2-3]以及其中的引文.为研究方程组(2)解的动态性,首先考虑空间齐次解,即满足常微分方程组

$$\begin{cases} U_t=-U/(U^2+V^2), \\ V_t=V/(U^2+V^2) \end{cases} \tag{3}$$

的解 $(u,v)=(U(t),V(t))$.给定 $(U(0),V(0))\in R^2\setminus\{(0,0)\}$,简单计算可得

$$U(t)V(T)=U(0)V(0)\coloneqq C, \qquad \forall t\geqslant 0, \tag{4}$$

其中 C 为某个实数常数.若 $U(0)=0$,则轨迹保持在 V 轴之上且全局存在;此外,当 $t\to\infty$ 时,轨迹发散到 $\pm\infty$.若 $V(0)=0$,则 $V(t)\equiv 0$,且当 $t\to\infty$ 时,$U\to 0$.当 $C\neq 0$ 时,由式(3)与(4)可知:当 $t\to\infty$ 时,有 $(U(t),V(t))\to(0,\pm\infty)$.

在本文中,始终假定

$$u_0>0,\ v_0\geqslant 0,\ u_0,v_0\in L^\infty(\mathbf{R})\cup C(\mathbf{R}),\ \inf_{\mathbf{R}}u_0+\inf_{\mathbf{R}}v_0>0. \tag{5}$$

这时,问题(2)有唯一解 $(u,v)\in(C([0,T);L^\infty(\mathbf{R}))^2$,其中 $T=T(u_0,v_0)\in(0,\infty]$ 为解存在时限的极大值.若 $T=\infty$,则问题(2)的解关于时间全局存在;若

$$T<\infty \text{ 且 } \liminf_{t\to T}\{\inf_{x\in\mathbf{R}}u(x,t)+\inf_{x\in\mathbf{R}}v(x,t)\}=0,$$

则问题(2)的解将在有限的时间 T 内消失,此时 T 被形象地称为淬火时间.

此外,如果存在某序列 $\{(x_j,t_j)\}$ 使得当 $j\to\infty$ 时,有

$$x_j\to x_Q,\ t_j\uparrow T,\ u(x_j,t_j)+v(x_j,t_j)\to 0,$$

则称 $x_Q\in\mathbf{R}$ 为(有限)淬火点.

本文的目的就是为了研究问题(2)的解关于时间的全局与非全局存在性.第 1 个结论是关于全局存在性与解的渐近行为的.

定理 1 假定初始数据满足

$$0<u_0(x)<\infty,\ 0<v_0(x)<\infty,\ u_0(x)v_0(x)\geqslant c_1>0, \qquad x,\ c_1\in\mathbf{R}, \tag{6}$$

则问题(2)的解在时间上全局存在,且当 $t\to\infty$ 时 $(u,v)\to(0,\infty)$ 在实数域满足一致性.

对于 $t\geqslant 0$,设

$$\mathscr{R}(t)\coloneqq\{(u(x,t),v(x,t))\in R^2;\ x\in\mathbf{R}\}$$

为解在 (u,v) 平面上的象.易见,当条件(6)成立时,对于 $t>0$,$\mathscr{R}(t)$ 处在 (u,v) 平面的第 Ⅰ 象限.故在定理 1 的假设条件下,$\mathscr{R}(0)$ 的凸壳的闭包也在 (u,v) 平面的第 Ⅰ 象限.这意味着解的全局存在性.但若初始数据不满足条件(6),鉴于方程组(3)的动态性,将会发生何种情况是令人很感兴趣的,其一就是看看在什么条件下淬火发生.从方程组(2)不难看出,不论何时淬火发生,u,v 都将同时淬火.相反,也可能有不同时淬火的情况发生,即一方淬火而另一方有界且不为 0,关于这一点,感兴趣的读者可参阅文献[4-8].

为了找到在有限时间点淬火的解,考虑初始数据为渐近常数的情形,即将条件

$$u_0,v_0\in C^1(\mathbf{R});\ u_0>0,\ u_0\not\equiv c_2;\ v_0\geqslant 0,\ v_0\not\equiv 0; \tag{7}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}u_0(x)=c_2,\quad \lim_{|x|\to\infty}v_0(x)=c_3 \tag{8}$$

强加给初始数据,其中 $c_2>0$,$c_3\geqslant 0$ 为常数.下面的定理将表明,在强加的条件(7)与(8)下,若 $c_3>0$,则方程组(2)的解在行为上将类似于 ODE 系统(3)的解.

定理 2 令 (u,v) 是方程组(2)在条件(7)、(8)满足时的解,若 $c_3>0$,则方程组(2)的解 (u,v) 对任意 $t\geqslant 0$ 全局存在,且当 $t\to\infty$ 时 $(u,v)\to(0,\infty)$ 在实数域满足一致性.

定理 3 令 (u,v) 是方程组(2) 在条件(7)、(8)、$c_3 = 0$ 时的解,则方程组(2) 的解 (u,v) 在有限时间点 $t = T = c_2^2/2$ 时,在空间无穷远处淬火.

标量方程在空间无穷远处淬火的问题,Giga,Seki 与 Umeda[9-10] 曾研究过.在文献[9]中发现,给定适当的初始数据,Cauchy 问题 $u_t = u_{xx}/(1 + u_x^2) - (n - 1)/u$ 的解在空间无穷远处淬火,在文献[10]中,他们就淬火时间估计了解的上下剖面.

本文主要受 Guo 等[11] 的启发,其中他们使用不变集参数,考虑了 $t \geqslant 0$ 时的复值方程

$$w_t = \Delta w + w^2. \tag{9}$$

为了得到解的渐近行为,采用了类似于文献[11]所采用的方法,但使用的是 (u,v) 平面的不变子集,并将(u,v) 平面转化为(u,v^{-1}) 平面.对于问题(9),给定近似常数的初始数据,则解 u,v 会在空间无穷远处非同时爆破.但在本文中,淬火只能同时发生.

本文的第 1 节,将给出一个全局解存在的充分条件,并研究当 $t \to \infty$ 时解的渐近行为.在第 2 节,研究方程组(2)在初始数据近似为常数时的解的性状.

1 全局存在性与收敛性

本节证明定理 1.在此之前,为了构建不变集,先要引入两个关于不变集的既定性质,有了它们,就可以证明系统(2)的解的全局存在性了.

引理 1 假定下述条件成立:1) 对于任意 $t \geqslant 0$,集合 $\Omega(t) \subset R^2$ 是凸的; 2) $\{\Omega(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是在方程组(3) 之下的(正的) 不变量; 3) 在某种意义上,若$(U(0),V(0)) \in \Omega(0)$,则对任意 $t > 0$ 都有$(U(t),V(t)) \in \Omega(t)$.则$\{\Omega(t)\}_{t\geqslant 0}$ 也是在方程组(2) 之下的(正的) 不变量.也就是说,若对某个 $t_0 \geqslant 0$ 有 $\mathscr{R}(t_0) \subset \Omega(t_0)$,则对任意 $t > t_0$ 都有 $\mathscr{R}(t) \subset \Omega(t)$.

引理 2 令 $\{F_i\}_{i=1}^m \subset C^1(R^3 \to \mathbf{R})$, 且设

$$\Omega(t) = \cap_{i=1}^m \{(u,v) \in R^2;\ F_i(u,v,t) < 0\}, \qquad t \geqslant 0.$$

若在 $\{(u,v) \in \partial\Omega;\ F_i(u,v,t) = 0\}$ 上,有 $\mathrm{d}(F_i(U(t),V(t),t))/\mathrm{d}t \geqslant 0$, 则$\{\Omega(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是在方程组(2)之下的不变量.

定理 1 的证明 设

$$D_1 := \{(u,v) \in R^2;\ u > 0,\ v > 0,\ -uv + c_1 \leqslant 0\},$$

根据假定,可知 $\mathscr{R}(0) \subset D_1$.对于$(U,V) \in \partial D_1$, 计算可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-UV + c_1) = -(U_tV + UV_t) = 0.$$

因此,由引理 1 可知, D_1 是在方程组(3) 之下的不变量.由于 u_0 有界,故对任意 $x \in \mathbf{R}$,存在常数 $c_4 > 0$ 使得 $u_0(x) \leqslant c_4$.设

$$D_2 := \{(u,v) \in R^2;\ u > 0,\ v > 0,\ u \leqslant c_4\},$$

注意到 $D_1 \cap D_2$ 是凸的,则对于$(U,V) \in D_1 \cap \partial D_2$,计算可知 $\mathrm{d}(U - c_4)/\mathrm{d}t = -U/(U^2 + V^2) < 0$.因此,由引理 1 可知,$D_1 \cap D_2$ 是在方程组(3) 之下的不变量.由引理 1 知,对任意 $x \in \mathbf{R}$, $t \geqslant 0$,都有 $u(x,t) > 0$, $v(x,t) > 0$, $u(x,t)v(x,t) > 0 \geqslant c_1$, $u(x,t) > 0 \leqslant c_4$.利用 $u^2 + v^2 \geqslant 2uv \geqslant 2c_1$,可得 $v_t \leqslant v_{xx} + v/(2c_1)$.故可知, 方程组(2)在满足条件(6)时, 在时间上存在全局解.

其次,本文将论证解 (u,v) 在 $t \to \infty$ 时的渐近性态.设 $\psi := 1/v$, 则方程组(2)等价于

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u\psi^2/(1+u^2\psi^2), \\ \psi_t = \psi_{xx} - 2\psi_x^2/\psi - \psi^3/(1+u^2\psi^2), \\ (u(\cdot,0),\psi(\cdot,0)) = (u_0,\psi_0). \end{cases}$$

而由条件(6)可推出

$$0 < u_0(x) < \infty,\ 0 < \psi_0(x) < \infty,\ 0 < c_5\psi_0(x) \leqslant u_0(x) < \infty,\quad x \in \mathbf{R}. \tag{10}$$

再次,考虑空间齐次解 $(u,\psi) = (U(t),\Psi(t))$, 其满足 ODE 方程组

$$\begin{cases} U_t = -U\Psi^2/(1+U^2\Psi^2), \\ \Psi_t = -\Psi^3/(1+U^2\Psi^2). \end{cases} \tag{11}$$

设

$$D_3 := \{(u,\psi) \in R^2;\ u > 0, \psi > 0,\ c_1\psi - u \leqslant 0\},$$
$$\mathscr{S}(t) := \{(u,\psi) \in R^2;\ x \in \mathbf{R}\},$$

则由条件(10),可知 $\mathscr{S}(0) \subset D_3$.对于$(U,\Psi) \in \partial D_3$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_1\Psi - u) = c_1\Psi_t - u_t = \frac{\Psi^2(U - c_1\Psi)}{1+U^2\Psi^2} = 0.$$

因此,由引理 1 可知, D_1 是在方程组(11)之下的不变量.再设

$$D_4 := \{(u,\psi) \in R^2;\ u > 0, \psi > 0,\ c_6u^2 - \psi \leqslant 0\},$$

其中 c_6 为某正常数,其可使得 $\mathscr{S}(0) \subset D_4$.由式(10) 可知,这是可以实现的.注意到 $D_3 \cap D_4$ 是凸的,且

$$\partial D_3 \cap \partial D_4 = \{(0,0),\ (1/(c_1c_6),\ 1/(c_1^2c_6))\}.$$

对于 $(U,\Psi) \in D_3 \cap \partial D_4$,则由条件(10),可知 $\mathscr{S}(0) \subset D_3$.对于$(U,\Psi) \in \partial D_3$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_6U^2 - \psi) = 2c_6UU_t - \Psi_t = \frac{\Psi^2(\Psi - 2c_6U^2)}{1+U^2\Psi^2} \leqslant \frac{\Psi^2(c_6U^2 - 2c_6U^2)}{1+U^2\Psi^2} \leqslant 0.$$

因此, $D_3 \cap D_4$ 是在方程组(11)之下的不变量.

最后,设

$$D_5 := \{(u,\psi) \in R^2;\ u > 0, \psi > 0, \psi - h(t) \leqslant 0\},$$

其中 $h(t) > 0$ 为光滑的递减函数(在后文中构造).注意到 $D_4 \cap D_5$是凸的,选取 $h(0) = 1/(c_1^2c_6)$,以使得 $\mathscr{S}(0) \subset D_3 \cap D_4 \cap D_5(0)$,则对于$(U,\Psi) \in D_3 \cap D_4 \cap \partial D_5$, 计算可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\psi - h) = \Psi_t - h_t = \frac{-\Psi^3}{1+U^2\Psi^2} - h_t.$$

若上式右边等于 0,则可推出 $\{D_3 \cap D_4 \cap D_5\}_{t\geqslant 0}$ 是在方程组(11)之下的不变量.为了得到这一结论,构造

$$h(t) = \sup_{(U,\Psi)\in D_3\cap D_4\cap D_5} \frac{-\Psi^3}{1+U^2\Psi^2} = \frac{-h^3}{1+c^2h^2},\ c = \frac{1}{c_1c_6} > 0, \tag{12}$$

则可令 $h(t)$ 为方程

$$c^2\ln h(t) - \frac{1}{2h^2(t)} = c^2\ln h(0) - \frac{1}{2h^2(0)} - t \tag{13}$$

的解.不难看出, $h(t)$ 满足式(12),且$\{D_3 \cap D_4 \cap D_5\}_{t\geqslant 0}$ 是在方程组(11) 之下的不变量.此外,由式(12) 与(13) 可知,$h(t) > 0$ 为光滑的递减函数,且当 $t \to \infty$ 时,$h(t) \to 0$.综上可知,

当 $t \to \infty$ 时,$(u,\psi) \to (0,0)$.由于 $v = 1/\psi$,因此,当 $t \to \infty$ 时,$(u,v) \to (0,\infty)$. □

2 渐近常数的情形

本节讨论方程组(2)的初始数据为渐近常数的情形.首先在 $t \geqslant 0$ 时考虑常微分方程组(3),赋予初始值$(U(0),V(0)) = (M,0)$,其中 M 为某个正常数.不难求出,解$(U(t),V(t)) := (\sqrt{M^2 - 2t},0)$,且注意到系统(3)的淬火时间 $T = T(M) = M^2/2$.为了估计 $u(x,t)$ 的下界,考虑 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \bar{u}_t = \bar{u}_{xx} - 1/\bar{u}, & x \in \mathbf{R},\ t \in [0,\bar{T}), \\ \bar{u}(x,0) = \bar{u}_0(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{14}$$

其中 $[0,\bar{T})$ 是 $\bar{u}$ 存在的最大区间.同理,也考虑问题(14)对应的 ODE 系统:

$$\bar{U}_t = -1/\bar{U},\ t \in [0,\bar{T}),\ \bar{U}(0) = M. \tag{15}$$

不难算出,系统(15)的解为 $\bar{U}(t) = \sqrt{M^2 - 2t}$,且注意到对应的淬火时间 $T(M) = M^2/2$.

受文献[11]的启发,本文先建立以下引理.关于此,读者还可参阅文献[12]中的 Fujita 方程、文献[13]中的拟线性抛物方程以及文献[14]中的合作抛物系统.

引理 3 令 $\bar{U}$ 为方程组(15)的解,且 $\bar{u}$ 为方程(14)的解,对应定义域为 $\mathbf{R} \times [0,\bar{T})$.假定存在某 $t_0 \in [0,\hat{T})$, $r_0 \in (0,\infty)$ 与常数 $\theta > 1$,使得 $\bar{u}(x,t) \geqslant \theta \bar{U}(t)$, $|x| \leqslant r_0$, $t_0 \leqslant t < \hat{T}$,其中 $\hat{T} := \min\{T,\bar{T}\}$.那么,$\bar{u}$ 将在域$\{|x| \leqslant r_0/2\} \times [t_0,\hat{T})$ 内下有界,且为正.

证明 构造方程(14)的一个适当的子解

$$\omega(x,t) := \hat{\theta}\sqrt{M^2 - 2t + h(x)},$$

其中 $\hat{\theta} \in (1,\theta)$,且 $h(x) := \varepsilon\cos^2(\pi x/(2y_0))$, $\varepsilon > 0$(后文还有需要处).简单计算可得

$$\omega_t - \omega_{xx} + \frac{1}{\omega} = \frac{\hat{\theta}^2}{\omega}\left[\frac{1}{\hat{\theta}^2} + \frac{(h')^2}{4(M^2 - 2t + h)} - \frac{h''}{2} - 1\right] \leqslant \frac{\hat{\theta}^2}{\omega}\left[\frac{1}{\hat{\theta}^2} + \frac{(h')^2}{4h} - \frac{h''}{2} - 1\right].$$

适当地选择 h,可使得 $|h''|$ 与$(h')^2/h$ 在 $|x| \leqslant r_0$ 时与 ε 同阶.因此,只要 $\varepsilon > 0$ 足够小,就可使得

$$\varepsilon \leqslant (M^2 - 2t_0)\left[\frac{\theta^2}{\hat{\theta}^2} - 1\right],\ \frac{1}{\hat{\theta}^2} + \frac{(h')^2}{4h} - \frac{h''}{2} - 1 \leqslant 0.$$

由此可得(注意到 $\hat{\theta} \in (1,\theta)$)

$$\begin{cases} \omega_t \leqslant \omega_{xx} - 1/\omega, & |x| \leqslant r_0,\ t_0 \leqslant t < \hat{T}, \\ \omega(x,t_0) \leqslant \bar{u}(x,t_0), & |x| \leqslant r_0, \\ \omega(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t), & |x| = r_0,\ t_0 \leqslant t < \hat{T}. \end{cases} \tag{16}$$

根据式(16)与比较原理 $\omega(x,t) \leqslant \bar{u}(x,t)$($|x| \leqslant r_0, t_0 \leqslant t < \hat{T}$),有

$$\bar{u}(x,t) \geqslant \hat{\theta}\sqrt{M^2 - 2t + h(r_0/2)} = \hat{\theta}\sqrt{M^2 - 2t + \varepsilon/2} \geqslant \hat{\varepsilon}/2 > 0,$$

其中,定义域为 $|x| \leqslant r_0/2, t_0 \leqslant t < \hat{T}$.由此引理 3 得证. □

此后,假定

$$\bar{u}_0 \in C^1\mathbf{R},\ \bar{u}_0 \geqslant M,\ \bar{u}_0 \not\equiv M,\ \lim_{|x| \mapsto \infty} \bar{u}_0(x) = M. \tag{17}$$

根据式(14)、(15)与(17),有 $\bar{U} \leqslant \bar{u}$.故 $\bar{T} \geqslant T, \hat{T} = T$.下述引理可证明淬火仅在空间无穷远处

发生.

引理 4 当 $M>0$ 为常数且式(14) 满足式(17) 时, 令 $\bar{u}$ 为方程(14) 的解.那么,$\bar{u}$ 将在域 $\Omega\times[0,T)$ 内下有界,且为正.其中,$\Omega\subset\mathbf{R}$ 为任意紧集.

证明 根据引理 3,知 $\hat{T}=T$.这足以说明,对任意给定的 $A>0$,都存在 $t_0\in[0,T)$, $\theta>1$,使得

$$\bar{u}(x,t)\geqslant\theta\sqrt{M^2-2t},\qquad |x|\leqslant 2A,\ t_0\leqslant t<T.\tag{18}$$

为了证明这一点,令 $\gamma_{xx}=\gamma(x,t):=\bar{u}(x,t)/\bar{U}(t)$,则 $\gamma\geqslant 1$,且函数 γ 满足

$$\gamma_t=\gamma_{xx}+\frac{1}{\bar{U}^2}\left\{\gamma-\frac{1}{\gamma}\right\}\geqslant\gamma_{xx}.$$

根据式(17), 可得 $\gamma(\cdot,0)=\bar{u}_0/M\geqslant 1$, $\gamma(\cdot,0)\neq 1$.利用强极大值原理,可知对任意 $x\in\mathbf{R}$, $t>0$, 都有 $\gamma(x,t)>1$.因此,对任意 $A>0$, 都存在 $\theta>1$, $t_0\in(0,T)$,使得 $\gamma(x,t)\geqslant\theta$, $|x|\leqslant 2A$, $t_0\leqslant t<T$.这便可推出式(18),故引理 4 得证. □

为了研究在空间无穷远处方程组(2)的解的性态,需要间接应用文献[11]中的属性定理,即用其证明下述引理 5.

引理 5 如果方程 $\varphi_t=f(\varphi)$ 的某些解在有限时间点淬火,则方程

$$\begin{cases}\varphi_t=D\varphi_{xx}+f(\varphi), & x\in\mathbf{R},\ t>0,\\ \varphi(x,0)=\varphi_0(x), & x\in\mathbf{R}\end{cases}\tag{19}$$

存在空间齐次解 φ 也在有限时间点淬火.

该引理的证明与文献[11]中推论 4.2 的证明一致,此略.

引理 6 当 $M>0$ 为常数且方程(14) 满足式(17) 时, 令 $\bar{u}$ 为方程(14) 的解.那么,$\bar{u}$ 将在有限时间点 $T=M^2/2$ 处淬火.

证明 首先,设 $|a_n|=4n$, $r_n=n$, 由式(17),可得

$$\lim_{n\to\infty}\|\bar{u}_0(x,t)-\bar{U}_0(t)\|_{L^\infty(B_{2r_n}(a_n))}=0,\tag{20}$$

其中 $B_{2r_n}(a_n)$ 表示圆心为 a_n、半径为 $2r_n$ 的圆.注意到 $\bar{u}$ 与 $\bar{U}$ 分别为方程(14) 与(15) 的解(初始条件分别为 $\bar{u}_0$ 与 $\bar{U}_0$),令 $f(\bar{u})=-1/\bar{u}$, $f(\bar{U})=-1/\bar{U}$, 将文献[11] 中的属性定理应用于方程(14)与(15),有

$$\lim_{|x|\to\infty}\bar{u}(x,t)=\bar{U}(t),\qquad\forall t\in[0,T).$$

此外,由式(14)、(15)与(17),以及比较原理,可知对任意 $x\in\mathbf{R}$, $t>0$,都有 $\bar{u}(x,t)\geqslant\bar{U}(t)$.

综上可知,淬火时间点为 $\bar{T}=T=M^2/2$. □

有了上述准备工作,便可以证明定理 2 了.

定理 2 的证明 对于某个 $\tau>0$,在定义域 $t\in[0,\tau)$ 内,解(u,v) 具有局部存在性.设

$$\begin{cases}w(x,t)=(u(x,t),v(x,t)),\\ \hat{w}(x,t)=(U(t),V(t)),\ f(w)=\left(\dfrac{-u}{u^2+v^2},\dfrac{v}{u^2+v^2}\right),\end{cases}\tag{21}$$

其中 (u,v) 与(U,V) 分别为方程组(2)与(3)的解.将文献[11]的属性定理应用于方程组(2)与(3),可得

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=U(t),\quad\lim_{|x|\to\infty}v(x,t)=V(t),\qquad\forall t\in[0,\tau).\tag{22}$$

再由式(4)与(8)可知

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t)v(x,t) = U(t)V(t) = U(0)V(0) = \lim_{|x|\to\infty} u_0(x)v_0(x) > 0.$$

因此,在 $t=\tau$, $|x|\geqslant A$(A 为足够大的正数) 时,假设式(6) 是可满足的(需要 $c_1>0$).

另一方面,由强极大值原理,可知在 $\mathbf{R}\times[0,\tau]$ 内,$v>0$.这意味着在 $t=\tau$, $|x|\leqslant A$ 时,假设式(6) 也是可满足的($c_1>0$ 可能取较小值).因此,将定理 1 应用于起点在 $t=\tau$ 的 Cauchy 问题(2),则可得:(u,v) 对任意 $t\geqslant 0$ 全局存在,且当 $t\to\infty$ 时 $(u,v)\to(0,\infty)$ 在实数域满足一致性. □

最后,证明定理 3.

定理 3 的证明 选取 $\bar{u}_0=u_0$,根据比较原理,若 $u,\bar{u}$ 存在,则可得

$$u(x,t)\geqslant \bar{u}(x,t),\qquad \forall x\in\mathbf{R},\ t>0. \tag{23}$$

假设解 (u,v) 在时间 T^* 处淬火,则根据式(23),有 $T^*\geqslant T$.另一方面,根据引理 2 与定理 2,解 $\bar{u}$在有限时间点 $T=M^2/2$ 淬火仅仅发生在空间无穷远处,故不等式(23)意味着

$$u(x,t)\geqslant \bar{u}(x,t)>0,\qquad \forall x\in\mathbf{R},\ t\in[0,T). \tag{24}$$

此外,利用假设(21),并再次将文献[11]的属性定理应用于方程组(2)与(3),可得

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t)=\bar{U}(t),\quad \lim_{|x|\to\infty} v(x,t)=V(t)=0,\qquad \forall t\in[0,T). \tag{25}$$

因此,可得 $T^*=T$;由引理 4,$\bar{u}$ 仅在空间无穷远处淬火;结合式(24) 可知,解(u,v) 仅在空间无穷远处淬火.定理得证. □

3 结　　论

本文探讨了可转化为非线性抛物型方程的复变量热方程的 Cauchy 问题,这一问题来源于对数字图像进行边缘检测或结构增强时所面临的场景.当利用复变函数中的 Cauchy-Riemann 方程构造原始图像的共轭图像时,由于像素的离散性,原始图像的噪声点会使得共轭图像出现一些难以预料的问题需要处理.在本文中,剥离原始问题的背景,将其转化为一个纯粹的偏微分方程,得到了该类图像处理模型的理论上的解析解.为了得到这一解析解,先提出了一些全局范围内解的存在性与不存在性的判定准则,然后采用解平面的不变子集的变换,证明了当初始值渐近于常数时,解是否会在无穷远处消失或在任意时间内全局存在这一问题,均依赖于初始值的渐近极限值.这一结论,对于广泛出现于治安监控抓拍、高速路面抓拍、路面断纹或裂痕抓拍、地球物理勘探、卫星云图、海洋学、光学、石油勘探工程、太空探测甚至摄影图像美化等领域所出现的图像处理问题而言,都具有很大的参考价值.

参考文献(References):

[1] Kawarada H. On solutions of initial-boundary problem for $u_t=u_{xx}+1/(1-u)$[J]. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 1974, **10**(3): 729-736.

[2] Filippas S, Guo J S. Quenching profiles for one-dimensional semilinear heat equations[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1993, **51**(4): 713-729.

[3] Guo Z, Wei J. On the Cauchy problem for a reaction-diffusion equation with a singular nonlinearity[J]. *Journal of Differential Equations*, 2007, **240**(2): 279-323.

[4] Ferreira R, de Pablo A, Quirós F, Rossi J D. Non-simultaneous quenching in a system of heat equations coupled at the boundary[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 2006, **57**(4): 586-594.

[5] Zheng S, Wang W. Non-simultaneous versus simultaneous quenching in a coupled nonlinear parabolic system[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2008, **69**(7): 2274-2285.

[6] Zhi Y, Mu C. Non-simultaneous quenching in a semilinear parabolic system with weak singularities of logarithmic type[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, **196**(1): 17-23.

[7] Mu C, Zhou S, Liu D. Quenching for a reaction-diffusion system with logarithmic singularity [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, **71**(11): 5599-5605.

[8] YAN Dong-mei, SUN Yu-xin, YANG Jia-ling. Analytical dynamic model of elastic-plastic pipe-on-pipe impact[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2013, **34**(6): 731-746.

[9] Giga Y, Seki Y, Umeda N. Mean curvature flow closes open ends of noncompact surfaces of rotation[J]. *Communications in Partial Differential Equations*, 2009, **34**(11): 1508-1529.

[10] Giga Y, Seki Y, Umeda N. On decay rate of quenching profile at space infinity for axisymmetric mean curvature flow[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems(DCDS-A)*, 2011, **29**(4): 1463-1470.

[11] Guo J S, Ninomiya H, Shimojo M, Yanagida E. Convergence and blow-up of solutions for a complex-valued heat equation with a quadratic nonlinearity[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2013, **365**(5): 2447-2467.

[12] Matano H, Merle F. Classification of type I and type II behaviors for a supercritical nonlinear heat equation[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2009, **256**(4): 992-1064.

[13] Seki Y. On directional blow-up for quasilinear parabolic equations with fast diffusion[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, **338**(1): 572-587.

[14] Shimojo M, Umeda N. Blow-up at space infinity for solutions of cooperative reaction-diffusion systems[J]. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2011, **54**(2): 315-334.

Dynamics of a Complex-Valued Heat Equation

XIONG Hui, YANG Guang

(*Department of Mathematics, Dongguan University of Technology, Dongguan, Guangdong* 523808, *P.R.China*)

Abstract: The Cauchy problem for a parabolic system which was derived from a complex-valued heat equation with inverse nonlinearity was studied. Some criteria for the global existence and quenching of the solutions were provided. Through transformation of the invariant subset of the solution plane, it was proved that, for the initial values which are asymptotically constants, whether the solution quenches at spatial infinity or exists globally at any time, depends on the asymptotic limits of the initial values.

Key words: complex-valued heat equation; global solution; quenching point

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11271069)