

# 弯曲薄板的修正的功的互等定理及其应用\*

付宝连

(燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

**摘要:** 研究发现,弯曲薄板 Betti(贝蒂)的功的互等定理命题中的两个主要前提,“一个弯曲薄板”和“两组力的作用”是相互矛盾的,因为两组力的任意一组力都可以改变“一个弯曲薄板”成为另外一个弯曲薄板.这一矛盾导致弯曲薄板 Betti 的功的互等定理是一个具有逻辑错误的定理.基于对这一矛盾的分析,提出了修正的功的互等定理,在该定理中,给出了弯曲薄板的功的互等定理的正确命题,同时,该修正的功的互等定理为功的互等法提供了理论基础,功的互等法是结构分析的一个新颖的和强有力的方法.

**关键词:** Betti 的功的互等定理; 修正的功的互等定理; 一个弯曲薄板; 两组力的作用

**中图分类号:** TU311      **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.11.003

## 引 言

功的互等定理一直被认为是固体力学中的一个经典性的能量原理. Maxwell(麦克斯维尔)首先在文献[1]中计算了一个位移互等定理的具体算例.其次, Betti 在文献[2]中提出了功的互等定理,因而它有时又被称为 Betti 的功的互等定理.尔后,在文献[3]中 Rayleigh(瑞雷)推广该定理到谐载作用的情况,而对动力学功的互等定理的一般研究是 Lamb(拉姆博)在文献[4]中完成的.最后, Андреев(安德列夫)等在文献[5-9]中给出了该定理的一系列应用.

自 1980 年以来,本文作者在功的互等定理的理论研究和应用方面发表了一些文章.在理论研究方面,首先在文献[10]中提出了修正的功的互等定理与叠加原理等价的两个原理.其次,在文献[11]中提出了广义功的互等定理,该定理可被应用于具有不同本构关系的两个小变形线弹性体.作为应用,在文献[12-13]中,首先推广的功的互等定理于求解悬臂矩形板的弯曲.尔后,在文献[14-16]中,继续推广该定理于求解矩形板的振动问题.在文献[17-18]中,在线弹性力学平面问题和空间问题中的进一步应用的结果形成了结构分析的系统方法,称之为功的互等法(RMW).

所有上述都是对功的互等定理的推广与应用.直到今天该定理仍被认为是正确的.然而,我们的研究揭示了存在于“一个弯曲薄板”和“两组力的作用”之间的矛盾.基于对这一矛盾的分析,提出了修正的功的互等定理,在该定理中给出了功的互等定理的正确命题.同时该定理为功的互等法提供了理论基础,这是结构分析的一个新颖的和强有力的方法.

\* 收稿日期: 2014-03-07; 修订日期: 2014-07-07

作者简介: 付宝连(1934—),男,辽宁辽阳人,教授(E-mail: ysufubaolian@163.com).

## 1 弯曲薄板 Betti 的功的互等定理

按文献[19-25],小位移理论三维线弹性力学 Betti 的功的互等定理可以叙述为:一小变形线弹性体分别受到第 1 组力和第 2 组力的作用,则有第 1 组力(包括体力和表面反力)在第 2 组力所产生的相应位移上所做的功等于第 2 组力(包括体力和表面反力)在第 1 组力所产生的相应位移上所做的功。

分析 Betti 的功的互等定理可以看出:两组力应该是独立的和任意的,但必须保证该给定弹性体是小变形的。其次,该两组力必须作用于同一线弹性体上。最后,该弹性体在两组力作用下都应处于真实状态,即应该满足弹性力学的平衡方程、协调条件、位移边界条件、静力边界条件和应力-应变关系这 5 大类方程。

为了更清楚地说明 Betti 的功的互等定理,兹给出如下两个定义。

两个相同的弹性体:具有相同形状、尺寸、本构关系和位移边界条件。

两个不相同的弹性体:具有相同形状、尺寸和本构关系,但具有不相同的位移边界条件。

两个相同的弹性体在相同载荷作用下具有相同的解,而在不相同载荷作用下具有不相同的解。而不相同的两个弹性体在相同的载荷作用下具有不相同的解。

根据三维线弹性力学 Betti 的功的互等定理的一般叙述,小挠度线弹性弯曲薄板 Betti 的功的互等定理可以叙述为:一小挠度线弹性弯曲薄板分别在第 1 组力和第 2 组力作用下处于真实状态,则有第 1 组力(包括体力和表面反力)在第 2 组力作用所产生的相应的位移上所做的功等于第 2 组力(包括体力和表面反力)在第 1 组力作用下所产生的相应位移上所做的功。

## 2 对弯曲薄板 Betti 的功的互等定理的分析

考虑一在一集中载荷作用下两邻边固定,另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板,如图 1(a)所示。这是一受力比较复杂的板,所以举其为例能更好地说明弯曲薄板 Betti 的功的互等定理命题中的“一个弯曲薄板”和“两组力的作用”是一矛盾的两个前提。

图 2 为在均载作用下的同一弯曲矩形板。在图 1(a)和图 2 两板之间应用 Betti 的功的互等定理,则有

$$P_1 w_2(\xi, \eta) = \int_0^a \int_0^b q w_1(x, y) dx dy. \quad (1)$$

其次,一组力  $P_1; M_{1x0}^+, M_{1y0}^+; V_{1xa}, V_{1yb}$  和  $R_{1ab}$  作用在图 1(b)所示弯曲矩形板上,应用 Betti 的功的互等定理于图 1(b)板和图 2 板,得到

$$\begin{aligned} P_1 w_2(\xi, \eta) - \int_0^b M_{1x0}^+ \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} \right)_{x=\xi_1} dy - \int_0^a M_{1y0}^+ \left( \frac{\partial w_2}{\partial y} \right)_{y=\xi_2} dx + \\ \int_0^b V_{1xa}(w_2)_{x=a} dy + \int_0^a V_{1yb}(w_2)_{y=b} dx - R_{1ab}(w_2)_{x=a, y=b} = \\ \int_0^a \int_0^b q_2 w_1(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

再次,解除两固定边  $x=0$  和  $y=0$  边的弯曲约束,分别代以作用在  $x=0$  和  $y=0$  两简支边分布弯矩  $M_{x0}^-$  和  $M_{y0}^-$ , 该两分布弯矩的作用应保证  $x=0$  边和  $y=0$  边的转角为 0, 于是可得图 1(c)所示矩形板。

应该知道,在图 1(c)中所作用的一组外力是任意的和独立的,它们在保证该板为小挠度和真实状态下有很多种选择的可能。

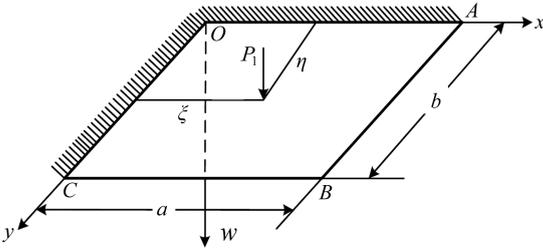


图 1(a) 在一集中载荷作用下两邻边固定,另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板

Fig.1(a) A bending rectangular plate with 2 fixed adjacent edges, 2 free adjacent edges and a free corner point, under a concentrated load

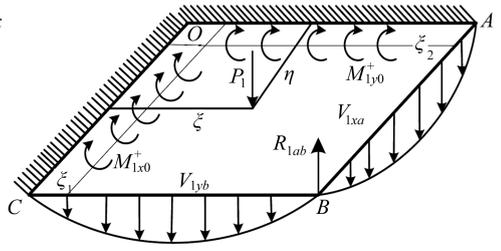


图 1(b) 在 1 组力作用下两邻边固定另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板

Fig.1(b) A bending rectangular plate with 2 fixed adjacent edges, 2 free adjacent edges and a free corner point, under a set of forces

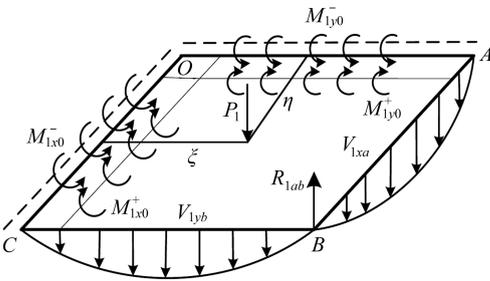


图 1(c) 在 1 组力作用下两邻边简支另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板

Fig.1(c) A bending rectangular plate with 2 simply supported adjacent edges, 2 free adjacent edges and a free corner point, under a set of forces

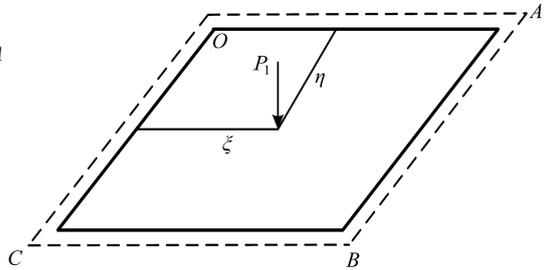


图 1(d) 在 1 集中载荷作用下四边简支的弯曲矩形板

Fig.1(d) A bending rectangular plate with 4 simply supported edges under a concentrated load

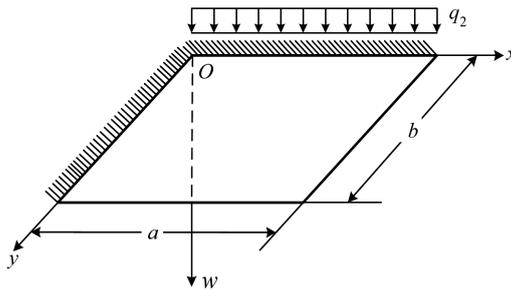


图 2 均载作用下两邻边固定,另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板

Fig.2 A bending rectangular plate with 2 fixed adjacent edges, 2 free adjacent edges and a free corner point under uniformly distributed load

最后,我们选择该组外力为下述特殊数值的一组:在  $V_{1xa}$ ,  $V_{1yb}$ ,  $R_{lab}$  和  $P_1$  共同作用下,让  $w_1(x, y)_{x=a}$ ,  $w_1(x, y)_{y=b}$  和  $w_1(x, y)_{x=a, y=b}$  均为 0, 并且  $M_{1x0}^+ = M_{1x0}^-$  和  $M_{1y0}^+ = M_{1y0}^-$ , 而弯曲矩形板为小挠度. 在这样一个过程之后, 可以看到, 图 1(c) 所示弯曲矩形板转换成图 1(d) 所示板. 即, 在这样一组特殊载荷作用下, 两邻边固定另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板被转换成在

一集中载荷作用下四边简支的弯曲矩形板。

因此我们得出结论,功的互等定理同样适用于分别受到第 1 组力和第 2 组力作用的两个不相同的弯曲矩形板。

### 3 弯曲薄板的修正的功的互等定理

从上述分析,能够看到,Betti 的功的互等定理的命题在原则上不同于上述结论.这是由于在证明 Betti 的功的互等定理的过程中,“一个弯曲薄板”和“两组力的作用”可能出现的矛盾没有被考虑.事实上,两组力的任何一组力都有可能改变给定的弯曲薄板成为另一个弯曲薄板.因此,必须解决这个矛盾.这里有两种解法,让我们分述如下:

#### 3.1 弯曲薄板的第一修正的功的互等定理

第 1 个解法是保持“一个弯曲薄板”不变,而“两组力的作用”不再是独立的,而应满足已知“一个弯曲薄板”的位移边界条件.为了比较清楚地说明这一问题,引入一个线性相关力的定义,在这样力作用下,给定“一个弯曲薄板”的位移边界条件被满足.因此,Betti 的功的互等定理可被修正如下:当一个弯曲薄板分别受到第 1 组线性相关的力作用和第 2 组线性相关的力作用时,则有第 1 组线性相关的力(包括体力和表面反力)在第 2 组线性相关力作用所产生的相应位移上所做的功等于第 2 组线性相关的力(包括体力和表面反力)在第 1 组线性相关力作用所产生的相应位移上所做的功.这就是弯曲薄板的第一修正的功的互等定理。

#### 3.2 弯曲薄板的第二修正的功的互等定理

解决上述矛盾的第 2 个方法是保持两组力的独立性,而“一个弯曲薄板”不能再被保持.这是由于两组独立的力的任意一组力都可能改变已知的“一个弯曲薄板”成为另外一个弯曲薄板.在这种情况下,Betti 的功的互等定理可被修正如下:当两个不相同的弯曲薄板分别受到第 1 组独立的力和第 2 组独立的力作用时,则有第 1 组的独立力(包括体力和表面反力)在第 2 组弯曲薄板的相应位移上所做的功等于第 2 组独立力(包括体力和表面反力)在第 1 组弯曲薄板相应位移上所做的功.应该注意的是,两个弯曲薄板应该是线弹性的并且处于真实状态,两个板都应是小挠度。

比较第一修正的功的互等定理与 Betti 的功的互等定理,可以看到,在两组力是线性相关的条件下,Betti 的功的互等定理与第一修正的功的互等定理是一致的。

比较两个修正的功的互等定理,可以看到,第一修正的功的互等定理只适用于在两组线性相关力作用下的一个弯曲薄板,而第二修正的功的互等定理适用于分别在第 1 组独立的力和第 2 组独立的力作用下的两个不相同的弯曲薄板.故采用第二修正的功的互等定理作为修正的功的互等定理。

### 4 弯曲薄板修正的功的互等定理的证明

考虑不相同的两个弯曲薄板,如图 3(a)和图 3(b)所示.根据修正的功的互等定理,则有第 1 薄板的外力在第 2 薄板的相应挠度和转角上所做的功等于第 2 薄板的外力在第 1 薄板的相应挠度和转角上所做的功,于是有

$$\iint_{\Omega} q_1 w_2 dx dy + \int_{s_{1v}} \bar{V}_{1nv} \bar{w}_{2v} ds + \int_{s_{1w}} \bar{V}_{1nw} \bar{w}_{2w} ds - \int_{s_{1M}} \bar{M}_{1nM} \left( \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial n} \right)_M ds - \int_{s_{2\theta}} \bar{M}_{1n\theta} \left( \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial n} \right)_\theta ds + \sum_{i=1}^n \bar{R}_{1i} \bar{w}_{2i} =$$

$$\iint_{\Omega} q_2 w_1 dx dy + \int_{s_{2v}} \bar{V}_{2nv} \bar{w}_{1v} ds + \int_{s_{2w}} \bar{V}_{2nw} \bar{w}_{1w} ds - \int_{s_{2M}} \bar{M}_{2nM} \left( \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial n} \right)_M ds - \int_{s_{2\theta}} \bar{M}_{2n\theta} \left( \frac{\partial \bar{w}_1}{\partial n} \right)_\theta ds + \sum_{i=1}^n \bar{R}_{2i} \bar{w}_{1i} \quad (3)$$

这里,带脚标 1,2 的字母分别表示第 1 薄板和第 2 薄板的相应力学量;带上横线并带脚标 1,2 的字母分别表示第 1 薄板和第 2 薄板的真实边界值;  $s_v, s_w, s_M$  和  $s_\theta$  分别表示已知切力的边界域、已知挠度的边界域、已知法向弯矩的边界域和已知法向转角的边界域。且

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial S}, R_c = [M_{ns}(S_c + O) - M_{ns}(S_c - O)] \quad (4)$$

分别表示边界上的等效切力和角点力。

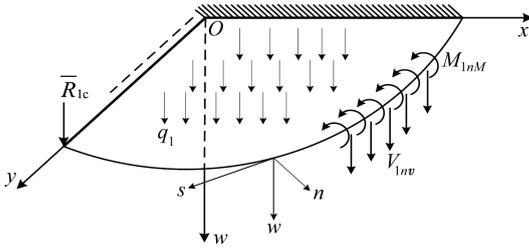


图 3(a) 具有曲线边界的第 1 弯曲矩形板  
Fig.3(a) The 1st bending thin plate with curved boundary

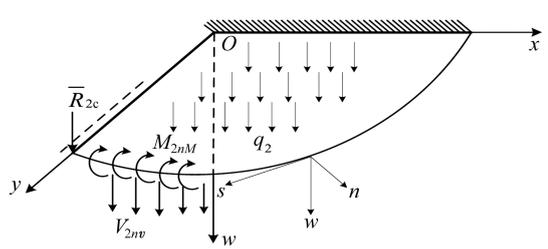


图 3(b) 具有曲线边界的第 2 弯曲矩形板  
Fig.3(b) The 2nd bending thin plate with curved boundary

应用平衡方程、协调条件、弯矩-曲率的线性关系、扭矩-扭率的线性关系和 Green(格林)公式,式(3)左端第 1 项成为

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} q_1 w_2 dx dy &= - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{1y}}{\partial y} \right) w_2 dx dy = \\ &- \int_s (Q_{1x} l + Q_{1y} m) w_2 ds + \iint_{\Omega} \left( Q_{1x} \frac{\partial w_2}{\partial x} + Q_{1y} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) dx dy = \\ &- \int_s (Q_{1x} l + Q_{1y} m) w_2 ds + \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial M_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial M_{1xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial w_2}{\partial x} + \left( \frac{\partial M_{1xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{1y}}{\partial y} \right) \frac{\partial w_2}{\partial y} \right] dx dy = \\ &- \int_s (Q_{1x} l + Q_{1y} m) ds + \int_s \left[ M_{1x} l \frac{\partial w_2}{\partial x} + M_{1y} m \frac{\partial w_2}{\partial y} + M_{1xy} \left( m \frac{\partial w_2}{\partial x} + l \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \right] ds - \\ &\iint_{\Omega} \left( M_{1x} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + M_{1y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + 2M_{1xy} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \right) dx dy = \\ &- \int_s Q_{1n} w_2 ds + \int_s \left( M_{1n} \frac{\partial w_2}{\partial n} + M_{1ns} \frac{\partial w_2}{\partial s} \right) ds + \\ &\iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + \right. \\ &2(1 - \nu) \left. \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \right] dx dy = \\ &- \int_{s_{1v}} V_{1nv} w_{2v} ds - \int_{s_{1w}} V_{1nw} w_{2w} ds + \int_{s_{1M}} M_{1n} \left( \frac{\partial w_2}{\partial n} \right)_M ds + \int_{s_{1\theta}} M_{1n\theta} \left( \frac{\partial w_2}{\partial n} \right)_\theta ds - \sum_{i=1}^n R_{1i} w_{2i} + \end{aligned}$$

$$D \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \right] dx dy. \quad (5)$$

将式(5)代入式(3)左端第1项,并注意到两弯曲薄板都应满足位移边界条件和静力边界条件,则有

$$- \int_{s_{1v}} V_{1nv} w_{2v} ds + \int_{s_{1v}} \bar{V}_{1nv} \bar{w}_{2v} ds = 0, \quad (6)$$

$$- \int_{s_{1w}} V_{1nw} w_{2w} ds + \int_{s_{1w}} \bar{V}_{1nw} \bar{w}_{2w} ds = 0, \quad (7)$$

$$+ \int_{s_{1M}} M_{1n} \left( \frac{\partial w_2}{\partial n} \right)_M ds - \int_{s_{1M}} \bar{M}_{1n} \left( \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial n} \right)_M ds = 0, \quad (8)$$

$$+ \int_{s_{1\theta}} M_{1n\theta} \left( \frac{\partial w_2}{\partial n} \right)_\theta ds - \int_{s_{1\theta}} \bar{M}_{1n\theta} \left( \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial n} \right)_\theta ds = 0, \quad (9)$$

$$- R_{1c} w_{2c} + \bar{R}_{1c} \bar{w}_{2c} = 0. \quad (10)$$

最后得到

$$\iint_{\Omega} q_1 w_2 dx dy + \int_{s_{1v}} \bar{V}_{1nv} \bar{w}_{2v} ds + \int_{s_{1w}} \bar{V}_{1nw} \bar{w}_{2w} ds - \int_{s_{1M}} \bar{M}_{1nM} \left( \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial n} \right)_M ds - \int_{s_{2\theta}} \bar{M}_{1n\theta} \left( \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial n} \right)_\theta ds + \sum_{i=1}^n \bar{R}_{1i} \bar{w}_{2i} = D \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right) + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \right] dx dy. \quad (11)$$

同法,可证明式(3)的右端项也等于式(11)的右端项,于是弯曲薄板的修正的功的互等定理被证。

## 5 Betti 的功的互等定理用于求解弯曲矩形板挠曲面方程的不可行性

考虑一在均布载荷作用下的两邻边固定另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板作为实际系统,如图2所示.首先,我们试图应用 Betti 的功的互等定理来求解这一问题。

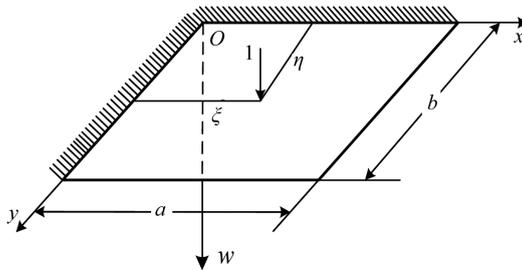


图4 在一单位集中载荷作用下两邻边固定,另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板

Fig.4 A bending rectangular plate with 2 fixed adjacent edges, 2 free adjacent edges and a free corner point under a unit concentrated load

Betti 的功的互等定理限定,两组力必须分别作用于相同的矩形板上.因此,应该取在一单位集中载荷作用下的相同矩形板作为基本系统,如图4所示.应用 Betti 的功的互等定理于图2

所示实际系统和图 4 所示基本系统,得到

$$w_2(\xi, \eta) = \int_0^a \int_0^b q_2 w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy, \tag{12}$$

其中  $w_2(\xi, \eta)$  是实际系统的解, 和  $w_1(x, y; \xi, \eta)$  是基本系统的基本解; 可知, 求解  $w_1(x, y; \xi, \eta)$  比求解  $w_2(\xi, \eta)$  要困难得多. 而且只有在求出  $w_1(x, y; \xi, \eta)$  后再通过积分才能求出  $w_2(\xi, \eta)$ . 因此, 试图应用 Betti 的功的互等定理来求解矩形板的挠曲面方程是不可行的.

## 6 应用修正的功的互等定理于求解弯曲矩形板 挠曲面方程(功的互等法)

现在应用修正的功的互等定理求解如图 2 所示弯曲矩形板的挠曲面方程. 去掉两个固定边  $x = 0$  和  $y = 0$  的弯曲约束, 用两个作用于  $x = 0$  和  $y = 0$  两个简支边的分布弯矩  $M_{x0}$  和  $M_{y0}$  代替. 于是得到图 5 所示弯曲矩形板的实际系统, 并假设

$$M_{x0} = \sum_{n=1,2}^{\infty} A_n \sin(\beta_n y), \tag{13}$$

$$M_{y0} = \sum_{m=1,2}^{\infty} C_m \sin(\alpha_m x), \tag{14}$$

$$w_{xa} = \sum_{n=1,2}^{\infty} b_n \sin(\beta_n y) + \frac{y}{b} k, \tag{15}$$

$$w_{yb} = \sum_{m=1,2}^{\infty} d_m \sin(\alpha_m x) + \frac{x}{a} k, \tag{16}$$

其中  $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b; A_n, C_m, b_n, d_m$  和  $k$  均为待定常数.

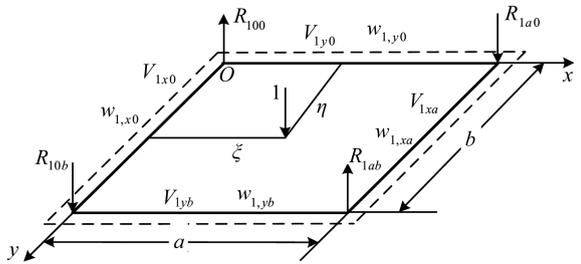
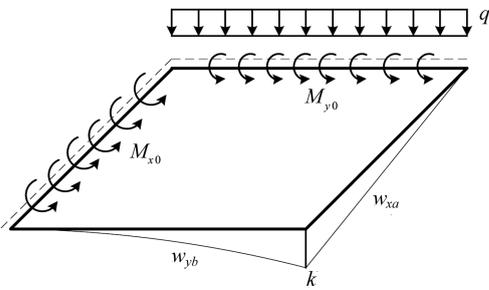


图 5 均载作用下两邻边固定, 另两邻边自由且角点悬空的弯曲矩形板的实际系统

图 6 弯曲矩形板的基本系统

Fig.6 The basic system of bending rectangular plates

Fig.5 The actual system of bending rectangular plates with 2 fixed adjacent edges, 2 free adjacent edges and a free corner point under uniformly distributed load

修正的功的互等定理适用于在各自外力作用下的两个不相同的弯曲矩形板. 因此, 可取在一单位集中载荷作用下的四边简支矩形板作为基本系统, 如图 6 所示. 在图 6 所示基本系统矩形板和图 5 所示实际系统矩形板之间应用修正的功的互等定理, 则得

$$w(\xi, \eta) = \int_0^a \int_0^b q w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy + \int_0^b M_{x0} w_{1,x0} dy + \int_0^a M_{y0} w_{1,y0} dx - \int_0^b V_{1xa} w_{xa} dy - \int_0^a V_{1yb} w_{yb} dx + R_{1ab} k, \tag{17}$$

其中  $w(\xi, \eta)$  是实际系统的挠曲面方程;  $w_1(x, y; \xi, \eta)$  是基本解;  $w_{1,x0}$  和  $w_{1,y0}$  是基本系统在  $x = 0$  边和  $y = 0$  边的转角;  $V_{1xa}$  和  $V_{1yb}$  是基本系统在  $x = 0$  边和  $y = 0$  边的等效切力;  $R_{1ab}$  是基本系统在  $x = a, y = b$  角点上的角点力. 它们都已被计算出来.

将式(13)~(16)、基本解及其相应的边界值代到式(17)中, 并且进行计算, 则得

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta) = & \frac{2q}{Da} \sum_{m=1,2}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2 \cosh((1/2)\alpha_m b)} \left[ \alpha_m \left( \eta - \frac{b}{2} \right) \sinh \left( \alpha_m \left( \eta - \frac{b}{2} \right) \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left( 2 + \frac{1}{2} \alpha_m b \tanh \left( \frac{1}{2} \alpha_m b \right) \right) \cosh \alpha_m \left( \eta - \frac{b}{2} \right) \right] \right\} \frac{[1 - (-1)^m]}{\alpha_m^5} \sin(\alpha_m \xi) + \\
 & \frac{1}{2D} \sum_{n=1,2}^{\infty} \left( - \frac{\beta_n a}{\sinh^2(\beta_n a)} \sinh(\beta_n \xi) + \coth(\beta_n a) \beta_n \xi \cosh(\beta_n \xi) - \right. \\
 & \left. \beta_n \xi \sinh(\beta_n \xi) \right) \frac{1}{\beta_n^2} \sin(\beta_n \eta) (A_n) + \\
 & \frac{1}{2D} \sum_{m=1,2}^{\infty} \left( - \frac{\alpha_m b}{\sinh^2(\alpha_m b)} \sinh(\alpha_m \eta) + \coth(\alpha_m b) \alpha_m \eta \cosh(\alpha_m \eta) - \right. \\
 & \left. \alpha_m \eta \sinh(\alpha_m \eta) \right) \frac{1}{\alpha_m^2} \sin(\alpha_m \eta) (C_m) + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{n=1,2}^{\infty} [2 + (1 - \nu)(\beta_n a \coth(\beta_n a) - \beta_n \xi \coth(\beta_n \xi))] \frac{\sinh(\beta_n \xi)}{\sinh(\beta_n a)} \sin(\beta_n \eta) (b_n) + \\
 & \frac{1}{2} \sum_{m=1,2}^{\infty} [2 + (1 - \nu)(\alpha_m b \coth(\alpha_m b) - \alpha_m \eta \coth(\alpha_m \eta))] \frac{\sinh(\alpha_m \eta)}{\sinh(\alpha_m b)} \sin(\alpha_m \xi) (d_m) + \\
 & \frac{\xi \eta}{ab} k. \tag{18}
 \end{aligned}$$

式(18)应满足下述边界条件:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = 0, \tag{19}$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0, \tag{20}$$

$$-D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=a} = 0, \tag{21}$$

$$-D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right]_{\eta=b} = 0, \tag{22}$$

$$-2D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{\xi=a, \eta=b} = 0; \tag{23}$$

而边界条件

$$w_{\xi=0} = 0, \tag{24}$$

$$w_{\eta=0} = 0, \tag{25}$$

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)_{\xi=a} = 0, \tag{26}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right)_{\eta=b} = 0 \tag{27}$$

已被式(18)所满足。

将式(18)代入到式(19)~(23)中,得到关于边界条件(19)~(23)相应的执行方程:

$$\begin{aligned} & \frac{q}{Db} [1 + (-1)^{n+1}] \left[ \tanh\left(\frac{1}{2} \beta_n a\right) - \frac{\beta_n a}{2 \cosh^2((1/2)\beta_n a)} \right] \frac{1}{\beta_n^4} + \\ & \frac{1}{2D} \left[ \coth(\beta_n a) - \frac{\beta_n a}{\sinh^2(\beta_n a)} \right] \frac{A_n}{\beta_n} + \frac{2}{Db} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_n}{K_{mn}^2} C_m + \\ & \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sinh(\beta_n a)} + \beta_n a \frac{\cosh(\beta_n a)}{\sinh^2(\beta_n a)} + \nu \left( \frac{1}{\sinh(\beta_n a)} - \beta_n a \frac{\cosh(\beta_n a)}{\sinh^2(\beta_n a)} \right) \right] \beta_n b_n + \\ & \frac{2}{b} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \alpha_m}{K_{mn}^2} [\beta_n^3 + (2 - \nu) \alpha_m^2 \beta_n] d_m + \frac{2}{ab} \frac{(-1)^{n+1}}{\beta_n} k_3 = 0, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} & \frac{q}{Da} [1 + (-1)^{m+1}] \left[ \tanh\left(\frac{1}{2} \alpha_m b\right) - \frac{\alpha_m b}{2 \cosh^2((1/2)\alpha_m b)} \right] \frac{1}{\alpha_m^4} + \\ & \frac{2}{Da} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{\alpha_m \beta_n}{K_{mn}^2} A + \frac{1}{2D} \left[ \coth(\alpha_m b) - \frac{\alpha_m b}{\sinh^2(\alpha_m b)} \right] \frac{C_m}{\alpha_m} + \\ & \frac{2}{a} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \alpha_m}{K_{mn}^2} [\alpha_m^3 + (2 - \nu) \alpha_m^2 \beta_n] b_n + \\ & \frac{1}{2} [1 + \alpha_m b \coth(\alpha_m b) + \nu(1 - \alpha_m b \coth(\alpha_m b))] \alpha_m \frac{d_m}{\sinh(\alpha_m b)} + \\ & \frac{2}{ab} \frac{(-1)^{m+1}}{\alpha_m} k_3 = 0, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} & \frac{q}{b} [1 + (-1)^{n+1}] \left[ -(3 - \nu) \tanh\left(\frac{1}{2} \beta_n a\right) + (1 - \nu) \frac{\beta_n a}{2 \cosh^2((1/2)\beta_n a)} \right] \frac{1}{\beta_n^2} - \\ & \frac{1}{2} [(1 + \beta_n a \coth(\beta_n a)) + \nu(1 - \beta_n a \coth(\beta_n a))] \frac{\beta_n}{\sinh(\beta_n a)} A_n + \\ & \frac{2}{b} \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^m \alpha_m}{K_{mn}^2} [\alpha_m^2 \beta_n + (2 - \nu) \beta_n^3] C_m + \\ & \frac{D}{2} \left[ 2(1 - \nu^2) \cosh(\beta_n a) + \right. \\ & \left. (1 - \nu)^2 \left( \cosh(\beta_n a) + \frac{\beta_n a}{\sinh(\beta_n a)} \right) \right] \frac{\beta_n^3}{\sinh(\beta_n a)} b_n - \\ & \frac{2D}{b} (1 - \nu)^2 \sum_{m=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \alpha_m^3 \beta_n^3}{K_{mn}^2} d_m = 0, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} & \frac{q}{a} [1 + (-1)^{m+1}] \left[ -(3 - \nu) \tanh\left(\frac{1}{2} \alpha_m b\right) + (1 - \nu) \frac{\alpha_m b}{2 \cosh^2((1/2)\alpha_m b)} \right] \frac{1}{\alpha_m^2} + \\ & \frac{2}{a} \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta_n}{K_{mn}^2} [\alpha_m \beta_n^2 + (2 - \nu) \alpha_m^3] A_n - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} [(1 + \alpha_m b \coth(\alpha_m b)) + \nu(1 - \alpha_m b \coth(\alpha_m b))] \frac{\alpha_m}{\sinh(\alpha_m b)} C_m - \frac{2D}{a} (1 - \nu)^2 \sum_{n=1,2}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \alpha_m^3 \beta_n^3}{K_{mn}^2} b_n + \frac{D}{2} \left[ 2(1 - \nu^2) \cosh(\alpha_m b) + (1 - \nu)^2 \left( \cosh(\alpha_m b) + \frac{\alpha_m b}{\sinh(\alpha_m b)} \right) \right] \frac{\alpha_m^3}{\sinh(\alpha_m b)} d_m = 0, \tag{31}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2q}{b} (1 - \nu) \sum_{n=1,2}^{\infty} [1 + (-1)^{n+1}] \left( \tanh\left(\frac{1}{2} \beta_n a\right) - \frac{\beta_n a}{2 \cosh^2((1/2)\beta_n a)} \right) \frac{(-1)^n}{\beta_n^3} - \\ & (1 - \nu) \sum_{n=1,2}^{\infty} (1 - \beta_n a \coth(\beta_n a)) \frac{(-1)^n}{\sinh(\beta_n a)} A_n - \\ & (1 - \nu) \sum_{m=1,2}^{\infty} (1 - \alpha_m b \coth(\alpha_m b)) \frac{(-1)^m}{\sinh(\alpha_m b)} C_m - \\ & D(1 - \nu) \sum_{n=1,2}^{\infty} \left[ \left( \cosh(\beta_n a) + \frac{\beta_n a}{\sinh(\beta_n a)} \right) + \nu \left( \cosh(\beta_n a) - \frac{\beta_n a}{\sinh(\beta_n a)} \right) \right] \frac{(-1)^n \beta_n^2}{\sinh(\beta_n a)} b_n - \\ & D(1 - \nu) \sum_{m=1,2}^{\infty} \left[ \left( \cosh(\alpha_m b) + \frac{\alpha_m b}{\sinh(\alpha_m b)} \right) + \nu \left( \cosh(\alpha_m b) - \frac{\alpha_m b}{\sinh(\alpha_m b)} \right) \right] \frac{(-1)^m \alpha_m^2}{\sinh(\alpha_m b)} d_m - 2D(1 - \nu) \frac{1}{ab} k_3 = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

作为一数值算例,取  $b/a = 1, \nu = 0.3, A_n = C_m, b_n = d_m$  和  $m, n = 1, 2, \dots, 24$ . 进行计算,沿  $y = a$  自由边的挠度值给于表 1, 相应的挠度曲线示于图 7. 沿  $y = 0$  固定边的弯矩给于表 2 和示于图 8.

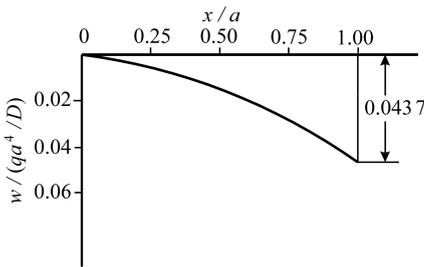


图 7  $y = a$  自由边挠度分布  
Fig.7 Distribution of deflection along free edge  $y = a$

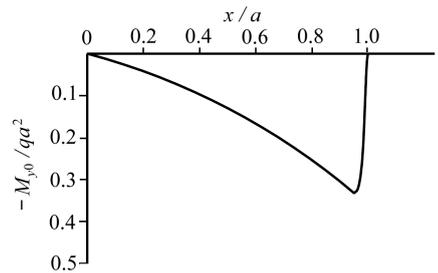


图 8  $y = 0$  固定边的弯矩分布  
Fig.8 Distribution of bending moment along fixed edge  $y = 0$

表 1  $y = a$  自由边挠度分布 ( $qa^4/D$ )

Table 1 Distribution of deflection along free edge  $y = a(qa^4/D)$

$x/a$	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$w_{y_a}$	0	0.006 770 7	0.019 993	0.032 872	0.043 678

表 2  $y = 0$  固定边的弯矩分布 ( $-qa^2$ )

Table 2 Distribution of bending moment along fixed edge  $y = 0(-qa^2)$

$x/a$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
$M_{y,0}$	0	0.034 719	0.091 020	0.163 290	0.234 000
$x/a$	0.9	0.95	0.975		
$M_{y,0}$	0.293 230	0.327 060	0.323 470		

本文所得的结果与文献[26]相同,而本文的计算过程非常简便。

## 7 结 论

1) 弯曲薄板的 Betti 的功的互等定理命题的两个主要前提,“一个弯曲薄板”和“两组力的作用”是相互矛盾的,这一矛盾导致 Betti 定理是一个有逻辑错误的定理。

2) 应用弯曲薄板的 Betti 的功的互等定理求解弯曲矩形板的挠曲面方程是不可行的。

3) 基于对弯曲薄板 Betti 的功的互等定理的分析,给出了弯曲薄板的修正的功的互等定理,该定理可以叙述为:两个不相同的小挠度线弹性弯曲薄板分别在第 1 组独立的力和第 2 组独立的力作用下处于真实状态,则有作用于第 1 弯曲薄板的外力(包括体力和边界反力)在第 2 弯曲薄板相应位移上所做的功等于作用于第 2 弯曲薄板的外力(包括体力和边界反力)在第 1 弯曲薄板相应位移上所做的功。

4) 弯曲薄板的修正的功的互等定理为功的互等法提供了理论基础,该法是求解弯曲矩形板平衡、振动和稳定问题的一个新的和强有力的方法。

## 参考文献(References):

[1] Maxwell J C. On calculation of the equilibrium and stiffness of frames[J]. *Philosophical Magazine Series 4*, 1864, **27**(182): 294-299.

[2] Betti E. Teoria Della elasticita' [J]. *Nuovo Cimento*, 1872, **7/8**(1): 69-97.

[3] Тимошенко С П. *Сопротивление Материалов I* [M]. Москва: Наука, 1965: 297. (Timoshenko S P. *Strength of Materials Part I* [M]. 3rd ed. Princeton New Jersey, Toronto, New York, London: D Van Nostrand Company, Inc. 1965: 297. (in Russian))

[4] Lamb H. On reciprocal theorems in dynamics[J]. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1887, **1**(1): 144-151.

[5] Андреев Н Н. Теорема взаимности в теорий колебаний и акустике[J]. *Физ Словарь*, 1936, **1**: 458-459. (Andleev N N. Reciprocal theorem in theory of vibration and sound[J]. *Phy Dictionary*, 1936, **1**: 458-459. (in Russian))

[6] 胡海昌. 论弹性动力学中的倒易定理及它的一些应用[J]. *力学学报*, 1957, **1**(1): 63-71. (HU Hai-chang. On reciprocal theorem in elasto-dynamics and its some applications[J]. *Mechanica Sinica*, 1957, **1**(1): 63-71. (in Chinese))

[7] Payton R G. An application of the dynamic Betti-Rayleigh reciprocal theorem to moving point load in elastic media[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1964, **21**(4): 299-313.

[8] Iesan D. On reciprocal theorems and variational theorems in linear elasto-dynamicis[J]. *Bulletin de l'Academie des Sciences, Serie des Sciences Techniques*, 1974, **22**: 273-281.

[9] Айнола Л Я. К теореме взаимности для динамических задач теории упругости[J]. *Прикладная Математика и Механика*, 1967, **31**(1): 176-182. (Ainora L Y. On reciprocal theorem for dynamic problems of elasticity[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1967, **31**

- (1): 176-182. (in Russian))
- [10] 付宝连. 关于功的互等定理与叠加原理的等价性[J]. 应用数学和力学, 1985, **6**(9): 813-818. (FU Bao-lian. On equivalent of the reciprocal theorem to superposition principles[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, **6**(9): 813-818. (in Chinese))
- [11] 付宝连. 广义倒易定理及其应用[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(2): 188-194. (FU Bao-lian. Generalized reciprocal theorem and its applications[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(2): 188-194. (in Chinese))
- [12] 付宝连. 求解位移方程的一个新方法[C]//东北重型机械学院第三届科学报告会, 1981, **3**: 45-56. (FU Bao-lian. A new approach for solving displacement equations[C]//*Third Scientific Report Conference of Northeast Heavy Machinery Institute*, 1981, **3**: 45-56. (in Chinese))
- [13] 付宝连. 应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程[J]. 应用数学和力学, 1982, **3**(3): 315-325. (FU Bao-lian. Applications of reciprocal theorem to solving the equations of deflection surface of rectangular plates with various edge conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, **3**(3): 315-325. (in Chinese))
- [14] 付宝连, 李农. 弹性矩形薄板受迫振动的功的互等定理法( I )——四边固定的矩形板和三边固定的矩形板[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(8): 693-714. (FU Bao-lian, LI Nong. The method of the reciprocal theorem of forced vibration for the elastic thin rectangular plates( I )—rectangular plates with four clamped edges and with three clamped edges[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, **10**(8): 693-714. (in Chinese))
- [15] 付宝连, 李农. 弹性矩形薄板受迫振动的功的互等定理法( II )——两邻边固定的矩形板[J]. 应用数学和力学, 1990, **11**(11): 977-988. (FU Bao-lian, LI Nong. The method of the reciprocal theorem of forced vibration for the elastic thin rectangular plates( II )—rectangular plates with two adjacent clamped edges[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1990, **11**(11): 977-988. (in Chinese))
- [16] 付宝连, 李农. 弹性矩形薄板受迫振动的功的互等定理法( III )——悬臂矩形板[J]. 应用数学和力学, 1991, **12**(7): 613-620. (FU Bao-lian, LI Nong. The method of the reciprocal theorem of forced vibration for the elastic thin rectangular plates( III )—cantilever rectangular plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1991, **12**(7): 613-620. (in Chinese))
- [17] 付宝连. 应用功的互等定理法求立方体的位移解[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(4): 297-308. (FU Bao-lian. Application of the method of the reciprocal theorem to finding displacement solutions of cubes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, **10**(4): 297-308. (in Chinese))
- [18] 付宝连. 关于求解弹性力学平面问题的功的互等定理法[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(5): 437-446. (FU Bao-lian. On the method of reciprocal theorem to finding solutions of the plane problems of elasticity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1989, **10**(5): 437-446. (in Chinese))
- [19] Love A E H. *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*[M]. 4th ed. New York: Dover Publication, 1944.
- [20] Timoshenko S P, Goodier J N. *Theory of Elasticity*[M]. 3rd ed. McGraw-Hill Book Company, 1970.
- [21] 钱伟长, 叶开沅. 弹性力学[M]. 北京: 科学出版社, 1980. (CHIEN Wei-zang, YEH Kai-yuan. *Mechanics of Elasticity*[M]. Beijing: Science Press, 1980. (in Chinese))
- [22] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. (ZHONG Wan-xie. *A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity*[M]. Dalian: Dalian University of Tech-

- nology Press, 1995. (in Chinese))
- [23] Fung Y C. *Foundation of Solid Mechanics* [M]. New Jersey: Prentice-Hall, Inc Englewood Cliffs, 1965.
- [24] Wang Chi-teh. *Applied Elasticity* [M]. McGraw-Hill Publishing Company LTD, 1956.
- [25] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1981. (HU Hai-chang. *Variational Principles in Elastic Mechanics and Its Applications* [M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese))
- [26] 张福范. 弹性薄板 [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 1984. (ZHANG Fu-fan. *Elastic Thin Plates* [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 1984. (in Chinese))

## Corrected Reciprocal Theorem of Works for Bending Thin Plates and Its Application

FU Bao-lian

(College of Architectural Engineering and Mechanics, Yanshan University,  
Qinhuangdao, Hebei 066004, P.R.China)

**Abstract:** It was discovered that the 2 main premises in the proposition of Betti's reciprocal theorem of works for bending thin plates, '1 bending thin plate' and 'action of 2 sets of forces', were contradictory to each other because any one of the 2 sets of forces might change '1 bending thin plate' to a different one. The contradiction results in the fact that Betti's reciprocal theorem of works for bending thin plates is one with error in logic. Based on the analysis of the contradiction, a corrected reciprocal theorem was proposed, in which the correct proposition of the reciprocal theorem for bending thin plates was given. The corrected reciprocal theorem provides a theoretical foundation for the reciprocal method of work, which makes a novel and powerful way to the analysis of bending plates.

**Key words:** Betti's reciprocal theorem of works; corrected reciprocal theorem of works;  
1 bending thin plate; action of 2 sets of forces