

黏弹性屈曲梁非线性内共振稳态周期响应*

熊柳杨¹, 张国策¹, 丁虎¹, 陈立群^{1,2,3}

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 上海大学 力学系, 上海 200444;

3. 上海市力学在能源工程中的应用重点实验室, 上海 200072)

(我刊编委陈立群来稿)

摘要: 研究了内共振下简支边界屈曲黏弹性梁受迫振动稳态周期幅频响应.考虑 Kelvin 黏弹性本构关系,并通过对非平凡平衡位形做坐标变换,建立屈曲梁横向振动的非线性偏微分-积分模型.基于对控制方程的 Galerkin 截断,得到多维非线性常微分方程组.在前两阶模态内共振存在的条件下,运用多尺度法分析截断后的控制方程,利用可解性条件消除长期项,获得一阶主共振下的幅值与相角方程.通过数值算例以展示系统稳态幅频响应关系以及失稳区域,从而聚焦系统共振中存在的非线性现象,如跳跃现象、滞后现象,并讨论了双跳跃现象随轴向荷载的演化.通过直接数值方法处理截断方程,数值验证近似解析解,计算结果表明多尺度法具有较高精度.

关键词: 屈曲梁; 黏弹性; 内共振; 多尺度方法; 稳定性

中图分类号: O322; O345 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.11.002

引言

屈曲梁模型在工程结构设计中起着重要的作用.初始屈曲的大变形使得结构中的几何非线性将成为不可忽略的因素,由于复杂的非线性特性,屈曲梁研究一直广受研究者关注^[1-3].

Lacarbonara 等^[4]研究了主共振下屈曲梁的稳态幅频响应,发现使用单模态近似得到的响应曲线不同于实验结果.Emam 和 Nayfeh^[5]通过 Galerkin 截断研究了主共振下的屈曲梁,得到使用一阶截断会导致误差.在特定参数下,系统如果存在固有频率间的可公度关系,会引起非线性模态间的强烈耦合.Nayfeh 和 Balachandran^[6]指出屈曲梁系统由于平方项的存在可能会导致内共振.针对固支初始屈曲梁,Afaneh 和 Ibrahim^[7]发现了 1:1 内共振下一阶模态和二阶模态间的能量转移.Chin 等^[8]分析了具有 2:1 内共振屈曲梁主参数共振更高阶模态的响应,发现了响应曲线的双跳跃现象和饱和现象.另外,在实际工程应用中的绝大多数材料都具有黏弹性,陈宁^[9]对屈曲非线性黏弹性梁动力学行为进行了研究,结果表明屈曲黏弹性系统的动力学行为和弹性梁有明显区别,因此黏弹性作为工程中阻尼因素建模的一种途径不能被忽略.

* 收稿日期: 2014-05-23; 修订日期: 2014-08-29

基金项目: 国家自然科学基金(重点项目)(11232009);国家自然科学基金(11372171;11422214);上海市教委科研创新项目(12YZ028)

作者简介: 熊柳杨(1991—),男,江西宜春人,硕士生(E-mail: xly0831@126.com);

丁虎(1978—),男,安徽明光人,研究员,博士(通讯作者. E-mail: dinghu3@shu.edu.cn).

Xiong 等^[10]通过二阶 Galerkin 截断研究了黏弹性屈曲梁内共振时的周期响应和不稳定点的混沌动力学行为。

本文研究主共振以及内共振条件下屈曲黏弹性梁在初始平衡位形附近的非线性振动,运用无穷阶 Galerkin 截断方法结合多尺度近似解析方法,获得屈曲梁各阶模态的稳态幅频响应,并着重考察滞后非线性现象以及双跳跃现象的形成和消失。基于数值求解截断控制方程,定量和定性地验证多尺度分析的结果。

1 振动控制方程

采用 Euler-Bernoulli 梁模型,考虑经典 Kelvin 黏弹性本构关系,设梁的长度为 L ,单位长度质量和弹性模量分别为 m 和 E , Λ 为梁的黏弹性系数,截面积和惯性矩为 A 和 I , X 和 T 表示中性轴坐标和时间,作用在梁上的分布载荷为 $F(X)\cos(\Omega T)$,两端轴向压力为 P ,梁的横向和轴向位移分别为 V 和 u 。厚度为 dX 的微元体的受力情况如图 1 所示,其中 F_s , F_N 和 M 分别表示剪力、轴力和弯矩,箭头指向为正方向。

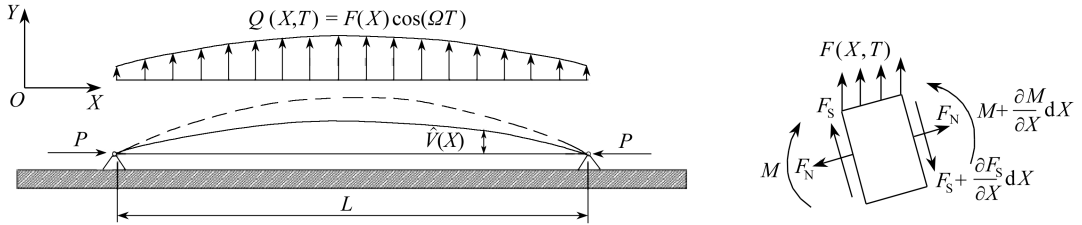


图 1 简谐激励下屈曲梁示意图

Fig.1 The model of a buckled beam with external harmonic excitation

Y 方向的动力学方程为

$$F_s - \left(F_s + \frac{\partial F_s}{\partial X} dX \right) + F(X) \cos(\Omega T) dX - F_N \theta + \left(F_N \theta + \frac{\partial(F_N \theta)}{\partial X} dX \right) = m dX \frac{\partial^2 V}{\partial T^2}. \quad (1)$$

以右截面上任意点为矩心列出:

$$\left(M + \frac{\partial M}{\partial X} dX \right) - M - F_s dX - F(X) \cos(\Omega T) \frac{(dX)^2}{2} = 0. \quad (2)$$

在挠度较大的条件下,考虑计及非线性效应的几何方程,假设振动变形引起的应力沿着梁的轴向变化很小,将轴力取作沿着梁在两端支撑之间长度上的平均值

$$F_N = \frac{1}{L} \int_0^L \left(E + \Lambda \frac{\partial}{\partial T} \right) A \left[u_{,x} + \frac{1}{2} V_{,x}^2 \right] = -P + \frac{EA}{2L} \int_0^L V_{,x}^2 dX + \frac{\Lambda A}{L} \int_0^L V_{,x} V_{,xt} dX. \quad (3)$$

引入无量纲参数

$$\begin{cases} v = \frac{V}{L}, x = \frac{X}{L}, t = \frac{T}{L} \sqrt{\frac{P}{m}}, f(x) = \frac{L}{P} F(x), \\ \omega = \Omega L \sqrt{\frac{m}{P}}, \alpha = \frac{\Lambda A}{L^3 \sqrt{mP}}, k_1^2 = \frac{EA}{P}, k_f^2 = \frac{EI}{PL^2}. \end{cases} \quad (4)$$

根据式(1)、(2)和(3)即可得无量纲化的振动控制方程:

$$v_{,tt} + v_{,xx} + k_f^2 v_{,xxxx} + \alpha v_{,xxxxt} =$$

$$f(x) \cos(\omega t) + \frac{k_1^2}{2} v_{,xx} \int_0^1 v_{,x}^2 dx + \frac{\alpha k_1^2}{k_f^2} v_{,xx} \int_0^1 v_{,x} v_{,xt} dx, \quad (5)$$

其中下标“,”表示对后面的变量取偏微分,此时,简支边界梁无量纲形式的边界条件为

$$v(0, t) = v(1, t) = 0, \quad v_{,xx}(0, t) = v_{,xx}(1, t) = 0. \quad (6)$$

梁处于屈曲状态时,只有一阶屈曲模态稳定^[11].可设此时简支梁静屈曲位形具有形式

$$\hat{v}(x) = A_s \sin(\pi x). \quad (7)$$

略去式(5)中与时间相关项,将式(7)代入计算即可得到

$$A_s = \frac{2}{k_1 \pi} \sqrt{1 - k_f^2 \pi^2}. \quad (8)$$

式(5)经过坐标变换 $v(x, t) \leftrightarrow \hat{v}(x) + v(x, t)$, 即得以屈曲位形为平衡位形的无量纲控制方程:

$$\begin{aligned} v_{,tt} + \pi^2 k_f^2 v_{,xx} + k_f^2 v_{,xxxx} + \alpha v_{,xxxxt} = \\ f(x) \cos(\omega t) - \frac{\alpha k_1^2}{k_f^2} [v_{,xx} - A_s \pi^2 \sin(\pi x)] \int_0^1 [v + A_s \sin(\pi x)] v_{,xt} dx + \\ \frac{k_1^2}{2} [v_{,xx} - A_s \pi^2 \sin(\pi x)] \int_0^1 [v_{,x}^2 + 2\pi^2 A_s v \sin(\pi x)] dx. \end{aligned} \quad (9)$$

2 Galerkin 截断

对于屈曲黏弹性梁的控制方程(9),本文采用 Galerkin 截断方法,将位移 v 分离成关于空间 x 和 t 的两个函数,并设 Galerkin 展开式为^[12]

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n(t) \phi_n(x), \quad (10)$$

式中, $q_n(t)$ 为广义位移函数, $\phi_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 为试函数,选取为简支边界条件的模态函数 $\phi_n(x) = \sin(n\pi x)$.将式(10)代入控制方程(9)后,左右两端同时乘以权函数 $\sin(n\pi x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),并按位移在区间 $[0, 1]$ 上积分可得无穷个独立的常微分方程:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \alpha \pi^4 \dot{q}_1 = 2 \cos(\omega t) \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx - \frac{S_{\text{INT}}}{4} k_1^2 \pi^4 (A_s + q_1), \\ \ddot{q}_n + \alpha \pi^4 n^4 \dot{q}_n + \pi^4 k_f^2 (n^4 - n^2) q_n = \\ 2 \cos(\omega t) \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx - \frac{S_{\text{INT}}}{4} n^2 k_1^2 \pi^4 q_n, \end{cases} \quad (11)$$

式中

$$S_{\text{INT}} = 2A_s q_1(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q_k^2(t) + \frac{2\alpha}{k_f^2} \left[A_s \dot{q}_1(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 q_k(t) \dot{q}_k(t) \right]. \quad (12)$$

3 多尺度分析

引入快慢时间尺度 $T_0 = t$ 和 $T_1 = \varepsilon t$, 运用多尺度法寻求如下形式近似解:

$$q_n(T_0, T_1) = \varepsilon q_{n1}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 q_{n2}(T_0, T_1) + \dots, \quad (13)$$

其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, ε 是与振幅同量级的无量纲小参数.本文研究在激励 $f(x) = b \sin(2\pi x)$ 下的弱受迫振动,把外激励幅值重刻度为 $f \leftrightarrow \varepsilon^2 f$, 为了使黏弹性阻尼的效应与非线性效应出现在同一摄动方程中,引入 $\alpha \leftrightarrow \varepsilon \alpha$.将式(13)代入式(11)中,使 ε 同次幂系数相等得

ε^1 阶

$$\begin{cases} q_{11, T_0 T_0} + \frac{1}{2} k_1^2 \pi^4 A_S^2 q_{11} = 0, \\ q_{n1, T_0 T_0} + (n^4 - n^2) \pi^4 k_f^2 q_{n1} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

 ε^2 阶

$$\begin{cases} q_{12, T_0 T_0} + \frac{1}{2} k_1^2 \pi^4 A_S^2 q_{12} = 2 \cos(\omega t) \int_0^1 f(x) \sin(\pi x) dx - \\ k_1^2 \pi^4 A_S \left(\frac{3}{4} q_{11}^2 + q_{21}^2 + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k^2}{4} q_{k1}^2 \right) - \alpha \pi^4 \left(1 + \frac{k_1^2 A_S^2}{2k_f^2} \right) q_{11, T_0} - 2q_{11, T_0 T_1}, \\ q_{n2, T_0 T_0} + (n^4 - n^2) \pi^4 k_f^2 q_{n2} = \\ 2 \cos(\omega t) \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx - \frac{n^2}{2} k_1^2 \pi^4 A_S q_{11} q_{n1} - n^4 \alpha \pi^4 q_{n1, T_0} - 2q_{n1, T_0 T_1}. \end{cases} \quad (15)$$

前两阶线性未扰系统固有频率可通过求解微分方程式(14)的特征值确定,如表1所示.给定物理参数下,固有频率只随轴向荷载 P 变化.因此,屈曲梁提供了这样一种机构,可以通过方便地调节两端轴力来实现内共振.

表1 系统前两阶固有频率

Table 1 The 1st 2 natural frequencies of the buckled beam

	$k_f \leq 0.052\ 33$	$0.052\ 33 < k_f < 0.123\ 01$	$k_f \geq 0.123\ 01$
ω_1	$2\sqrt{3} \pi^2 k_f$	$2\sqrt{3} \pi^2 k_f$	$\pi \sqrt{2 - 2k_f^2 \pi^2}$
ω_2	$6\sqrt{2} \pi^2 k_f$	$\pi \sqrt{2 - 2k_f^2 \pi^2}$	$2\sqrt{3} \pi^2 k_f$

令 $\omega_2 = 2\omega_1$, 可得 2:1 内共振条件为 $k_f = 0.063\ 66$ 或 $k_f = 0.201\ 32$. 此时, 高阶固有频率为

$$\omega_n = \sqrt{(n^4 - n^2)} \pi^2 k_f \quad (n = 3, 4, \dots). \quad (16)$$

当 $k_f = 0.063\ 66$ 时, 齐次微分方程(14)的解可以表示成如下形式:

$$\begin{cases} q_{11}(T_0, T_1) = Y_1(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + cc, \\ q_{21}(T_0, T_1) = Y_2(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + cc, \\ q_{n1}(T_0, T_1) = Y_n(T_1) e^{i\omega_n T_0} + cc \quad (n = 3, 4, \dots), \end{cases} \quad (17)$$

cc 代表前面的共轭项. 将式(17)代入到式(15)中可得

$$\begin{cases} q_{12, T_0 T_0} + \omega_2^2 q_{12} = -k_1^2 \pi^4 A_S Y_2^2 e^{2i\omega_1 T_0} - \\ \alpha \pi^4 \left(1 + \frac{k_1^2 A_S^2}{2k_f^2} \right) i\omega_2 Y_1 e^{i\omega_2 T_0} - 2i\omega_2 Y_1' e^{i\omega_2 T_0} + cc + F_{NST}, \\ q_{22, T_0 T_0} + \omega_1^2 q_{22} = \frac{b}{2} e^{i\omega T_0} - 2k_1^2 \pi^4 A_S Y_1 \bar{Y}_2 e^{i(\omega_2 - \omega_1) T_0} - \\ 16\alpha \pi^4 i\omega_1 Y_2 e^{i\omega_1 T_0} - 2i\omega_1 Y_2' e^{i\omega_1 T_0} + cc + F_{NST}, \\ q_{n2, T_0 T_0} + \omega_n^2 q_{n2} = -\frac{n^2}{2} k_1^2 \pi^4 A_S Y_1 \bar{Y}_n e^{i(\omega_2 - \omega_n) T_0} - \\ n^4 \alpha \pi^4 i\omega_n Y_n e^{i\omega_n T_0} - 2i\omega_n Y_n' e^{i\omega_n T_0} + cc + F_{NST} \quad (n = 3, 4, \dots), \end{cases} \quad (18)$$

其中 cc 代表前面的共轭项, F_{NST} 代表不会给解带来久期项的所有项. 此时由于存在 2:1 内共振的耦合关系, 非线性项产生久期项, 对可解性条件产生影响.

而当 $k_f = 0.201\ 32$ 时,可以得到此时内共振不会使得任何一项非线性项成为久期项,对可解性条件无影响,因此本文只考虑 $k_f = 0.063\ 66, \omega_2 = 2\omega_1$ 条件下的 2:1 内共振.

此时考察弱受迫系统发生一阶主共振时的振动特性.引入解谐参数 σ 以及 σ_0 , 分别表示一阶主共振下 ω 和 ω_1 以及 ω_2 和 $2\omega_1$ 的接近程度:

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_0, \quad \omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma. \quad (19)$$

将 $Y_n(T_1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 表示为极坐标形式:

$$Y_n(T_1) = \frac{1}{2} a_n(T_1) e^{i\gamma_n(T_1)}. \quad (20)$$

将式(19)、(20)代入式(18)中,使等式两边 $\exp(i\omega_n T_0)$ 系数相等得到可解性条件,并分离实部虚部得

$$\begin{cases} a_1' = \frac{1}{4} \omega_2^{-1} a_2^2 k_1^2 \pi^4 A_S \sin(2\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2} a_1 \alpha \pi^4 \left(1 + \frac{k_1^2 A_S^2}{2k_f^2}\right), \\ a_2' = \frac{b}{2} \omega_1^{-1} \sin \theta_2 - \frac{1}{2} \omega_1^{-1} a_1 a_2 k_1^2 \pi^4 A_S \sin(2\theta_2 - \theta_1) - 8\alpha \pi^4 a_2, \\ a_1 \theta_1' = a_1 (2\sigma - \sigma_0) - \frac{1}{4} \omega_2^{-1} a_2^2 k_1^2 \pi^4 A_S \cos(2\theta_2 - \theta_1), \\ a_2 \theta_2' = \frac{b}{2} \omega_1^{-1} \cos \theta_2 - \frac{1}{2} \omega_1^{-1} a_1 a_2 k_1^2 \pi^4 A_S \cos(2\theta_2 - \theta_1) + a_2 \sigma, \\ a_n' = -\frac{1}{2} n^4 \alpha \pi^4 a_n, \quad a_n \theta_n' = 0 \quad (n = 3, 4, \dots), \end{cases} \quad (21)$$

式中 $\theta_1 = 2\sigma T_1 - \sigma_0 T_1 - \gamma_1, \theta_2 = \sigma T_1 - \gamma_2, \theta_n = \gamma_n$. 对于稳态响应,幅值 a_n 和相角 θ_n 为常数,令式(21)左端为 0,即可得前两阶模态的频率响应方程.此时未由外激励直接激发的高阶模态,不具有前两阶模态间那样的内共振耦合关系,不能相互激发,故稳态响应为 0.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{k_1 \pi^2 a_2^2}{\sqrt{2\alpha^2 \pi^8 \left(1 + \frac{k_1^2 A_S^2}{2k_f^2}\right)^2 + 8(2\sigma - \sigma_0)^2}}, \quad a_n = 0 \quad (n = 3, 4, \dots), \quad (22) \\ \frac{b^2}{4} &= \left\{ \frac{\omega_2 \alpha k_1^2 \pi^8 \left(1 + \frac{k_1^2 A_S^2}{2k_f^2}\right) a_2^3}{2\alpha^2 \pi^8 \left(1 + \frac{k_1^2 A_S^2}{2k_f^2}\right)^2 + 8(2\sigma - \sigma_0)^2} + 8\alpha \pi^4 \omega_1 a_2 \right\}^2 + \\ &\quad \left\{ \frac{\omega_2 k_1^2 \pi^4 (2\sigma - \sigma_0) a_2^3}{\alpha^2 \pi^8 \left(1 + \frac{k_1^2 A_S^2}{2k_f^2}\right)^2 + 4(2\sigma - \sigma_0)^2} - \omega_1 \sigma a_2 \right\}^2. \quad (23) \end{aligned}$$

幅值与相角方程(21)右端 Jacobi 矩阵的特征值的实部是否有正值出现决定了模态解的稳定性,可以通过 Routh-Hurwitz 判据对其进行判断,求解出稳定边界.

4 具体算例

本文为了将来实验仿真的可行性,选取一套可实现的物理参数.以超硬铝材料圆形截面梁为例,材料的弹性模量 $E = 74\ \text{GPa}$,梁长度 $L = 0.1\ \text{m}$,截面半径取为 $0.001\ \text{m}$,轴向荷载为 $P =$

1.434 04 kN.此时无量纲参数选取 $k_f = 0.063\ 66$, $k_1 = 12.732\ 40$, $\alpha = 0.000\ 05$, $b = 0.006$.前两阶固有频率分别为 $\omega_1 = 2.176\ 56$, $\omega_2 = 4.353\ 12$.

图2给出了屈曲梁一阶主共振的幅频响应及稳定边界,解谐参数 σ 作为控制参数,实线代表失稳区域的边界,上三角形点代表稳态幅频响应.可以看出一阶主共振幅频响应既有软特性又有硬特性.在 $\sigma = 0$ 左右同时出现跳跃,呈双跳跃现象.响应曲线的多值区域存在不稳定的模态解,并且对于系统参数的某些组合,响应曲线中心附近区域不存在稳定的稳态解.

如果以外激励幅值 b 为控制参数,可以得出如图3所示的一阶主共振幅值响应.实线和虚线分别表示稳定和不稳定的响应曲线.图3表明正好发生一阶主共振时,外激励幅值没有出现跳跃区间.而当解谐参数 $\sigma \neq 0$ 时,外激励幅值之间出现跳跃现象,也称之为滞后现象.

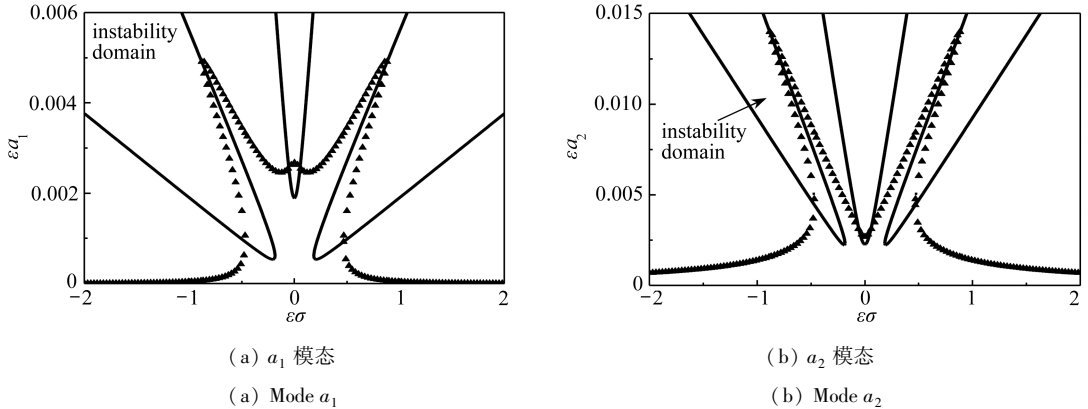


图2 一阶主共振幅频响应和稳定边界

Fig.2 Amplitude-frequency responses and stability boundaries of the system subjected to the first principal resonance

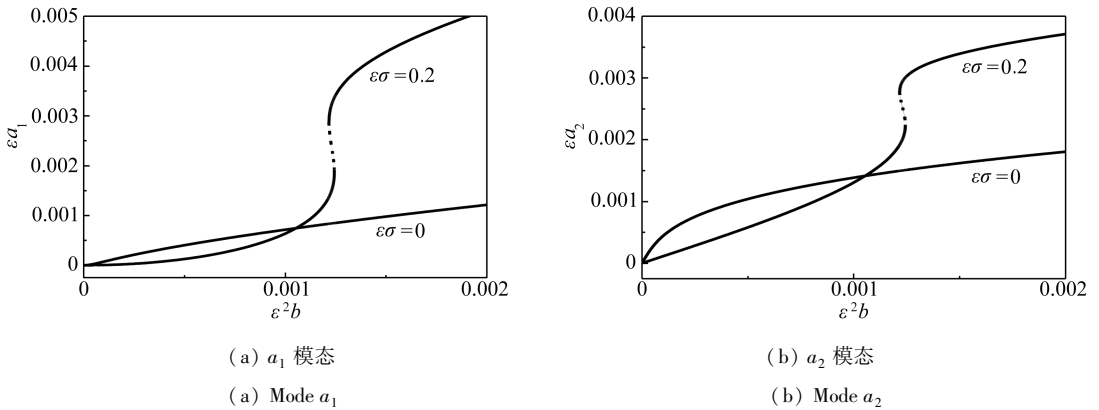


图3 滞后现象 (a_1 和 a_2 是 b 的函数)

Fig.3 Hysteresis phenomenon (amplitude response as a function of amplitude of the external excitation b)

5 双跳跃现象演化及数值验证

屈曲梁系统前两阶固有频率随轴力发生变化,通过改变轴向荷载可以使得系统内共振不完全调谐,实现对内共振下主共振产生双跳跃现象进行机理上的探讨.

给定 $\alpha = 0.000\ 05$, $b = 0.006$,考察不同轴向荷载下 a_2 模态幅频响应曲线的变化.并且为了验证多尺度方法的有效性,利用4阶 Runge-Kutta 方法计算截断方程式(11),将其结果同近似解析解作对比.实线和虚线分别代表稳定和不稳定的近似解析解,圆点表示数值解(见图4).

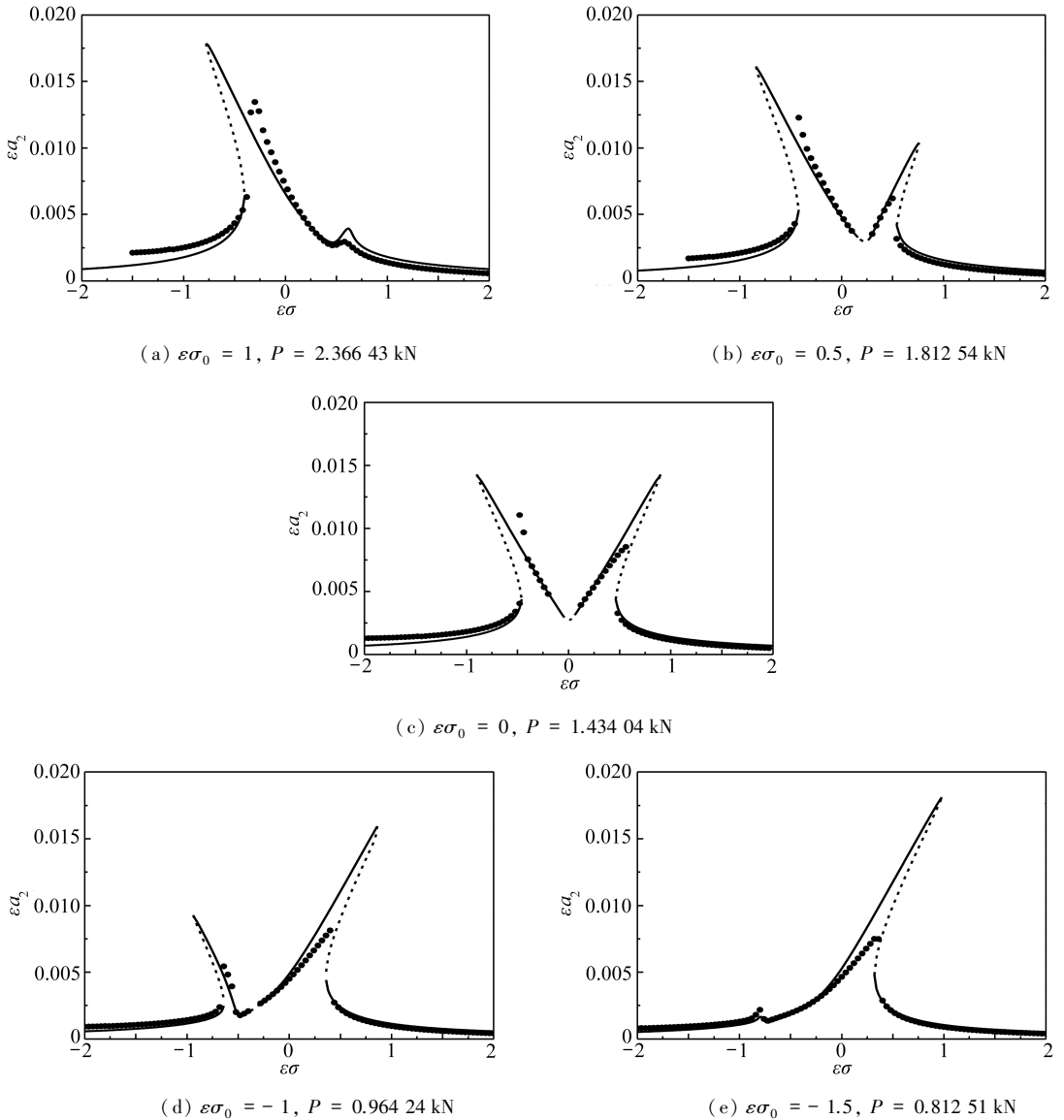


图4 不同轴向荷载下一阶主共振频率响应曲线

Fig.4 Frequency-amplitude curves of the buckled beam under different axial loads

当 $P = 2.366\ 43\ \text{kN}$ 时, a_2 模态的频率响应曲线弯向左边, 体现出软特性. 此时响应曲线右侧有一个小峰值. 当 $P = 1.812\ 54\ \text{kN}$ 时, 右侧的小峰值明显增大并且向右弯曲, 出现了双跳跃现象, 同时在中心下倾处, 存在不稳定的模态解. 当 $P = 1.434\ 04\ \text{kN}$ 时, $\varepsilon\sigma_0 = 0$, 即处于内共振完全调谐状态, 此时左右两侧峰值相等. 当轴向荷载继续减少, 解谐参数 σ_0 变为负值. $P = 0.964\ 24\ \text{kN}$ 时, a_2 模态响应曲线此时左侧峰值小于右侧峰值. 当 $P = 0.812\ 51\ \text{kN}$ 时, 左侧波峰明显退化降低, 右侧峰值增大, 此时响应曲线则只体现出了硬特性. 值得注意的是, 轴向压力 P 取为 $2.366\ 43\ \text{kN}$ 时, 梁的轴向应力为 $\sigma_{\max} = 753.258\ 06\ \text{MPa}$ 已经超过了超硬铝梁的屈服极限, 实际中不存在该情况, 这里只为讨论说明双跳跃现象的演化过程而引入.

由图可知, 数值方法所得到的结果与近似解析结果基本吻合, 跳跃现象定性上得到证实. 验证了屈曲黏弹性梁横向弱受迫振动的基本特征以及多尺度方法的有效性.

6 结 论

本文推导了黏弹性屈曲梁横向扰动控制方程,并基于无穷阶模态的 Galerkin 截断方法结合多尺度摄动方法研究了梁横向弱受迫非线性振动的稳态响应.研究发现,适当的轴向荷载会使得系统前两阶模态存在内共振.在内共振条件下,得到了系统发生第一阶模态主共振时的幅频响应关系.数值求解截断控制方程定量和定性验证了近似解析结果,得到以下结论:

1) 不参与内共振和主共振的高阶模态对系统的响应无影响.

2) 观察到响应曲线的双跳跃现象.在微调谐情况下,外激励幅值的改变会导致模态幅值的跳跃,出现滞后现象.

3) 当远离内共振时,系统只表现出软特性或硬特性.当改变轴向荷载时,幅频响应曲线不断演化,最终在完全内共振下产生对称双跳跃现象.内共振耦合拓宽了频率响应频带.

参考文献(References):

- [1] 叶敏, 陈予恕. 弹性屈曲梁在参数激励下的倍周期分叉[J]. 固体力学学报, 1998, **19**(4): 361-364.(YE Min, CHEN Yu-shu. Period doubling bifurcation in elastic buckled beam under parametric excitation[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1998, **19**(4): 361-364.(in Chinese))
- [2] 朱媛媛, 胡育佳, 程昌钧. Euler 型梁-柱结构的非线性稳定性和后屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(6): 674-682.(ZHU Yuan-yuan, HU Yu-jia, CHENG Chang-jun. Analysis of nonlinear stability and post buckling for the Euler-type beam-column structure[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(6): 674-682.(in Chinese))
- [3] 王昊, 陈立群. 强横向激励作用下屈曲梁的稳态幅频响应特性[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(2): 181-187.(WANG Hao, CHEN Li-qun. Steady-state amplitude-frequency characteristics of axially buckled beams under strong transverse excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(2): 181-187.(in Chinese))
- [4] Lacarbonara W, Nayfeh A H, Kreider W. Experimental validation of reduction methods for nonlinear vibrations of distributed-parameter systems: analysis of a buckled beam[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, **17**(2): 95-117.
- [5] Emam S A, Nayfeh A H. On the nonlinear dynamics of a buckled beam subjected to a primary-resonance excitation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **35**(1): 1-17.
- [6] Nayfeh A H, Balachandran B. Modal interactions in dynamical and structural systems[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1989, **42**(11): 175-201.
- [7] Afaneh A, Ibrahim R. Nonlinear response of an initially buckled beam with 1:1 internal resonance to sinusoidal excitation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1993, **4**(6): 547-571.
- [8] Chin C M, Nayfeh A H, Lacarbonara W. Two-to-one internal resonances in parametrically excited buckled beams[C]//*Proceedings of the AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 1997: 213-223.
- [9] 陈宁. 屈曲非线性黏弹性梁的动力学行为研究[J]. 力学学报, 2002, **34**(增刊): 229-233.(CHEN Ning. Dynamical behaviors of nonlinear viscoelastic buckled beams[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, **34**(S): 229-233.(in Chinese))
- [10] Xiong L Y, Zhang G C, Ding H, Chen L Q. Nonlinear forced vibration of a viscoelastic buckled beam with 2:1 internal resonance[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, **2014**. Article ID 906324.
- [11] Nayfeh A H, Emam S A. Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams

- [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2008, **54**(4): 395-408.
- [12] Chen L Q, Zhang Y L, Zhang G C, Ding H. Evolution of the double-jumping in pipes conveying fluid flowing at the supercritical speed[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, **58**: 11-21.

Steady-State Periodic Responses of a Viscoelastic Buckled Beam in Nonlinear Internal Resonance

XIONG Liu-yang¹, ZHANG Guo-ce¹, DING Hu¹, CHEN Li-qun^{1,2,3}

(1. *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics*,

Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China;

2. *Department of Mechanics, Shanghai University*,

Shanghai 200444, P.R.China;

3. *Shanghai Key Laboratory of Mechanics in Energy Engineering*,

Shanghai 200072, P.R.China)

(Contributed by CHEN Li-qun, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Nonlinear vibration of a hinged-hinged viscoelastic buckled beam subjected to primary resonance in the presence of internal resonance was investigated. The governing integro-partial differential equation was derived via introduction of coordinate transform for the non-trivial equilibrium configuration, with the viscoelastic constitutive relation taken into account. Based on the Galerkin method, the governing equation was truncated to a set of infinite ordinary differential equations and the condition for internal resonance was obtained. The multiple scales method was applied to derive the modulation-phase equations. Steady-state periodic solutions to the system as well as their stability were determined. The numerical examples were focused on the nonlinear phenomena, such as double-jump and hysteresis. The generation and vanishing of a double-jumping phenomenon on the amplitude-frequency curves were discussed in detail. The Runge-Kutta method was developed to verify the accuracy of results from the multiple scales method.

Key words: buckled beam; viscoelasticity; internal resonance; multiple scales method; stability

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(Key Program) (11232009); The National Natural Science Foundation of China (11372171;11422214)