

# 基于四元数表示的多体动力学系统 及其保辛积分算法\*

徐小明, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系;工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学), 辽宁 大连 116024)

(本刊编委钟万勰来稿)

**摘要:** 将四元数引入多体动力学系统,用以描述刚体转动分量,继而据此将问题转入约束动力学领域,建立相关的 Lagrange 体系,然后引入作用量并进行有限元近似,并保证格点上严格满足约束条件,则根据分析结构力学基本理论,可导出逐步积分的递推格式,并且积分保辛.该法具有未知数少、计算量小等优点,数值结果令人满意.

**关键词:** 分析结构力学; 四元数; 多体动力学; 保辛积分

**中图分类号:** TP391.9; O313.3      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.10.001

## 引 言

时至今日,四元数已经广泛应用于飞行器姿态控制、定位和稳定<sup>[1]</sup>、捷联式惯性导航系统<sup>[2]</sup>的建立中,并显示出其优越性.与 Euler 角相比,四元数因其具有描述有限转动的无奇异位置优点而著称;并且,由其表示的刚体运动学方程只涉及代数运算,在数值计算中避免了超越方程的迭代求解,因此更利于计算机求解.有数值研究表明<sup>[1-2]</sup>,与 Euler 角速度方程相比,其计算量仅为 Euler 角方程的 35%.

对于四元数的研究,多侧重于四元数的运动学表示,即用四元数表示运动学方程.与之相反,基于四元数表述的刚体动力学则鲜有问津.近些年来才开始有学者逐渐关注与之相关的问题,例如 Wendlandt 以及 Marsden<sup>[3]</sup>将保辛积分格式应用于四元数表述的刚体动力学问题,并进行了初步分析;Betsch 和 Siebert<sup>[4]</sup>将问题导入 Hamilton 体系并进行了细致的分析;Nielsen 和 Krenk<sup>[5]</sup>在此基础上又进行了进一步的研究工作.

本文作者<sup>[6]</sup>从 Kerry-Klein(凯瑞-克莱因)参量入手,以西矩阵表述四元数运算,建立了刚体定点旋转的四元数表示,并将其导入微分代数方程的 Lagrange 体系.根据分析结构力学的基本观点<sup>[7-8]</sup>,并借鉴祖冲之方法论,引入离散系统的区段作用量,并在积分点上严格满足四元数模等于 1 的约束条件,达到了很好的保辛积分效果.今后,我们统称这种在积分节点上严格满足约束方程的方法为“祖冲之类方法”.

\* 收稿日期: 2014-06-25; 修订日期: 2014-08-20

作者简介: 徐小明(1986—),男,辽宁东港人,博士生(通讯作者. E-mail: xxm@mail.dlut.edu.cn);  
钟万勰(1934—),男,浙江德清人,教授,中科院院士(E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

本文在现有工作的基础上,将刚体的质心位置向量与四元数共 7 个未知量作为广义位移向量,辅以四元数的约束条件,来描述单个刚体的运动状态.据此建立起动能、势能表达,并将刚体间的约束条件用广义位移表示,则将问题导入约束系统的 Lagrange 体系.如此,则基于四元数的多体动力学系统与刚体定点旋转在表达形式上无异,便可利用分析结构力学方法,引入区段作用量进行时间离散,并在格点上满足约束条件,进行保辛积分.数值算例验证本方法效果令人满意,可作为多刚体动力学问题数值仿真的高效方法.

## 1 刚体动力学的四元数表示

无约束单刚体具有 6 个自由度,3 个自由度用于表示质心平动,3 个自由度表示刚体绕质心转动.如图 1(a) 所示,设空间惯性坐标系为  $Oxyz$ ,固定在刚体上的体轴系为  $O'x'y'z'$ , $O'$  是刚体的质心.则其上任意一点  $A$  位置向量  $\mathbf{x}$  可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{q}_c(t) + \mathbf{T}(t)^T \cdot \mathbf{x}'_0, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{T}$  是空间轴系与体轴系的坐标转换矩阵, $\mathbf{q}_c$  是由空间轴系原点指向体轴系原点的矢径,即质心的位置向量. $\mathbf{x}'_0$  为  $A$  点相对于质心  $O'$  的相对位置向量,上标“'”表明  $\mathbf{x}'_0$  是在体轴系中表示的,它与空间轴系间的转换关系为

$$\mathbf{x}'_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_0. \quad (2)$$

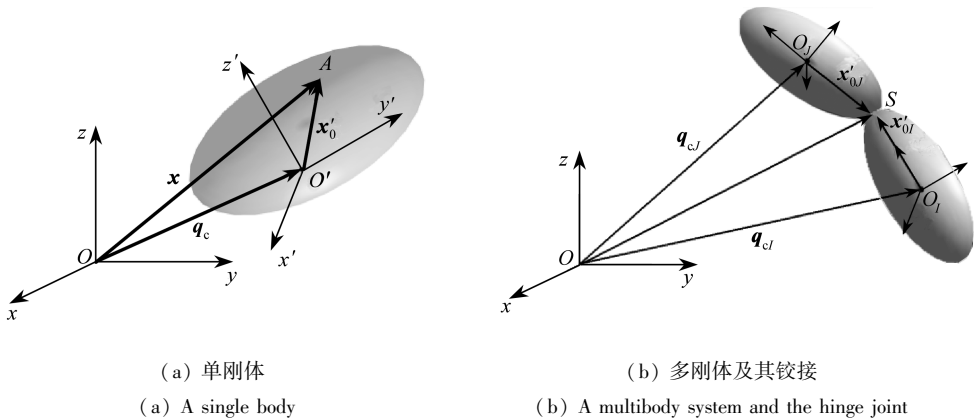


图 1 多刚体系统

Fig.1 The multibody system

显然, $\mathbf{q}_c$  描述了质心的平移运动,而  $\mathbf{T}$  则描述了刚体的 3 个旋转自由度.坐标转换矩阵  $\mathbf{T}$  可由四元数表示为<sup>[9]</sup>

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$\mathbf{T}$  中的参量不是完全独立的,需要满足四元数的约束方程

$$g(\mathbf{q}_e) = \mathbf{q}_e \cdot \mathbf{q}_e - 1 = 0, \quad (4)$$

其中定义

$$\mathbf{q}_e = \{e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3\}^T \quad (5)$$

为四元数向量.这样,由四元数向量与约束方程(4)完全描述了刚体旋转的 3 个自由度.根据文献[6]的论述,四元数向量与角速度之间存在如下关系式:

$$\omega_1 = 2\mathbf{q}_e \cdot \mathbf{G}_1 \cdot \dot{\mathbf{q}}_e, \quad \omega_2 = 2\mathbf{q}_e \cdot \mathbf{G}_2 \cdot \dot{\mathbf{q}}_e, \quad \omega_3 = 2\mathbf{q}_e \cdot \mathbf{G}_3 \cdot \dot{\mathbf{q}}_e, \quad (6)$$

其中  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  为角速度沿体轴系  $x', y', z'$  轴的分量, 而  $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$  是刚体旋转的陀螺矩阵, 定义为

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

将式(6)写成矩阵-向量乘积的形式, 为

$$\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_e) \cdot \dot{\mathbf{q}}_e, \quad (8)$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}' = \{\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\}^T, \\ \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_e) = -\{2\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{q}_e & 2\mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{q}_e & 2\mathbf{G}_3 \cdot \mathbf{q}_e\}^T. \end{cases} \quad (9)$$

式(8)亦为四元数向量的刚体运动学方程.

假设刚体质量为  $M$ , 并且不妨设体轴系  $O'x'y'z'$  3 个坐标轴的方向与刚体的主惯性轴同. 根据刚体动力学的基本理论, 刚体的动能可以分解为在质心处质量为  $M$  的质点的动能, 加上刚体绕该质点旋转的动能, 即

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}_c + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{J}'_c \cdot \boldsymbol{\omega}', \quad (10)$$

这里  $\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{q}}_c$  表示质心的速度,

$$\mathbf{J}'_c = \text{diag}\{I_1, I_2, I_3\} \quad (11)$$

为以质心为参考点的惯性张量  $\mathbf{J}_c$  在体轴系中的坐标表示. 式(10)的动能也可以写为

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q})^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (12)$$

这里定义广义位移向量

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_c^T \quad \mathbf{q}_e^T\}^T, \quad (13)$$

而矩阵  $\mathbf{J}$  与  $\mathbf{G}$  分别为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} M\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}'_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{G}_e(\mathbf{q}_e) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

$\mathbf{J}$  可以定义为刚体的广义质量. 将系统的势能形式的表示为  $V(\mathbf{q})$ , 则根据上述的式(4)、(12)~(14), 扩展的 Lagrange 函数可以写为

$$L_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \lambda) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q})^T \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}) - \lambda g(\mathbf{q}), \quad (15)$$

$\lambda$  是 Lagrange 乘子. 根据 Lagrange 函数, 便可写出单刚体系统的 Lagrange 方程. 当刚体受到约束作用时, 根据式(1)便可写出约束方程. 例如刚体在  $A$  点受到球铰作用, 则约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(S)}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}_0(t) + \mathbf{T}(t)^T \cdot \mathbf{x}'_0 = \mathbf{0}, \quad (16)$$

其中  $\mathbf{T}$  显然是四元数向量  $\mathbf{q}_e$  的函数. 此时的 Lagrange 函数只需在式(15)的基础上减去  $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{(S)}(\mathbf{q})$  项即可,  $\boldsymbol{\gamma}$  为与式(16)相关的 Lagrange 乘子.

由于本文的侧重点在于数值求解, 本节中仅论述了单刚体自由运动与约束情况下的 Lagrange 函数的表示形式, 而关于 Lagrange 函数的进一步讨论, 例如 Lagrange 方程等便省略了.

根据系统的 Lagrange 函数便可引入离散系统的区段作用量,继而得到对偶方程,根据分析结构力学理论,数值积分便可进行.具体的逐步积分过程,待论述多体动力学的四元数表示之后便可一并给出.

## 2 多体动力学系统

多体运动是由各刚体本身的运动加上刚体之间的约束作用组成的,刚体本身运动与约束条件相容便形成了多体运动.下面将基于四元数向量,对多体动力学进行描述.考虑一个多体系统由  $n$  个刚体组成,它们之间通过  $m$  个额外的约束保持相连.对于特定的刚体  $I$ ,广义坐标被表示为

$$\mathbf{q}_I = \{ \mathbf{q}_{cl}^T \quad \mathbf{q}_{el}^T \}^T \quad (I = 1, 2, \dots, n), \quad (17)$$

其中  $\mathbf{q}_{cl}$  与  $\mathbf{q}_{el}$  分别为第  $I$  个刚体的质心位置向量与表示旋转的四元数向量.定义多刚体的广义位移向量:

$$\mathbf{u} = \{ \mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_n^T \}^T. \quad (18)$$

这样整个系统的动能便可形式的表示为

$$\begin{aligned} T &= \sum_I T_I = \sum_I \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_I \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q}_I)^T \cdot \mathbf{J}_I \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q}_I) \cdot \dot{\mathbf{q}}_I = \\ &\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中各矩阵分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{J}_I &= \begin{bmatrix} M_I \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}'_{Ic} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \text{diag}\{ \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_n \}, \\ \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{q}_1) & \mathbf{0}_{6 \times 7} & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 7} \\ \mathbf{0}_{6 \times 7} & \mathbf{G}(\mathbf{q}_2) & \dots & \mathbf{0}_{6 \times 7} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0}_{6 \times 7} \\ \mathbf{0}_{6 \times 7} & \mathbf{0}_{6 \times 7} & \mathbf{0}_{6 \times 7} & \mathbf{G}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix}, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

$M_I$  与  $\mathbf{J}'_{Ic}$  分别为第  $I$  个刚体的质量与惯性张量(体轴系下).由于广义位移中含有四元数向量,所以应该满足四元数的约束条件,可以写为

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \{ g_1(\mathbf{q}_{e1}) \quad g_2(\mathbf{q}_{e2}) \quad \dots \quad g_n(\mathbf{q}_{en}) \}^T, \\ g_I(\mathbf{q}_{el}) = \mathbf{q}_{el} \cdot \mathbf{q}_{el} - 1 = 0, \quad I = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (21)$$

将各刚体之间的约束条件(外部约束)形式地写为

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (22)$$

$\Phi(\mathbf{u})$  是  $m \times 1$  的列向量,并将势能表示为

$$V = V(\mathbf{u}). \quad (23)$$

于是便可以得到多体动力学系统的扩展的 Lagrange 函数,即

$$\begin{aligned} L_e(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}) &= \\ &\frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}} - V(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \Phi(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$\boldsymbol{\lambda} = \{ \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n \}^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = \{ \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_m \}^T \quad (25)$$

为 Lagrange 乘子,观察式(24)与(15),两式在形式上并无太大差异,当  $n = 1$  的特定情形,式(24)便退化为式(15).

### 3 运动学约束

上1节以式(22)的形式,给出了约束方程的表达式,本节将以球铰为例,详细地介绍在四元数表述下约束方程的具体形式.如图1(b)所示,刚体  $I$  与刚体  $J$  之间以球铰  $S$  相连.根据式(1),定义由  $\mathbf{q}_I$  表示的铰接点的位置向量

$$\Phi_I(\mathbf{q}_I) = \mathbf{q}_{cl}(t) + \mathbf{T}_I(t)^T \cdot \mathbf{x}'_{0I}, \tag{26}$$

其中  $\mathbf{T}_I$  是第  $I$  个刚体的坐标旋转矩阵,

$$\mathbf{x}'_{0I} = \{x'_{0I} \quad y'_{0I} \quad z'_{0I}\}^T \tag{27}$$

为铰接点相对于质心  $O_I$  的矢径.如此,刚体  $I$  与刚体  $J$  之间的约束可以表示为

$$\Phi_{IJ}^{(S)}(\mathbf{q}_I, \mathbf{q}_J) = \Phi_J(\mathbf{q}_J) - \Phi_I(\mathbf{q}_I) = \mathbf{0}. \tag{28}$$

这样本文已经给出了式(24)中的所有可以预先确定的表达式,再根据实际情况确定系统势能的表达式,则可根据作用量原理进行离散求解了.显然求解时会涉及到式(28)关于广义位移向量的导数.一个简洁的表达式可以使求导变得简洁,为此,笔者希望将  $\mathbf{T}$  表示成四元数向量  $\mathbf{q}_e$  的函数,实际上根据式(3), $\mathbf{T}$  中各元素可以表示为

$$T_{ij} = \mathbf{q}_e \cdot \mathbf{T}_{ij} \cdot \mathbf{q}_e, \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3. \tag{29}$$

这里  $T_{ij}$  表示矩阵  $\mathbf{T}$  中第  $i$  行第  $j$  列的元素,而  $\mathbf{T}_{ij}$  则是有如下定义的正交矩阵元:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{T}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \right. \tag{30}$$

而其它矩阵元可由式(30)生成,为

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{T}_{33} &= \mathbf{T}_{11} \cdot \mathbf{T}_{22}, \quad \mathbf{T}_{31} = \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23}, \\ \mathbf{T}_{21} &= \mathbf{T}_{22} \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{11}, \quad \mathbf{T}_{13} = \mathbf{T}_{11} \cdot \mathbf{T}_{31} \cdot \mathbf{T}_{33}, \quad \mathbf{T}_{32} = \mathbf{T}_{33} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{T}_{22}. \end{aligned} \right. \tag{31}$$

根据式(26)~(31),再经过一番推导,便可得出

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_I(\mathbf{q}_I)}{\partial \mathbf{q}_I} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_I(\mathbf{q}_I)}{\partial \mathbf{q}_{cl}} \\ \frac{\partial \Phi_I(\mathbf{q}_I)}{\partial \mathbf{q}_{cl}} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial \Phi_I(\mathbf{q}_I)}{\partial \mathbf{q}_{cl}} &= \mathbf{I}_{3 \times 3}, \\ \frac{\partial \Phi_I(\mathbf{q}_I)}{\partial \mathbf{q}_{cl}} &= [\mathbf{K}_{I1} \mathbf{q}_{cl} \quad \mathbf{K}_{I2} \mathbf{q}_{cl} \quad \mathbf{K}_{I3} \mathbf{q}_{cl}], \end{aligned} \right. \tag{32}$$

其中

$$K_{ii} = 2(x'_{01} \mathbf{T}_{1i} + x'_{02} \mathbf{T}_{2i} + x'_{03} \mathbf{T}_{3i}), \quad i = 1, 2, 3.$$

于是联系式(28)便可得出刚体  $I$  与刚体  $J$  之间的约束方程关于  $\mathbf{q}_I, \mathbf{q}_J$  的导数等。

#### 4 多体动力学的逐步积分保辛算法

对于多体动力学系统,根据式(24)给出的扩展的 Lagrange 函数,在时间方向上进行变分,便可将问题导入微分-代数方程领域.然而分析求解是困难的,应寻求数值求解方法.根据分析结构力学原理,可引入作用量将问题导入离散系统.就步骤来说,首先运用 Lagrange 乘子,保证离散积分点的约束条件严格满足;再在时间区段内,用时间有限元离散代替差分离散;然后运用作用量的变分原理以代替微分方程,进行逐步积分.分析结构力学理论保证可达到每步积分的自动保辛.

具体来说,取离散时间区段  $\eta, t_0 = 0, t_1 = \eta, \dots, t_k = k\eta, \dots$ .可假设  $t_{k-1}$  时的位移与速度是  $\mathbf{u}_{k-1}, \dot{\mathbf{u}}_{k-1}$  已知,并满足约束方程.现在的问题是要通过  $t_{k-1}$  步的已知量计算下一个时间步的  $\mathbf{u}_k, \dot{\mathbf{u}}_k$ .为此首先引入时间  $(t_{k-1}, t_k)$  的区段作用量(含约束)

$$S_k(\mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\lambda}_{k-1}, \boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\gamma}_{k-1}, \boldsymbol{\gamma}_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} L_c(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\gamma}) dt, \quad (33)$$

然后进行有限元近似,设在  $k$ - 区段内位移取为平均位移,  $\mathbf{u}_{\#k} = (\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_k)/2$ , 速度为  $\dot{\mathbf{u}}_{\#k} = (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1})/\eta$ , 约束在区段内可近似为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\lambda}_{k-1} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}_{k-1}) + \boldsymbol{\lambda}_k \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}_k))/\eta, \\ \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\gamma}_{k-1} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_{k-1}) + \boldsymbol{\gamma}_k \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_k))/\eta. \end{cases} \quad (34)$$

这里利用了 Lagrange 乘子乘以一个常数不影响最终计算.

这样就可以得到区段作用量的有限元近似:

$$\begin{aligned} S_k(\mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\lambda}_{k-1}, \boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\gamma}_{k-1}, \boldsymbol{\gamma}_k) &= \frac{\eta}{2} \dot{\mathbf{u}}_{\#k} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}_{\#k})^T \cdot \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}_{\#k}) \cdot \dot{\mathbf{u}}_{\#k} - \\ &\eta V(\mathbf{u}_{\#k}) - \boldsymbol{\lambda}_{k-1} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}_{k-1}) - \boldsymbol{\lambda}_k \cdot \mathbf{g}(\mathbf{u}_k) - \\ &\boldsymbol{\gamma}_{k-1} \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_{k-1}) - \boldsymbol{\gamma}_k \cdot \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_k). \end{aligned} \quad (35)$$

此时作用量  $S_k$  已是两端独立自变量  $\{\mathbf{u}_{k-1}^T \quad \boldsymbol{\lambda}_{k-1}^T \quad \boldsymbol{\gamma}_{k-1}^T\}^T$  与  $\{\mathbf{u}_k^T \quad \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad \boldsymbol{\gamma}_k^T\}^T$  的函数. Lagrange 原理的位移约束条件已经在节点处严格满足,区段内部的约束条件则由有限元插值近似满足.

根据离散系统的分析结构力学,引入对偶方程

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{k-1} = -\partial S_k / \partial \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{g}(\mathbf{u}_{k-1}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_{k-1}) = \mathbf{0}; \\ \mathbf{f}_k = \partial S_k / \partial \mathbf{u}_k, \mathbf{g}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (36)$$

则状态变量为  $\mathbf{v}_k = \{\mathbf{u}_k^T \quad \mathbf{f}_k^T\}^T$ .按分析结构力学方法,从  $\mathbf{v}_{k-1}$  可递推  $\mathbf{v}_k$ ,该变换保辛,但带有参变量  $\boldsymbol{\lambda}_{k-1}, \boldsymbol{\gamma}_{k-1}$ .确定  $\boldsymbol{\lambda}_{k-1}, \boldsymbol{\gamma}_{k-1}$  要根据节点约束条件  $\mathbf{g}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}$ .

实际工程中,给定的初始条件通常为 Euler 角  $(\varphi_0, \theta_0, \psi_0)$ , 以及贴体坐标系下角速度矢量  $\boldsymbol{\omega}'_0$  等,这些物理量与四元数之间的变换关系在一般的介绍四元数应用的书中便可找到<sup>[1-2]</sup>, 继而便可获得多体运动的初始状态向量  $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$ . 初始时刻的  $\mathbf{f}_0$  则由 Legendre 变换:

$$\mathbf{f} = \partial L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) / \partial \dot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{J} \cdot \bar{\mathbf{G}}(\mathbf{u}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (37)$$

确定.得到初始时刻的状态变量  $\mathbf{v}_0 = \{\mathbf{q}_0^T \quad \mathbf{p}_0^T\}^T$ , 便可递推的求解出  $\mathbf{v}_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ . 实际计算时,根据式(36),区段作用量  $S_k$  与  $S_{k+1}$  均产生  $\mathbf{f}_k$ , 两者相等有动力学方程:

$$-\partial S_{k+1} / \partial \mathbf{u}_k = \partial S_k / \partial \mathbf{u}_k. \quad (38)$$

此式联立约束方程

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_{k+1}) = \mathbf{0}, \Phi(\mathbf{u}_{k+1}) = \mathbf{0} \tag{39}$$

便可迭代求解。

具体算法如下：

- 1) 初始时刻, 已知  $\mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}_0$ , 根据式(37) 计算  $\mathbf{f}_0$ ;
- 2) 联立方程  $\mathbf{f}_0 = -\partial S_1 / \partial \mathbf{u}_0, \mathbf{g}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}, \Phi(\mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$ , 迭代求解  $\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\lambda}_0, \boldsymbol{\gamma}_0$ ;
- 3) 假设已经求得  $\mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k$ , 则  $\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\gamma}_k$  由式(38) 加上非线性约束方程  $\mathbf{g}(\mathbf{q}_{k+1}) = \mathbf{0}$  迭代得到。

## 5 数值例题与讨论

**算例** 4个相同长方体质量块, 互相之间球铰相连, 图2(a)给出了链接形式。  $M = 12 \text{ kg}$ , 长宽高为  $\{1, 0.5, 3\}$ , m, 以质心为参考点的主惯性张量为  $\mathbf{J} = \text{diag}\{9.25, 10.0, 1.25\}$ ,  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。刚体1的姿态角为  $\boldsymbol{\Theta}_1 = \{\pi/4 \ \pi/4 \ 0\}$ , 刚体2的姿态角  $\boldsymbol{\Theta}_2 = \boldsymbol{\Theta}_1$ , 刚体3的姿态角  $\boldsymbol{\Theta}_3 = \{\pi/4 \ 3\pi/4 \ 0\}$ , 刚体4的姿态角  $\boldsymbol{\Theta}_4 = \boldsymbol{\Theta}_3$ , 在此状态自由下放。根据此初始条件, 各刚体的初始角速度均为0。(注: 对于  $\boldsymbol{\Theta} = \{\phi \ \theta \ \psi\}$  为例, 表示刚体1转动前体轴系各轴方向与惯性系同, 然后刚体沿  $z'$  轴旋转  $\phi$ , 在转动后的体轴系中再沿  $x'$  轴旋转  $\theta$ , 之后再沿  $z'$  轴旋转  $\psi$ 。)

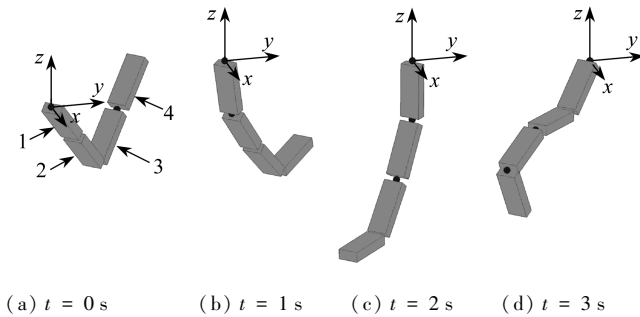


图2 球铰链在选定时间点的运动

Fig.2 Motion of the chain with spherical hinges at selected moments

此球铰链放置于均匀的引力场中, 在  $z$  轴负向上受重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  作用, 重力势能可以表示为

$$V(\mathbf{u}) = - \sum_l M_l \mathbf{f}_g \cdot \mathbf{q}_{cl}, \tag{40}$$

其中  $\mathbf{f}_g = \{0 \ 0 \ -g\}^T$  为重力加速度矢量。将式(40)代入式(35), 然后根据式(36)便可求出多体逐步积分格式, 由于是非线性方程, 每一步需要迭代求解。本文取时间步长为  $\Delta t = 0.002 \text{ s}$ 。

图2(a)~(d)给出了铰链在初始位置释放后1~3s的运动状态。图3(a)给出了系统机械能随着时间的变换规律。可以观察到, 由于采用了保辛方法, 能量基本保持不变。图3(b)、(c)给出了系统约束随时间的变换规律。误差达到  $10^{-15}$  的量级, 可见无论是四元数模为1的约束条件还是铰接条件都得到了很好的满足。

图4(a)~(d)分别给出了第1个长方体从初始时刻到  $t = 10 \text{ s}$ ,  $t = 20 \text{ s}$ ,  $t = 40 \text{ s}$  以及  $t = 100 \text{ s}$  的运动轨迹沿  $\tilde{x}$ - $z$  平面的投影。 $\tilde{x}$ - $z$  平面实际上是初始时刻4个长方体质心所在平面,  $\tilde{x}$  轴上的基矢量为

$$\tilde{\mathbf{i}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j},$$

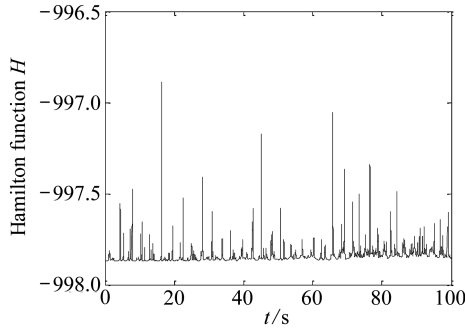


图 3(a) Hamilton 函数随时间变化

Fig.3(a) The Hamilton function with respect to time

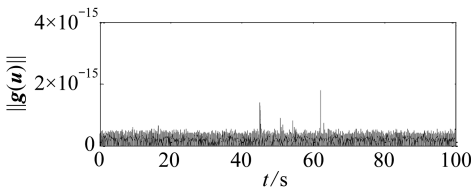


图 3(b) 四元数约束误差随时间变化

Fig.3(b) Error of the quaternion constraints with respect to time

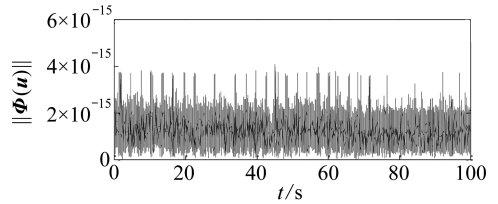
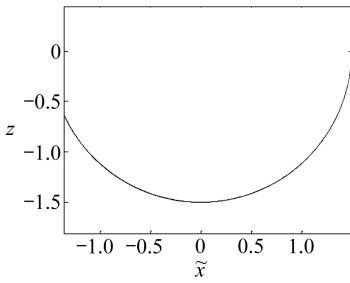
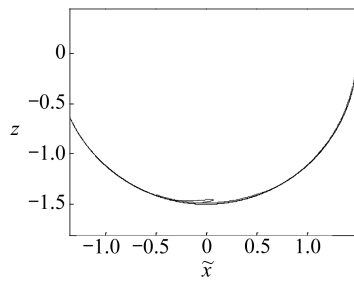


图 3(c) 铰接约束误差随时间变化

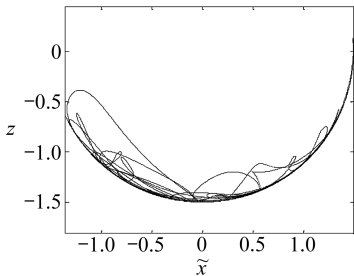
Fig.3(c) Error of the spherical hinges constraints with respect to time



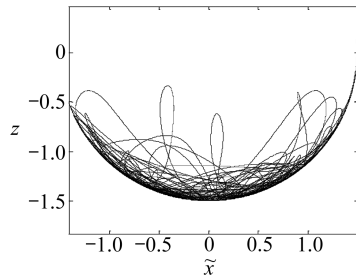
(a)  $t \leq 10$  s



(b)  $t \leq 20$  s



(c)  $t \leq 40$  s



(d)  $t \leq 100$  s

图 4 第 1 个长方体质心不同时刻轨迹沿  $\tilde{x}$ - $z$  平面的投影  $\left(\tilde{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$

Fig.4 Trajectory projection of the barycenter of the 1st body on the  $\tilde{x}$ - $z$  plane  $\left(\tilde{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)$

其中  $i, j$  为惯性系  $x, y$  轴的基矢量。从理论角度上, 由于重力的方向沿  $z$  轴向下, 并在初始时刻



位于  $\tilde{x}$ - $z$  平面内,所以在任意时刻  $t$ ,其质心仍应在  $\tilde{x}$ - $z$  平面内.据此分析,由于约束条件的限制,第 1 个长方块的质心在  $\tilde{x}$ - $z$  平面的投影应该是以  $O$  点为圆心的圆弧.从图 4 给出的投影图可以看出,在  $0 \sim 10$  s 之间,随着摆动的进行,质心的轨迹仍在  $\tilde{x}$ - $z$  平面内.在 10 s 以后,质心逐渐开始偏离  $\tilde{x}$ - $z$  平面,并越发明显,这与理论分析不符合,这是铰接条件造成的.球铰链不限制各长方块沿  $z'$  轴的转动,所以沿  $\tilde{x}$ - $z$  平面的运动是不稳定的,任意微小的扰动都会使质心偏离  $\tilde{x}$ - $z$  平面,并且不再返回该平面.

## 6 结 论

本文基于四元数理论,重新对多体动力学系统进行了描述.然后根据分析结构力学基本原理,先导出问题的区段作用量,进而对其进行有限元插值离散.借鉴祖冲之类方法的成功经验,通过 Lagrange 乘子,在插值节点处严格满足位移约束条件.进而通过对作用量变分而代替微分方程进行求解.这样不仅很好地满足了约束条件,而且积分保辛.基于四元数的多体动力学表示具有形式简单、未知量少的特点,并且避免了采用 Euler 角时可能出现的奇异现象与超越方程的迭代求解,特别适合数值仿真,可作为多体系统仿真分析的有力工具.

本文仅仅给出了多体系统的一般表示形式,并未对特殊的约束条件的表示形式详加分析,并且对于保辛积分的应用、仿真分析研究也并未深入,还有很多工作有待展开.

### 参考文献(References):

- [1] 程国采. 四元数法及其应用[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1991. (CHENG Guo-cai. *The Method of Quaternion and Its Application*[M]. Changsha: National University of Defence Technology Press, 1991. (in Chinese))
- [2] 张树侠, 孙静. 捷联式惯性导航系统[M]. 北京: 国防工业出版社, 1992. (ZHANG Shu-xia, SUN Jing. *Strap-Down Inertial Navigation System*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1992. (in Chinese))
- [3] Wendlandt J M, Marsden J E. Mechanical integrators derived from a discrete variational principle[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1997, **106**(3): 223-246.
- [4] Betsch P, Siebert R. Rigid body dynamics in terms of quaternions: Hamiltonian formulation and conserving numerical integration[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, **79**(4): 444-473.
- [5] Nielsen M B, Krenk S. Conservative integration of rigid body motion by quaternion parameters with implicit constraints[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012, **92**(8): 734-752.
- [6] 徐小明, 钟万勰. 刚体动力学的四元数表示及保辛积分[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(1): 1-11. (XU Xiao-ming, ZHONG Wan-xie. Symplectic integration of rigid body motion by quaternion parameters[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 1-11. (in Chinese))
- [7] 钟万勰, 高强. 约束动力系统的分析结构力学积分[J]. 动力学与控制学报, 2006, **4**(3): 193-200. (ZHONG Wan-xie, GAO Qiang. Integration of constrained dynamical system via analytical structural mechanics[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, **4**(3): 193-200. (in Chinese))
- [8] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wan-xie. *Symplectic Method in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))

- [9] Goldstein H, Poole C, Safko J. *Classical Mechanics*[M]. 3rd ed. Boston: Addison Wesley, 2002.

## Symplectic Integration for Multibody Dynamics Based on Quaternion Parameters

XU Xiao-ming, ZHONG Wan-xie

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment  
(Dalian University of Technology)*; *Department of Engineering Mechanics,  
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China*)

(Contributed by ZHONG Wan-xie, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The quaternion representation was introduced into multibody dynamics for the description of rigid body rotation, based on which the constrained dynamics was derived and the relevant Lagrange system was established. Then, the segmental action for discrete systems was introduced and approximated with the finite element method. According to the theory of analytical structural mechanics, the symplectic numerical integration was derived with the constraints strictly satisfied at the integration points and the integration process was symplectic conservative in the sense of variation principle. The proposed method has the characteristics of less calculation and less unknown numbers, which is confirmed with the numerical results of an exemplary multibody hinged system.

**Key words:** analytical structural mechanics; quaternion; multibody dynamics; symplectic integration