文章编号:1000-0887(2014)10-1143-08

无穷多海洋表面波共振的 Zakharov 方程*

黄 虎

(上海大学 上海市应用数学和力学研究所; 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072)

摘要: 从基本的波之“能量、动量、作用量”守恒定律出发,遵照普适的“对称性决定相互作用”法则和“Hamilton”结构,运用 Hamilton 海洋表面波复正则方程、正则变换及其 Poisson 括号条件,并结合经典的 3-4-5-波共振条件,推导出两大类“无穷多海洋表面波相互作用的共振条件”;相应地就建立了两大类“无穷多海洋表面波共振的 Zakharov 方程”.以此,就为最具根本性、普遍性的海洋波湍流搭建了一个必备、先行和完备的理论框架.

关 键 词: Zakharov 方程; 共振条件; 无穷多海洋表面波; 能量、动量和作用量守恒
中图分类号: O353.2 **文献标志码**: A
doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.10.009

引 言

从微观的量子波态[1]到宏观的天体波象[2],波-波相互作用之共振,历来是波动领域关注的焦点.或曰:共振,关系到几乎所有的物理领域[3-4],不得不完整、全面地考察.这就不能只限于少数波,无穷多个波的共振,一般而言才能更为真切、如实地刻画所面对的种种“波浪滚滚”的复杂波乃至奇异波的现象.

可以推断:长期以来一直为人们所困惑而至今仍不得其要领的超大海洋表面波现象[5]——畸形波(freak waves),或异化波(rogue waves),或巨波(giant waves),必蕴涵着波-波共振机制,而且是多波乃至于无穷多个波的共振.因为在一个常态的波况环境条件下,无论是远洋深海区域,还是近岸浅水范围,何以突然就爆发了这不可预测的超大振幅波呢?

现代水波理论,正是来自于海洋表面波的“Phillips 之 4-波共振条件”[6].以此为内在机制,随后就出现了以统计系综平均描述的 Hasselmann 方程[7].不久之后,就产生了确定性的、以普适的 Hamilton 结构刻画 4-波共振的 Zakharov 方程[8].可以证明[9]:从 Zakharov 方程出发,能够直接推出 Hasselmann 方程.

可以看出,在上述 3 个堪称里程碑的现代水波理论发展工作中,Zakharov 方程居于中心主导地位:它承前于“Phillips 4-波共振条件”,启后于 Hasselmann 方程.更为重要地,Zakharov 方程自身拥有理论物理两大不可或缺的基本要素:Hamilton 结构和对称性,后者,可直接导致“对

* **收稿日期**: 2014-03-24; **修订日期**: 2014-04-14
基金项目: 国家自然科学基金(11172157);上海市浦江人才计划(12PJD001);上海高校创新团队建设资助项目
作者简介: 黄虎(1964—),男,新疆石河子人,教授,博士,博士生导师(Tel: +86-21-56332947; E-mail: hhuang@ shu.edu.cn).

称性决定相互作用"这又一普适的根本法则[10].

正是由于 Zakharov 方程的极端重要性,时至今日就相继提出了一批不断改进的 Zakharov-型方程[11-13].但是,它们均局限于最多至"5-波共振"的狭窄格局,其适用范围就很有限了.为突破此限制,本文拟将经典的 4-波共振 Zakharov-型方程推广至无穷多波.这就必须具备"无穷多波共振的条件"[14].那么,如何确定呢? 若继续沿用 Phillips[6] 当初得到 4-波共振条件的常规求法,从理论上说是可行的,但在实践上将难于执行,因为这将导致极其繁冗复杂的运算工作量,也就极易出错.对此,必须另辟蹊径.最为基本的"能量、动量和作用量守恒定律",势必可涵盖若干重要类型的"推论和条件",这理应就包括"共振条件".为此,本文将分别、独立地从这些基本定律出发,以相互验证和借鉴,最终统一地得到相同的"共振条件",从而据此建立无穷多波共振的 Zakharov 方程.

1 对称性和 Hamilton 结构

从基本粒子到天体运行,均可谓之曰"波的传播或波粒二象性".贯穿其"始终"的理论密切相关要素即是"对称性、守恒定律和 Hamilton 结构",其中又以"能量、动量守恒和复正则函数及其方程"为主体标志.

通过 Fourier 变换和相继的一个正则变换,可将弱非线性海洋表面波 Hamilton 结构的 2 个实正则函数转化为 1 个复正则函数 $a(\boldsymbol{k},t)$,其中 t 和 $\boldsymbol{k}$ 分别表示时间和波数矢量.基于此, 可得到 Hamilton 海洋表面波的复正则方程[8]:

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\delta H}{\delta a^{*}},\tag{1}$$

其中, $H(a,a^{*})$ 即为 Hamilton 能量泛函, δ 代表泛函导数.现在,可将最基本的 H 由有限阶展开[8,12],对称性地扩展为一个无穷多阶积分幂级数,同时以不同的"基本首项" 赋予波动量 $M(a,a^{*})$ 和波作用量 $A(a,a^{*})$[12,15]:

$$\begin{aligned}
H={}&\int\omega_1 a_1 a_1^{*}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1+\\
&\Bigg[\sum_{m+n=2j+1\geqslant 3}^{\infty}\ \sum_{m=1}^{j}\frac{1}{m}\int U_{1,2,\cdots,m+n}^{(m,n)}(a_1^{*}\cdots a_m^{*}a_{m+1}\cdots a_{m+n}+\mathrm{c.c.})+\\
&\sum_{m+n=2j\geqslant 4}^{\infty}\ \sum_{m=1}^{j-1}\frac{1}{m}\int U_{1,2,\cdots,m+n}^{(m,n)}(a_1^{*}\cdots a_m^{*}a_{m+1}\cdots a_{m+n}+\\
&\mathrm{c.c.})\Bigg]\delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-(m+n)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1\cdots(m+n)}+\\
&\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m}\int U_{1,2,\cdots,2m}^{(m,m)}a_1^{*}\cdots a_m^{*}a_{m+1}\cdots a_{2m}\delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-2m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1\cdots 2m}+\\
&\sum_{m=3}^{\infty}\frac{1}{m}\int U_{1,2,\cdots,m}^{(m,0)}(a_1^{*}\cdots a_m^{*}+\mathrm{c.c.})\,\delta_{1+\cdots+m}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1\cdots m},
\end{aligned}\tag{2}$$

$$M=\int\boldsymbol{k}aa^{*}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k},\tag{3}$$

$$A=\int aa^{*}\,\mathrm{d}\boldsymbol{k},\tag{4}$$

其中,实系数 $U_{1,2,\cdots,m,m+1,\cdots,m+n}^{(m,n)}$ 满足对称性:

$$U^{(m,n)}_{1,2,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m,m+1,\cdots,r,\cdots,s,\cdots,m+n} = U^{(m,n)}_{1,2,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,m,m+1,\cdots,s,\cdots,r,\cdots,m+n} = U^{(m,n)}_{q,\cdots,1,\cdots,m,\cdots,p,s,\cdots,m+1,\cdots,m+n,\cdots,r}, \tag{5a}$$

$$U^{(m,m)}_{1,2,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m,m+1,\cdots,r,\cdots,s,\cdots,2m} = U^{(m,m)}_{1,2,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,m,m+1,\cdots,s,\cdots,r,\cdots,2m} = U^{(m,m)}_{p,\cdots,1,\cdots,m,\cdots,q,s,\cdots,m+1,\cdots,2m,\cdots,r} = U^{(m,m)}_{m+1,\cdots,r,\cdots,s,\cdots,2m,1,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m}, \tag{5b}$$

并且,“c.c.”代表前项的复共轭;各个因变函数的下标 r 代指自变量 $\boldsymbol{k}_r$,例如:$\omega_r = \omega(\boldsymbol{k}_r)$ 代表有限水深表面张力-重力波色散关系的角频率;$a_r = a(\boldsymbol{k}_r, t)$;$\delta_{1+2-3}$ 表示 Dirac 函数 $\delta(\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3)$;$\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{123} = \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1\mathrm{d}\boldsymbol{k}_2\mathrm{d}\boldsymbol{k}_3$;各个积分号表示在整个 $\boldsymbol{k}$- 平面上从“$-\infty$”到“$+\infty$”的相应多重积分.

由式(1),(2)和(5),可得[15]

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial a_1}{\partial t} = {} & \omega_1 a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\Big[\int U^{(1,n)}_{1,2,\cdots,1+n} a_2\cdots a_{1+n}\delta_{1-2-\cdots-(1+n)} + \\
& n\int U^{(1,n)}_{1+n,1,2,\cdots,n} a_2^*\cdots a_n^* a_{1+n}\delta_{1+2+\cdots+n-(1+n)}\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots(1+n)} + \\
& \Bigg[\sum_{m+n=2j+1\geqslant 3}^{\infty}\ \sum_{m=2}^{j}\int\Big(U^{(m,n)}_{1,2,\cdots,m+n} a_2^*\cdots a_m^* a_{m+1}\cdots a_{m+n}\delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-(m+n)} + \\
& \frac{n}{m}U^{(m,n)}_{n+1,\cdots,n+m,1,\cdots,n} a_2^*\cdots a_n^* a_{n+1}\cdots a_{n+m}\delta_{1+\cdots+n-(n+1)-\cdots-(n+m)}\Big) + \\
& \sum_{m+n=2j\geqslant 4}^{\infty}\ \sum_{m=2}^{j-1}\int\Big(U^{(m,n)}_{1,2,\cdots,m+n} a_2^*\cdots a_m^* a_{m+1}\cdots a_{m+n}\delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-(m+n)} + \\
& \frac{n}{m}U^{(m,n)}_{n+1,\cdots,n+m,1,\cdots,n} a_2^*\cdots a_n^* a_{n+1}\cdots a_{n+m}\delta_{1+\cdots+n-(n+1)-\cdots-(n+m)}\Big)\Bigg]\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots(m+n)} + \\
& \sum_{m=2}^{\infty}\int U^{(m,m)}_{1,2,\cdots,2m} a_2^*\cdots a_m^* a_{m+1}\cdots a_{2m}\delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-2m}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots(2m)} + \\
& \sum_{m=3}^{\infty}\int U^{(m,0)}_{1,2,\cdots,m} a_2^*\cdots a_m^*\delta_{1+\cdots+m}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots m}.
\end{aligned} \tag{6}$$

2 守恒、不守恒和共振条件

如何寻求多波的共振条件,早有一套方案[6,16-17],似乎与能量、动量等守恒定律并无直接联系,但后者的巨大包容性总是必然的.单就能量和动量守恒而论,它们既能相互依存、互补,又可彼此独立、承接.无论波作用量是否守恒,它必与能量、动量之守恒存在内在的牵连.现在,通过式(1),可由式(2)、(3)、(5)和(6)证明“波之能量、动量守恒”:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

由式(1)、(2)和(4)~(6),可知

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A_{\mathrm{e}} + A_{\mathrm{n}}, \tag{9}$$

其中,A_{e} 代表“4-波和 4-波以上的等数波相互作用的偶数波”,A_{n} 则表示“3-波和 3-波以上的奇数波”或“4-波和 4-波以上的非等数波相互作用的偶数波”.从中可证明“波作用量守恒”:

$$A_{\mathrm{e}} = 0 \tag{10}$$

和“波作用量不守恒”：

$$A_n \neq 0. \tag{11}$$

式(7)~(11)是“直接和完整”的，似乎再得不出其它结果.但是，实际上却可以从中有所收获.即是：观察它们各自整个运算过程及其每一项的结构，便会辨别出它们相互的“共性”、“异性”以及“牵连性”.若再比对经典的“3-波[16]、4-波[6]、5-波[17]共振条件”，便可顺势推出一个完整的“无穷多波共振条件”序列.现在，试举例为证.

由式(7)可知

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \left[\mathrm{i}\int \omega_1^2 a_1 a_1^* \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 + A + B\right] - \left[\mathrm{i}\int \omega_1^2 a_1 a_1^* \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 + A + B\right] = A - A = 0, \tag{12}$$

其中，较之于 B，A 中的各项仅含有一个 δ，且还含有若干个角频率的组合.从 A 中，可抽取 1 个典型的 4-波等式：

$$-\frac{1}{2}\mathrm{i}\int U_{1,2,3,4}^{(2,2)} a_1^* a_2^* a_3 a_4 (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)\delta_{1+2-3-4}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1234} = 0, \tag{13}$$

此即意味着“经典海洋纯表面重力波之 4-波共振条件”[6]：

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4,\ \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4. \tag{14}$$

由式(8)，可知

$$\frac{\partial M}{\partial t} = C = 0, \tag{15}$$

类似地，从 C 中可抽取 1 个典型的 3-波等式：

$$-\mathrm{i}\int U_{1,2,3}^{(1,2)} (a_1^* a_2 a_3 - \mathrm{c.c.})(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2 - \boldsymbol{k}_3)\delta_{1-2-3}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{123} = 0, \tag{16}$$

此即意味着

$$\boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3. \tag{17}$$

此时，如果联想到色散波在“角频率和波数矢量的共振条件”上所应保持的“组合符号同一性”[4]，则可完整得出“经典海洋表面张力-重力波之 3-波共振条件”[16]：

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3,\ \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3. \tag{18}$$

从式(10)中，可抽取 1 个典型的 6-波等式：

$$-\frac{1}{3}\mathrm{i}\int U_{1,2,3,4,5,6}^{(3,3)} a_1^* a_2^* a_3^* a_4 a_5 a_6 (1+1+1-1-1-1)\delta_{1+2+3-4-5-6}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{123456} = 0, \tag{19}$$

此即意味着

$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{k}_4 + \boldsymbol{k}_5 + \boldsymbol{k}_6. \tag{20}$$

若再联系上述“组合符号同一性”法则，则得到

$$\boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 + \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{k}_4 + \boldsymbol{k}_5 + \boldsymbol{k}_6,\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_4 + \omega_5 + \omega_6. \tag{21}$$

此条件组可否称为 1 个“6-波共振条件”？这是肯定的.否则，可以推知：能量和动量均不守恒.

从式(11)中，可抽取 1 个典型的 5-波不等式：

$$-\frac{1}{2}\mathrm{i}\int U_{1,2,3,4,5}^{(2,3)} (a_1^* a_2^* a_3 a_4 a_5 - \mathrm{c.c.})(1+1-1-1-1)\delta_{1+2-3-4-5}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{12345} \neq 0, \tag{22}$$

从中，似乎一无所获.可是，这只是表象：式(22)之左端的结构特征已分明昭示出经典的 5-波共振条件[17]：

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 + \omega_5,\ \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_3 + \boldsymbol{k}_4 + \boldsymbol{k}_5, \tag{23}$$

以此,可构成"能量、动量守恒"的必要条件之一.

通过解剖上述波之"能量、动量守恒"和波之"作用量守恒与不守恒"的精细结构,不难推断出以下结论:依据"能量守恒定律",可独立、完整地得出"波-波共振条件";依据"动量守恒定律"和"组合符号同一性"法则,亦可独立得到"波-波共振条件";依据"作用量守恒和不守恒"的结构特征,并结合"能量和动量的守恒条件",则能够"相对独立"地推论出"波-波共振条件".

现在,由以上全方位的论证、解析,即可给出以下两大类"无穷多海洋表面波相互作用的共振条件"[14]:

(i) "表面张力-重力波"或"表面张力波"

$$\omega_1=\omega_2+\omega_3+\cdots+\omega_n,\ \boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_2+\boldsymbol{k}_3+\cdots+\boldsymbol{k}_n,\qquad n\geqslant 3; \tag{24}$$

(ii) 表面重力波

$$\begin{cases}\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_m=\omega_{m+1}+\omega_{m+2}+\cdots+\omega_n,\\ \boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2+\cdots+\boldsymbol{k}_m=\boldsymbol{k}_{m+1}+\boldsymbol{k}_{m+2}+\cdots+\boldsymbol{k}_n,\end{cases}\qquad 2\leqslant m\leqslant n-2. \tag{25}$$

3 无穷多波共振的 Zakharov 方程

复正则方程(1)总括了无穷多海洋表面波的相互作用,交织着"共振波"和"非共振波"的种种形态.为了强调"共振波"的演变态势,就必须从波-波作用系统(1)将其隔离出来,使其独立运作.

如何达到呢?引入从现有的复变函数 a 转化为新复变函数 b 的一个无穷多阶积分幂级数的正则变换,并依照"共振条件"(24)与(25)求解各阶展开系数,以此即可构成一个完整波的共振系统.该正则变换为

$$\begin{aligned}a_1={}&b_1+\sum_{m=2}^{\infty}\Big[\int E^{(0,m)}_{1,2,\cdots,m+1}b_2\cdots b_{m+1}\delta_{1-\cdots-(m+1)}+\\&\int F^{(m,0)}_{1,2,\cdots,m+1}b_2^*\cdots b_{m+1}^*\delta_{1+\cdots+(m+1)}\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots(m+1)}+\\&\sum_{m+n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{m+n}\int G^{(m,n)}_{1,2,\cdots,m+n+1}b_2^*\cdots b_{m+1}^*b_{m+2}\cdots b_{m+n+1}\delta_{1+\cdots+m+1-(m+2)-\cdots-(m+n+1)}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots(m+n+1)},\end{aligned} \tag{26}$$

其中,各个实系数满足对称性:

$$E^{(0,m)}_{1,2,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m+1}=E^{(0,m)}_{1,2,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,m+1}=E^{(0,m)}_{1,p,\cdots,2,\cdots,m+1,\cdots,q}, \tag{27a}$$

$$F^{(m,0)}_{1,2,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m+1}=F^{(m,0)}_{1,2,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,m+1}=F^{(m,0)}_{1,p,\cdots,2,\cdots,m+1,\cdots,q}, \tag{27b}$$

$$\begin{aligned}&G^{(m,n)}_{1,2,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m+1,m+2,\cdots,r,\cdots,s,\cdots,m+n+1}=G^{(m,n)}_{1,2,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,m+1,m+2,\cdots,s,\cdots,r,\cdots,m+n+1}=\\&\quad G^{(m,n)}_{1,p,\cdots,2,\cdots,m+1,\cdots,q,r,\cdots,m+n+1,\cdots,m+2,\cdots,s},\end{aligned} \tag{27c}$$

$$G^{(m,m)}_{1,2,\cdots,m+1,m+2,\cdots,2m+1}=G^{(m,m)}_{1,m+2,\cdots,2m+1,2,\cdots,m+1}. \tag{27d}$$

并且,式(26)须满足"Poisson 括号"正则条件:

$$\Big[\frac{\delta a_1}{\delta b_3}\frac{\delta a_2}{\delta b_3^*}-\frac{\delta a_1}{\delta b_3^*}\frac{\delta a_2}{\delta b_3}\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{k}_3=0,\ \ \Big[\frac{\delta a_1}{\delta b_3}\frac{\delta a_2^*}{\delta b_3^*}-\frac{\delta a_1}{\delta b_3^*}\frac{\delta a_2^*}{\delta b_3}\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{k}_3=\delta_{1-2}. \tag{28}$$

依据两大类"共振条件"式(24)和(25),可将 Hamilton 能量泛函 $H(a,a^*)$ 分别简约为"表面张力-重力波"或"表面张力波"之 $H_c(b,b^*)$ 和"表面重力波"之 $H_g(b,b^*)$.即为

$$H_{\mathrm{c}} = \int \boldsymbol{\omega}_1 b_1 b_1^* \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int V_{1,2,\cdots,1+n}^{(1,n)} (b_1^* b_2 \cdots b_{1+n} + \mathrm{c.c.}) \delta_{1-2-\cdots-(1+n)} \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1\cdots(1+n)}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{g}} = {} & \int \boldsymbol{\omega}_1 b_1 b_1^* \mathrm{d}\boldsymbol{k}_1 + \\ & \left[\sum_{m+n=2j+1\geqslant 5}^{\infty} \sum_{m=2}^{j} \frac{1}{m} \int W_{1,2,\cdots,m+n}^{(m,n)} (b_1^* \cdots b_m^* b_{m+1} \cdots b_{m+n} + \mathrm{c.c.}) + \right. \\ & \sum_{m+n=2j\geqslant 6}^{\infty} \sum_{m=2}^{j-1} \frac{1}{m} \int W_{1,2,\cdots,m+n}^{(m,n)} (b_1^* \cdots b_m^* b_{m+1} \cdots b_{m+n} + \\ & \left. \mathrm{c.c.}) \right] \delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-(m+n)} \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1\cdots(m+n)} + \\ & \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \int W_{1,2,\cdots,2m}^{(m,m)} b_1^* \cdots b_m^* b_{m+1} \cdots b_{2m} \delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-(2m)} \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{1\cdots(2m)}, \end{aligned} \tag{30}$$

其中,各个实系数同样满足对称性:

$$V_{1,2,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,1+n}^{(1,n)} = V_{1,2,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,1+n}^{(1,n)} = V_{1,p,\cdots,2,\cdots,1+n,\cdots,q}^{(1,n)}, \tag{31a}$$

$$\begin{aligned} & W_{1,2,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m,m+1,\cdots,r,\cdots,s,\cdots,m+n}^{(m,n)} = W_{1,2,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,m,m+1,\cdots,s,\cdots,r,\cdots,m+n}^{(m,n)} = \\ & \quad W_{q,\cdots,1,\cdots,m,\cdots,p,s,\cdots,m+1,\cdots,m+n,\cdots,r}^{(m,n)}, \end{aligned} \tag{31b}$$

$$\begin{aligned} & W_{1,2,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m,m+1,\cdots,r,\cdots,s,\cdots,2m}^{(m,m)} = W_{1,2,\cdots,q,\cdots,p,\cdots,m,m+1,\cdots,s,\cdots,r,\cdots,2m}^{(m,m)} = \\ & \quad W_{q,\cdots,m,\cdots,1,\cdots,p,r,\cdots,2m,\cdots,m+1,\cdots,s}^{(m,m)} = W_{m+1,\cdots,r,\cdots,s,\cdots,2m,1,\cdots,p,\cdots,q,\cdots,m}^{(m,m)}. \end{aligned} \tag{31c}$$

现在,依据正则变换后形式依然不变的复正则方程和式(29)~(31),即可得到两大类"无穷多海洋表面波共振的 Zakharov 方程":

(Ⅰ)"表面张力-重力波"或"表面张力波"

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial b_1}{\partial t} = \frac{\delta H_{\mathrm{c}}}{\delta b_1^*} = {} & \boldsymbol{\omega}_1 b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\int V_{1,2,\cdots,1+n}^{(1,n)} b_2 \cdots b_{1+n} \delta_{1-2-\cdots-(1+n)} + \right. \\ & \left. n \int V_{1+n,1,\cdots,n}^{(1,n)} a_2^* \cdots a_n^* a_{1+n} \delta_{1+2+\cdots+n-(1+n)} \right] \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots(1+n)}; \end{aligned} \tag{32}$$

(Ⅱ)表面重力波

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\frac{\partial b_1}{\partial t} = \frac{\delta H_{\mathrm{g}}}{\delta b_1^*} = {} & \boldsymbol{\omega}_1 b_1 + \\ & \left[\sum_{m+n=2j+1\geqslant 5}^{\infty} \sum_{m=2}^{j} \int \left(W_{1,2,\cdots,m+n}^{(m,n)} b_2^* \cdots b_m^* b_{m+1} \cdots b_{m+n} \delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-(m+n)} + \right. \right. \\ & \left. \frac{n}{m} W_{n+1,\cdots,n+m,1,\cdots,n}^{(m,n)} b_2^* \cdots b_n^* b_{n+1} \cdots b_{n+m} \delta_{1+\cdots+n-(n+1)-\cdots-(n+m)} \right) + \\ & \sum_{m+n=2j\geqslant 6}^{\infty} \sum_{m=2}^{j-1} \int \left(W_{1,2,\cdots,m+n}^{(m,n)} b_2^* \cdots b_m^* b_{m+1} \cdots b_{m+n} \delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-(m+n)} + \right. \\ & \left. \left. \frac{n}{m} W_{n+1,\cdots,n+m,1,\cdots,n}^{(m,n)} b_2^* \cdots b_n^* b_{n+1} \cdots b_{n+m} \delta_{1+\cdots+n-(n+1)-\cdots-(n+m)} \right) \right] \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots(m+n)} + \\ & \sum_{m=2}^{\infty} \int W_{1,2,\cdots,2m}^{(m,m)} b_2^* \cdots b_m^* b_{m+1} \cdots b_{2m} \delta_{1+\cdots+m-(m+1)-\cdots-(2m)} \mathrm{d}\boldsymbol{k}_{2\cdots(2m)}. \end{aligned} \tag{33}$$

式(33)即涵盖了经典的"表面重力波之 4-波共振的 Zakharov 方程"[8]:

$$\mathrm{i}\frac{\partial b_1}{\partial t}=\omega_1 b_1+\int W^{(2,2)}_{1,2,3,4}b_2^* b_3 b_4\delta_{1+2-3-4}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_{234}. \tag{34}$$

上述两大类 Zakharov 方程中的各个系数当为“已知”;溯流求源,这就有赖于初始的 H 之各展开系数的“确定”;归根结底,其取决于经典的海洋表面波的多种典型结构函数:无论是深水波,还是有限水深波,抑或是浅水波.

4 结　　论

无论从理论自身发展的需求上来看,还是从对现实畸形波的认识和预报上来说, 经典的 4-波共振 Zakharov 方程[8]及其后继的一系列多波共振的 Zakharov-型方程[11-13]都需要进一步变革.基于此,本文一改传统求解共振条件的作法, 依据“对称性决定相互作用”法则,直接从三大基本守恒定律出发而“各自独立又相互验证”地得出了“无穷多波的共振条件(24)和(25)”,以此最终相应地建立了两大类“无穷多海洋表面波共振的 Zakharov 方程(32)和(33)”.据此,可将目前最具海洋广泛应用性、4-波共振的海洋波湍流 Hasselmann 方程理论[7,12-13],推广至最为一般的无穷多波共振情形,从而有效推进具有极大普适性的波湍流[15,18-19]理论的发展.

参考文献(References):

[1] Dirac P A M. *The Principles of Quantum Mechanics*[M]. Oxford: Oxford University Press, 1958.

[2] Weinberg S. *Cosmology*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2008.

[3] 严波, 刘小会, 赵莉, 周林抒. 存在内共振的覆冰四分裂导线的非线性舞动[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(1): 39-49.(YAN Bo, LIU Xiao-hui, ZHAO Li, ZHOU Lin-shu. Nonlinear galloping of iced quad-bundle conductors with internal resonances[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 39-49.(in Chinese))

[4] Kartashova E. *Nonlinear Resonance Analysis*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.

[5] Dysthe K, Krogstad H E, Müller P. Oceanic rogue waves[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2008, **40**: 287-310.

[6] Phillips O M. On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude—part 1: the elementary interactions[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, **9**: 193-217.

[7] Hasselmann K. On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum—part 1: general theory[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, **12**: 481-500.

[8] Zakharov V E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid[J]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1968, **9**(2): 190-194.

[9] Dyachenko A I, Lvov Y V. On the Hasselmann and Zakharov approaches to the kinetic equations in gravity waves[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1995, **25**(12): 3237-3238.

[10] 杨振宁. 杨振宁文集[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1998.(YANG Chen-ning. *Chen Ning Yang's Collection*[M]. Shanghai: The East China Normal University Publishing Press, 1998.(in Chinese))

[11] Stiassnie M, Shemer L. On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1984, **143**: 47-67.

[12] Krasitskii V P. On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly nonlinear surface

waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, **272**: 1-20.

[13] Zakharov V. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite depth fluid[J]. *Eur J Mech B/Fluids*, 1999, **18**(3): 327-344.

[14] 黄虎. 无穷多海洋表面波相互作用的能量守恒和共振条件[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(5): 565-571.(HUANG Hu. Energy conservation and resonance conditions for interactions of an infinite number of ocean surface waves[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(5): 565-571.(in Chinese))

[15] Zakharov V E, L'vov V S, Falkovich G. *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence*[M]. Berlin: Springer, 1992.

[16] McGoldrick L F. Resonant interactions among capillary-gravity waves[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1965, **21**: 305-331.

[17] McLean J W. Instabilities of finite amplitude gravity waves on water of finite depth[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1982, **114**: 331-341.

[18] Nazarenko S. *Wave Turbulence*[M]. Berlin: Springer, 2011.

[19] Newell A C, Rumpf B. Wave turbulence[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2011, **43**: 59-78.

Zakharov-Type Equations for Resonances of an Infinite Number of Ocean Surface Waves

HUANG Hu

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics*;
Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering,
Shanghai University, *Shanghai* 200072, *P.R.China*)

Abstract: Based on the fundamental wave conservation laws of energy, momentum and action, together with the law of symmetry deciding interactions and the Hamilton structure, 2 main categories of resonance conditions for an infinite number of wave interactions and the corresponding 2 major Zakharov-type equations for an infinite number of wave resonances were derived by means of the complex Hamiltonian canonical equation for ocean surface waves, the canonical transformation and the Poisson bracket conditions. The presented Zakharov-type equations, in connection with the classical conditions for the 3-, 4- and 5-wave resonances, therefore build an indispensable, advanced and complete theoretical framework for the most fundamental and universal ocean wave turbulence.

Key words: Zakharov equation; resonance condition; an infinite number of ocean surface waves; conservation of energy, momentum and action

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11172157)