

Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒格式*

葛全文

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

摘要: 提出 Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒格式. 基于用对守恒律的单调迎风算法 (MUSCL) 构造的高阶子网格压力, 引入了柱坐标高阶体权子网格力和柱坐标高阶面权子网格力, 构造了柱坐标高阶体权中心型守恒格式和柱坐标高阶面权中心型格式. 柱坐标高阶体权中心型守恒格式满足动量守恒、能量守恒, 但不能确定保持一维球对称性. 柱坐标高阶面权中心型格式满足能量守恒, 保持一维球对称性. 两种格式里, 格点速度以与网格面的数值通量相容的方式计算. 对 Saltzman 活塞问题等进行了数值模拟, 数值结果显示 Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒格式的有效性和精确性.

关键词: 柱坐标高阶体权子网格力; 柱坐标高阶面权子网格力; Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒格式; 柱坐标

中图分类号: O354; O242 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.11.005

引言

考虑二维 Lagrange 流体力学方程, 目的是提出 Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒格式. Lagrange 流体力学格式以网格随流体运动为特征, 这意味着网格格点以流体的速度运动, 网格面由格点位置确定, 保证没有质量流过运动网格的边界. 因此, 拉氏流体力学算法能准确捕捉多物质流中的接触间断. 离散 Lagrange 流体力学的关键在于要以与格点速度相容的方式决定物理守恒律的数值通量, 即同时满足几何守恒律. 满足这个要求的最自然的方式就是用交错离散, 即动能定义在格点, 密度、压力、内能定义在网格中心. 动能耗散为内能是由人为粘性保证的. 由于 von Neumann 和 Richtmyer^[1] 和 Wilikins^[2] 的开创性工作, Campbell 和 Shashkov 等^[3-12] 做了许多完善, Caramana 和 Shashkov 推广子网格质量为 Lagrange 质量提出子网格压力方法^[6], 葛全文^[12] 用对守恒律的单调迎风算法 (MUSCL) 发展了高阶子网格压力方法; 在相容交错离散的研究中, Caramana 等以严密的论证导出了总能量守恒格式, 这提高了交错离散的精度和有效性. 与交错离散不同的格式是基于 Godunov 方法^[13-14] 而导出的 Godunov 型格式. 与交错离散相比, Godunov 型格式具有守恒特性, 不需要人为粘性, 在用于任意 Lagrange, Euler 算法时, 允许守恒重映方法的直接实现. 基于 Godunov 方法而导出的 Godunov 型格式, 动能、密度、压力、内能定义在网格中心. 由在每个面上解近似 Riemann 问题而得到的网格面的量, 包括速

* 收稿日期: 2014-05-01; 修订日期: 2014-09-11

基金项目: 国家自然科学基金(11172050; 11372051; 11001027)

作者简介: 葛全文(1960—), 男, 吉林人, 副研究员, 博士(Tel: +86-10-59872671; E-mail: ge.quanwen@iapcm.ac.cn).

度的面向分量是可用的.可是,要运动网格必须计算格点的速度,Després 等^[14]取得通量离散与格点的运动相容性的重要成就,他们提出基于格点 Riemann 解而获得面通量与格点速度计算一致性的格式,这个原始格式是满足半离散熵不等式的一阶守恒格式.Carré 等^[15]把这个格式发展为高阶、多维格式.通过对 Després 格点 Riemann 解特性的研究,Maire 等^[16]说明 Després 格式对高长宽比的网格将导致严重的数值不稳定性.为克服这个困难,Maire 等^[16]引入了一种格式,这个格式能较好地解决高长宽比问题并保持通量计算与格点运动的一致性,它的主要特点是压力梯度的离散.即设计为网格的每一格点有两个压力,每一格点压力与连接格点边的外法方向相关,这些格点压力与格点速度由半边 Riemann 问题连接.Maire 等提出的满足熵条件的 Lagrange 中心型流体力学格式由 Shen(沈智军)等^[17]推广到柱坐标.葛全文^[18]把子网格压力方法引入到中心型流体力学格式,发展了 Lagrange 中心型守恒流体力学格式.Maire 等^[19]发展了 Lagrange 高阶中心型流体力学格式.葛全文^[20]发展了 Lagrange 高阶中心型守恒流体力学格式.Maire^[21]利用推广的 Riemann 问题构造了 Lagrange 柱坐标高阶中心型流体力学格式.Maire 格式是满足熵条件的高阶格式,保持一维球对称性.Maire 格式消除了不规则网格变形带来的虚假涡旋,但是同时也抑制了真实的物理涡旋,损伤了数值模拟的精确性.本文追求的是既要消除不规则网格变形带来的虚假涡旋又要模拟出真实的物理涡旋.为此提出 Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒气体动力学格式.基于用对守恒律的单调迎风算法(MUSCL)构造的高阶子网格压力,引入了柱坐标高阶体权子网格力和柱坐标高阶面权子网格力,构造了柱坐标高阶体权格式和柱坐标高阶面权格式.柱坐标高阶体权格式满足动量守恒、能量守恒,但不能确定保持一维球对称性.柱坐标高阶面权格式满足能量守恒,保持一维球对称性.两种格式里,格点速度与以与网格面的数值通量相容的方式计算.本文的结构如下:第1节为预备概念,第2节利用分片压力构造 Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒格式,第3节为数值结果,第4节给出结论和展望.

1 预备概念

1.1 拉氏流体力学方程

设 D 是 R^2 空间的开子集,充满无粘理想流体, (O, X, Y) 是 R^2 空间的直角坐标系, $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ 是标准正交基,定义单位向量 $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$.拉氏流体力学方程组:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV - \int_S \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} dS = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{U} dV + \int_S P \mathbf{N} dS = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho E dV + \int_S P \mathbf{U} \cdot \mathbf{N} dS = 0, \quad (4)$$

这里 d/dt 表示拉氏时间导数; $V(t)$ 是运动控制体; S 是 $V(t)$ 的边界; $\rho, \mathbf{U} = (u, v)^T, P, E$ 分别是密度、速度、压力、总能; \mathbf{N} 表示边界 S 的单位外法向量.式(1)、(3)和(4)分别表示质量、动量、总能守恒;式(2)表示几何守恒律,它等价于运动方程:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{U}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}, \quad (5)$$

\mathbf{X} 表示 $t > 0$ 时运动控制体的格点坐标, \mathbf{x} 表示 $t = 0$ 时运动控制体的格点坐标, 状态方程:

$$P = P(\rho, \varepsilon), \tag{6}$$

这里 ε 表示内能, 相关于总能 $\varepsilon = E - \|\mathbf{U}\|^2/2$, 引入拟 Cartesian (笛卡尔) 坐标系 (O, X, Y) , 装备了标准正交基 $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$. 应用拟径 $\mathfrak{R}(Y) = 1 - \alpha + \alpha Y$, Cartesian 坐标系和柱坐标系统一写为拟 Cartesian 坐标系, $\alpha = 0$ 是 Cartesian 坐标和 $\alpha = 1$ 是柱坐标. 我们指出 $\mathfrak{R}(Y) = 1 - \alpha + \alpha Y$ 对应于柱坐标 (Z, R) 的径向坐标, X 对应于柱坐标 Z , Y 对应于柱坐标 R . 在这个坐标系里, 体积 V 是面积 A 关于 X 轴旋转得到, 体积元 dV , 写为 $dV = \mathfrak{R}dA$, 这里 dA 为拟 Cartesian 坐标系面积元. 略去 2π 因子, 所有积分量在单位径向定义. 在这个坐标系里, 表面积 S 是体积 V 的边界, 是关于 X 轴旋转 L 得到. L 是面积 A 的边界. 表面积 $dS = \mathfrak{R}dL$, dL 是面积 A 的边界线元.

1.2 符号和假定

将物理区域 $V(0)$ 划分为四边形网格 $\Omega_c, c = 1, 2, \dots, I, c$ 是指标同时表示网格中心坐标, I 是总网格数. 网格 Ω_c 的格点 p 的总数为 $p(c)$, 格点以逆时针排序, 网格 Ω_c 的格点是周期的, 即 $p_{p(c)+1} = p_1, p_0 = p_{p(c)}$. 格点 p 的邻域网格 Ω_c 总数为 $c(p)$, 网格以逆时针排序, 网格 Ω_c 也是周期的, 即 $\Omega_{c(p)+1} = \Omega_1$. 图 1 中 L_p^c 和 $L_{p^-}^c$ 分别是边 $[p, p^+]$ 和 $[p, p^-]$ 大小的 $1/2$, N_p^c 和 $N_{p^-}^c$ 分别是边 $[p, p^+]$ 和 $[p, p^-]$ 单位外法向.

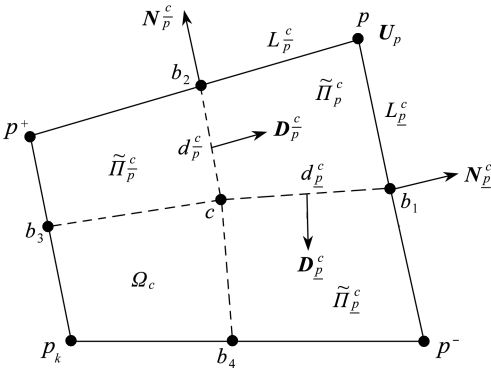


图 1 四边形网格 Ω_c 的分片压力

Fig.1 Localization of a piecewise pressure viewed from cell Ω_c

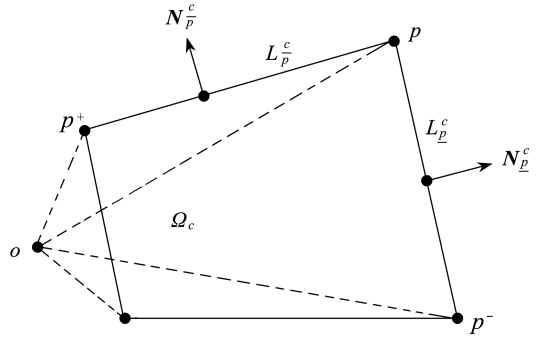


图 2 四边形网格 Ω_c 的三角形剖分

Fig.2 Triangular decomposition of quadrilateral cell Ω_c

四边形网格 Ω_c 内分片压力

下面定义网格内分片压力. 如图 1 显示四边形网格 Ω_c . 格点 p, p^+, p_k, p^- , 边界中点 b_1, b_2, b_3, b_4 . 用格点 p, p^+, p_k, p^- , 边界中点 b_1, b_2, b_3, b_4 和中心点 c 把网格 Ω_c 划分为 4 个四边形子网格 $cb_1pb_2, cb_2p^+b_3, cb_3pkb_4, cb_4p^-b_1$. $\tilde{\Pi}_{p,n}^c, p = 1, 2, \dots, p(c)$ 表示四边形子网格 $cb_1pb_2, cb_2p^+b_3, cb_3pkb_4$ 和 $cb_4p^-b_1$ 的压力. 网格 Ω_c 的压力表示为四边形子网格 $cb_1pb_2, cb_2p^+b_3, cb_3pkb_4$ 和 $cb_4p^-b_1$ 的分片常数压力 $\tilde{\Pi}_{p,n}^c, p = 1, 2, \dots, p(c)$. 知道网格 Ω_c 的初始密度 $\rho_{c,0}$, 格点坐标 $(X_{p,0}, Y_{p,0}), p = 1, 2, \dots, p(c)$, 由初始密度 $\rho_{c,0}$ 和四边形子网格体积 $\tilde{V}_{p,0}^c, p = 1, 2, \dots, p(c)$, 计算四边形子网格质量 $\tilde{m}_p^c = \rho_{c,0} \tilde{V}_{p,0}^c, p = 1, 2, \dots, p(c)$. 在当前时刻 $t = t_n$, 已知物理量 $\rho_{c,n}, a_{c,n}, P_{c,n}$, 格点坐标 $X_{p,n}, Y_{p,n}, p = 1, 2, \dots, p(c)$, 计算当前时刻四边形子网格体积 $\tilde{V}_{p,n}^c, p = 1, 2, \dots, p(c)$, 当前时刻子网格密度 $\tilde{\rho}_{p,n}^c = \tilde{m}_p^c / \tilde{V}_{p,n}^c, p = 1, 2, \dots, p(c)$, 当前时刻四边形子网格压力:

$$\tilde{\Pi}_{p,n}^c = a_{c,n}^2 (\tilde{\rho}_{p,n}^c - \rho_{c,n}) + P_{c,n}, \quad p = 1, 2, \dots, p(c). \tag{7}$$

2 Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒格式

2.1 几何守恒律的相容离散

由图 2, 在网格 Ω_c 上方程(2)写为

$$\frac{dV_c}{dt} = \int_{L_c} \mathbf{U}_c \cdot \mathbf{N} \mathfrak{R} dL, \quad (8)$$

这里 \mathbf{N} 表示边界单位外法向, V_c 表示网格 Ω_c 的体积, L_c 是网格 Ω_c 面积 A_c 的边界. 引入网格 Ω_c 的离散散度算子 $\nabla \cdot \mathbf{U}_c$:

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_c = \frac{1}{V_c} \int_{L_c} \mathbf{U}_c \cdot \mathbf{N} \mathfrak{R} dL. \quad (9)$$

网格 Ω_c 的体积 V_c 是格点坐标 $\mathbf{X}_p (p \in p(c))$ 的函数. 要计算体积 V_c , 先进行网格 Ω_c 的三角分解(参见图 2):

$$V_c = \frac{1}{2} \sum_{p \in p(c)} \frac{1}{3} (\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_{p^+}) (\mathbf{X}_p \times \mathbf{X}_{p^+}) \cdot \mathbf{e}_z. \quad (10)$$

这里 \mathfrak{R}_0 对应原点的拟径、Cartesian 几何 $\mathfrak{R}_0 = 1$ 和柱坐标 $\mathfrak{R}_0 = 0$. 关于时间求导:

$$\frac{dV_c}{dt} = \sum_{p \in p(c)} \left[\frac{(2\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_{p^+})}{3} L_{\bar{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},n}^c + \frac{(2\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_{p^-})}{3} L_{\underline{p},n}^c \mathbf{N}_{\underline{p},n}^c \right] \cdot \mathbf{U}_{p,n}. \quad (11)$$

定义拟径为

$$\mathfrak{R}_p^c = \frac{(2\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_{p^+})}{3}, \quad \mathfrak{R}_p^c = \frac{(2\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_{p^-})}{3}.$$

定义隅角拟径为

$$\mathfrak{R}_{\bar{p},\underline{p},n}^c L_{\bar{p},\underline{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},\underline{p},n}^c = \mathfrak{R}_{\bar{p}}^c L_{\bar{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},n}^c + \mathfrak{R}_{\underline{p}}^c L_{\underline{p},n}^c \mathbf{N}_{\underline{p},n}^c. \quad (12)$$

用这些概念, 几何守恒律改写为

$$\frac{dV_c}{dt} = \sum_{p \in p(c)} \mathfrak{R}_{\bar{p},\underline{p},n}^c L_{\bar{p},\underline{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},\underline{p},n}^c \cdot \mathbf{U}_{p,n}. \quad (13)$$

结果与这个定义结合得到

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_{c,n} = \frac{1}{V_{c,n}} \sum_{p \in p(c)} \mathfrak{R}_{\bar{p},\underline{p},n}^c L_{\bar{p},\underline{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},\underline{p},n}^c \cdot \mathbf{U}_{p,n}. \quad (14)$$

2.2 梯度算子的相容离散

建立拟 Cartesian 坐标系里 Lagrange 流体力学高阶空间离散. 引入与几何守恒律相容的梯度算子的体积分.

梯度算子的定义

为表示梯度算子的体积分, 梯度算子写为

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial X} \mathbf{e}_X + \frac{\partial P}{\partial Y} \mathbf{e}_Y. \quad (15)$$

为导出梯度算子的体积分, 应用向量恒等式:

$$\mathbf{U} \cdot \nabla P = \nabla \cdot (P\mathbf{U}) - P \nabla \cdot \mathbf{U},$$

这对任何向量 \mathbf{U} 都满足. 用 Green(格林)公式, 在体积 V_c 上对向量恒等式积分得到

$$\int_{V_c} \mathbf{U} \cdot \nabla P dV = \int_{L_c} P\mathbf{U} \cdot \mathbf{N} \mathfrak{R} dL - \int_{A_c} P \nabla \cdot \mathbf{U} \mathfrak{R} dA. \quad (16)$$

假定向量 \mathbf{U} 是常向量, 得到

$$\int_{V_c} \nabla P dV = \int_{L_c} PN \mathfrak{R} dL - \alpha \mathbf{e}_Y \int_{A_c} P dA. \quad (17)$$

由常向量 \mathbf{U} , 有 $\nabla \cdot \mathbf{U} = (\alpha/\mathfrak{R}) \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_Y$. 用 Green 公式和向量恒等式把梯度算子的体积分表示为面积分加源项, 保证与散度算子的面积分相容. 这个体积分应用于动量方程导出动量方程的体权公式:

$$m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \int_{L_c} PN \mathfrak{R} dL - \alpha \mathbf{e}_Y \int_{A_c} P dA = \mathbf{0}. \quad (18)$$

质量 $m_c = \int_{V_c} \rho dV$ 表示体积 V_c 的质量, 这个质量 $m_c = \int_{V_c} \rho dV$ 是 Lagrange 质量. 梯度算子的体积分改写为

$$\int_{V_c} \nabla P dV = \int_{A_c} \nabla P \mathfrak{R} dA = \bar{\mathfrak{R}} \int_{A_c} \nabla P dA. \quad (19)$$

这里已经应用了积分中值定理, $\bar{\mathfrak{R}}$ 是平均拟径. 将体积分

$$\bar{\mathfrak{R}} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} \mathfrak{R} dA \quad (20)$$

应用于动量方程导出动量方程的面权公式:

$$m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \bar{\mathfrak{R}} \int_{L_c} PN dL = \mathbf{0}. \quad (21)$$

因为 $m_c = V_c \rho_c$ 和 $\bar{\mathfrak{R}} = V_c/A_c$, 动量方程面权公式改写为

$$\mu_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \int_{L_c} PN dL = \mathbf{0}, \quad (22)$$

这里 $\mu_c = A_c \rho_c$ 表示面权. 我们指出 Cartesian 几何 $\bar{\mathfrak{R}} = 1$, 这时 $\alpha = 0$.

2.3 柱坐标高阶体权中心型守恒格式

动量方程和能量方程的柱坐标高阶体权空间离散

用对守恒律的单调迎风算法 (MUSCL) 构造高阶分片压力^[12] $H_{p,n}^c, p = 1, 2, \dots, p(c)$:

$$H_{p,n}^c = \tilde{\Pi}_{p,n}^c + \nabla \tilde{\Pi}_{p,n}^c, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \quad (23)$$

$$\begin{cases} \nabla \tilde{\Pi}_{p,n}^c = \frac{a_{c,n} \Delta t \mathfrak{R}_{p,c}^c (\mathbf{X}_{p,n}^c - \mathbf{X}_{c,n}^c)}{p(c)} \sum_{p=1}^{p(c)} \sum_{c=1}^{c(p)} \frac{1}{\tilde{V}_{p,n}^c} \mathfrak{R}_{p,\varrho,n}^c L_{p,\varrho,n}^c \mathbf{N}_{p,\varrho,n}^c \tilde{\Pi}_{p,n}^c, \\ \mathfrak{R}_{p,c} = \frac{(\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_c)}{2}, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \end{cases} \quad (24)$$

其中, Δt 是时间步长, $a_{c,n}$ 是网格 Ω_c 的声速. 沿着四边形子网格的边界, 这些高阶分片压力产生的力能够计算. 引入相关网格 Ω_c 和格点 p 的高阶体权子网格力 $\bar{\mathbf{F}}_{p,n}^c$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}_{p,n}^c = & \frac{1}{2} [\mathfrak{R}_{\varrho,n}^c L_{\varrho,n}^c \mathbf{N}_{\varrho,n}^c (H_{\varrho,n}^c + H_{p,n}^c) + \mathfrak{R}_p^c L_{p,n}^c \mathbf{N}_{p,n}^c (H_{p,n}^c + H_{\varrho,n}^c) + \\ & \mathfrak{R}_{b_1,c}^c d_{\varrho,n}^c \mathbf{D}_{\varrho,n}^c (H_{p,n}^c - H_{\varrho,n}^c) + \mathfrak{R}_{b_2,c}^c d_{p,n}^c \mathbf{D}_{p,n}^c (H_{p,n}^c - H_{\varrho,n}^c)]. \end{aligned} \quad (25)$$

长 $d_{\varrho,n}^c$ 和单位外法向 $\mathbf{D}_{\varrho,n}^c$ 是相关四边形子网格 cb_1pb_2 边 cb_1 的大小和单位外法向, 长 $d_{p,n}^c$ 和单位外法向 $\mathbf{D}_{p,n}^c$ 是相关四边形子网格 $cb_2p^+b_3$ 边 cb_2 的大小和单位外法向. 定义拟径:

$$\mathfrak{R}_{b_1,c} = \frac{(\mathfrak{R}_{b_1} + \mathfrak{R}_c)}{2}, \quad \mathfrak{R}_{b_2,c} = \frac{(\mathfrak{R}_{b_2} + \mathfrak{R}_c)}{2}.$$

用高阶体权子网格力和动量方程体权公式离散动量方程:

$$m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \sum_{p=1}^{p(c)} \bar{\mathbf{F}}_{p,n}^c - \sum_{p=1}^{p(c)} \mathbf{e}_Y \bar{P}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c) A_{p,n}^c = \mathbf{0}, \quad (26)$$

这里 $A_{p,n}^c$, $p = 1, 2, \dots, p(c)$ 是网格 Ω_c 的四边形子网格的面积.

$$\begin{aligned} \bar{P}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c) &= P_{c,n} + \Re_{p,c}(\mathbf{X}_{p,n}^c - \mathbf{X}_{c,n}) \cdot \nabla P_{c,n}, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \\ \nabla P_{c,n} &= \frac{a_{c,n} \Delta t}{p(c)} \sum_{p \in p(c)} \sum_{c \in c(p)} \frac{1}{\tilde{V}_{p,n}^c} \Re_{\bar{p},\bar{p}}^c L_{\bar{p},\bar{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},\bar{p},n}^c P_{c,n}. \end{aligned}$$

总能方程离散为

$$m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{p=1}^{p(c)} \bar{\mathbf{F}}_{p,n}^c \cdot \mathbf{U}_{p,n} = \mathbf{0}. \quad (27)$$

忽略边界力作功,所有网格动量求和:

$$\sum_c m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c = - \sum_c \left[\sum_{p \in p(c)} \bar{\mathbf{F}}_{p,n}^c - \sum_{p=1}^{p(c)} \mathbf{e}_Y \bar{P}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c) A_{p,n}^c \right]. \quad (28)$$

交换求和次序得到

$$\sum_c m_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c = - \sum_p \sum_{c=1}^{c(p)} \bar{\mathbf{F}}_{p,n}^c + \sum_c \sum_{p=1}^{p(c)} \mathbf{e}_Y \bar{P}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c) A_{p,n}^c. \quad (29)$$

动量守恒的条件:

$$\sum_{c=1}^{c(p)} \bar{\mathbf{F}}_{p,n}^c = \mathbf{0}. \quad (30)$$

条件(30)成立,因为作用于一点的所有力的和为 $\mathbf{0}$.

Lagrange 柱坐标高阶体权中心型守恒格式满足动量守恒、能量守恒,但不能确定保持一维球对称性.为了克服这个瑕疵,引入 Lagrange 柱坐标高阶面权中心型格式.

2.4 柱坐标高阶面权中心型格式

2.4.1 动量方程和能量方程的柱坐标高阶面权空间离散

用对守恒律的单调迎风算法(MUSCL)构造高阶压力^[12] $h_{p,n}^c, p = 1, 2, \dots, p(c)$:

$$h_{p,n}^c = \tilde{\Pi}_{p,n}^c + \bar{\Pi}_{p,n}^c, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \quad (31)$$

$$\begin{cases} \bar{\Pi}_{p,n}^c = \frac{a_{c,n} \Delta t (\mathbf{X}_{p,n}^c - \mathbf{X}_{c,n})}{p(c)} \sum_{p \in p(c)} \sum_{c \in c(p)} \frac{1}{\tilde{V}_{p,n}^c} L_{pc,n} \mathbf{N}_{pc,n} \tilde{\Pi}_{p,n}^c, \\ L_{pc,n} \mathbf{N}_{pc,n} = L_{\bar{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},n}^c + L_{\bar{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},n}^c, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \end{cases} \quad (32)$$

这里 Δt 是时间步长, $a_{c,n}$ 是网格 Ω_c 的声速.沿着四边形子网格的边界,这些高阶分片压力产生的力能够计算.引入相关网格 Ω_c 和格点 p 的高阶面权子网格力 $\tilde{\mathbf{f}}_{p,n}^c$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}_{p,n}^c &= \frac{1}{2} [L_{\bar{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},n}^c (h_{\bar{p},n}^c + h_{p,n}^c) + L_{\bar{p},n}^c \mathbf{N}_{\bar{p},n}^c (h_{p,n}^c + h_{\bar{p},n}^c) + \\ &\quad d_{\bar{p},n}^c \mathbf{D}_{\bar{p},n}^c (h_{p,n}^c - h_{\bar{p},n}^c) + d_{\bar{p},n}^c \mathbf{D}_{\bar{p},n}^c (h_{\bar{p},n}^c - h_{p,n}^c)]. \end{aligned} \quad (33)$$

长 $d_{\bar{p},n}^c$ 和单位外法向 $\mathbf{D}_{\bar{p},n}^c$ 是相关四边形子网格 cb_1pb_2 边 cb_1 的大小和单位外法向,长 $d_{p,n}^c$ 和单位外法向 $\mathbf{D}_{p,n}^c$ 是相关四边形子网格 $cb_2p^+b_3$ 边 cb_2 的大小和单位外法向.用高阶面权子网格力和动量方程面权公式离散动量方程:

$$\mu_c \frac{d}{dt} \mathbf{U}_c + \sum_{p=1}^{p(c)} \tilde{\mathbf{f}}_{p,n}^c = \mathbf{0}. \quad (34)$$

在离散情形下柱坐标网格中心点径向坐标 \bar{r} 定义为网格格点径向坐标 r 的平均值:

$$\bar{r} = \frac{1}{p(c)} \sum_{\rho=1}^{\rho(c)} r_{\rho,n},$$

这里 r_p 是格点 p 径向坐标 r . 总能方程离散为

$$m_c \frac{d}{dt} E_c + \sum_{\rho=1}^{\rho(c)} \tilde{f}_{\rho,n}^c \cdot (r_p \mathbf{U}_{\rho,n}) = 0. \quad (35)$$

总能量守恒的条件为

$$\sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{f}_{\rho,n}^c = \mathbf{0}.$$

2.4.2 解柱坐标高阶面权格式格点速度

在网格 Ω_c 的格点 p 引入一个压力, 这个压力由以单位隅角向量 $N_{\bar{\rho}, \bar{\rho}, n}^c$ 定义的半边 Riemann 问题确定.

$$\Pi_{pc} - \tilde{P}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c) + Z^c(\mathbf{U}_{p,n} - \tilde{\mathbf{U}}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c)) N_{pc,n} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \quad (36)$$

这里 Z^c 是网格 Ω_c 的声阻.

$$Z^c = \rho_{c,n} a_{c,n}.$$

$$\tilde{P}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c) = P_{c,n} + (\mathbf{X}_{p,n}^c - \mathbf{X}_{c,n}) \cdot \bar{P}_{c,n}, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \quad (37)$$

$$\bar{P}_{c,n} = \frac{a_{c,n} \Delta t}{p(c)} \sum_{p \in p(c)} \sum_{c \in c(p)} \frac{1}{\tilde{V}_{p,n}^c} L_{pc,n} N_{pc,n} P_{c,n}, \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c) = \mathbf{U}_{c,n} + (\mathbf{X}_{p,n}^c - \mathbf{X}_{c,n}) \cdot \bar{\mathbf{U}}_{c,n}, \quad p = 1, 2, \dots, p(c), \quad (39)$$

$$\bar{\mathbf{U}}_{c,n} = \frac{a_{c,n} \Delta t}{p(c)} \sum_{p \in p(c)} \sum_{c \in c(p)} \frac{1}{\tilde{V}_{p,n}^c} L_{pc,n} N_{pc,n} \otimes \mathbf{U}_{c,n}. \quad (40)$$

对应一个格点压力 Π_{pc} , 网格 Ω_c 的子网格力 \hat{f}_{pc} 为

$$\hat{f}_{pc} = L_{pc,n} \tilde{P}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c) N_{pc,n} - \tilde{\mathbf{M}}_{pc,n}(\mathbf{U}_{p,n} - \tilde{\mathbf{U}}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c)), \quad (41)$$

其中, $\tilde{\mathbf{M}}_{pc,n} = Z^c L_{\bar{\rho}, \bar{\rho}, n}^c N_{\bar{\rho}, \bar{\rho}, n}^c \otimes N_{\bar{\rho}, \bar{\rho}, n}^c$ 是 2×2 对称正定矩阵. 如果格点 p 在计算区域的内部, 它的邻域网格 $\Omega_c, c = 1, 2, \dots, c(p)$ 在计算区域内, 因为作用于一点 p 的所有力的和为 0, 可得

$$\sum_{c=1}^{c(p)} [L_{pc,n} (P_{c,n} + (\mathbf{X}_{p,n}^c - \mathbf{X}_{c,n}) \cdot \bar{P}_{c,n}) N_{pc,n} - \tilde{\mathbf{M}}_{pc,n}(\mathbf{U}_{p,n} - \tilde{\mathbf{U}}_{c,n}(\mathbf{X}_{p,n}^c))] = \mathbf{0}. \quad (42)$$

式(31)代入条件 $\sum_{c=1}^{c(p)} \tilde{f}_{\rho,n}^c = \mathbf{0}$ 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{c=1}^{c(p)} L_{pc,n} P_{c,n} N_{pc,n} + \sum_{c=1}^{c(p)} \frac{1}{2} \{ a_{c,n}^2 [L_{\bar{\rho}, \bar{\rho}, n}^c (\tilde{\rho}_{p,n}^c + \tilde{\rho}_{\bar{\rho}, n}^c - 2\rho_{c,n}) N_{\bar{\rho}, \bar{\rho}, n}^c + \\ & L_{\bar{\rho}, n}^c (\tilde{\rho}_{\bar{\rho}, n}^c + \tilde{\rho}_{p,n}^c - 2\rho_{c,n}) N_{\bar{\rho}, n}^c + d_{\bar{\rho}, n}^c \mathbf{D}_{\bar{\rho}, n}^c (\tilde{\rho}_{p,n}^c - \tilde{\rho}_{\bar{\rho}, n}^c) + d_{\bar{\rho}, n}^c \mathbf{D}_{\bar{\rho}, n}^c (\tilde{\rho}_{\bar{\rho}, n}^c - \tilde{\rho}_{p,n}^c)] + \\ & [L_{\bar{\rho}, n}^c (\tilde{\Pi}_{\bar{\rho}, n}^c + \tilde{\Pi}_{p,n}^c) N_{\bar{\rho}, n}^c + L_{\bar{\rho}, n}^c (\tilde{\Pi}_{p,n}^c + \tilde{\Pi}_{\bar{\rho}, n}^c) N_{\bar{\rho}, n}^c + \\ & d_{\bar{\rho}, n}^c \mathbf{D}_{\bar{\rho}, n}^c (\tilde{\Pi}_{p,n}^c - \tilde{\Pi}_{\bar{\rho}, n}^c) + d_{\bar{\rho}, n}^c \mathbf{D}_{\bar{\rho}, n}^c (\tilde{\Pi}_{\bar{\rho}, n}^c - \tilde{\Pi}_{p,n}^c)] \} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (43)$$

式(42)与条件(43)联立可得格点速度 $\mathbf{U}_{p,n}$.

2.4.3 柱坐标高阶面权中心型格式的二阶时间离散

所有的物理变量在当前时刻 n 都是已知的, 新时刻 t_n 物理量由下列方程得到:

$$\begin{cases}
 m_c(\tau_{c,n+1} - \tau_{c,n}) - \Delta t \sum_{p \in p(c)} L_{pc,n+1/2} N_{pc,n+1/2} U_{p,n+1/2} = 0, \\
 m_c(U_{c,n+1} - U_{c,n}) + \Delta t \sum_{p \in p(c)} \tilde{f}_{p,n+1/2}^c = 0, \\
 m_c(E_{c,n+1} - E_{c,n}) + \Delta t \sum_{p \in p(c)} \tilde{f}_{p,n+1/2}^c (r_{p,n+1/2} U_{p,n+1/2}) = 0, \\
 X_{p,n+1} = X_{p,n} + \Delta t U_{p,n+1/2}, X_{p,0} = x_p, \\
 U_{p,n+1/2} = U_{p,n} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} U_{p,n}, \\
 \tilde{f}_{p,n+1/2}^c = \tilde{f}_{p,n}^c + \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} \tilde{f}_{p,n}^c, \\
 L_{pc,n+1/2} N_{pc,n+1/2} = L_{pc,n} N_{pc,n} + \frac{\Delta t}{2} \frac{d}{dt} L_{pc,n} N_{pc,n}.
 \end{cases} \tag{44}$$

2.4.4 格点速度和高阶面权子网格力的时间导数

用链式规则,直接对高阶面权子网格力(式(33))求导

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \tilde{f}_{p,n}^c &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [L_{\rho,n}^c N_{\rho,n}^c (h_{\rho,n}^c + h_{p,n}^c) + L_{\bar{p},n}^c N_{\bar{p},n}^c (h_{p,n}^c + h_{\bar{p},n}^c) + \\
 &\quad d_{\rho,n}^c D_{\rho,n}^c (h_{p,n}^c - h_{\rho,n}^c) + d_{\bar{p},n}^c D_{\bar{p},n}^c (h_{p,n}^c - h_{\bar{p},n}^c)].
 \end{aligned} \tag{45}$$

压力的时间导数由非守恒型流体方程解出:

$$\frac{d}{dt} P_{c,n} = -\rho_{c,n} a_{c,n}^2 \nabla \cdot U_{c,n}. \tag{46}$$

对方程(42)求导可得到格点速度的时间导数.

2.4.5 Lagrange 柱坐标高阶面权中心型格式保持一维球对称性

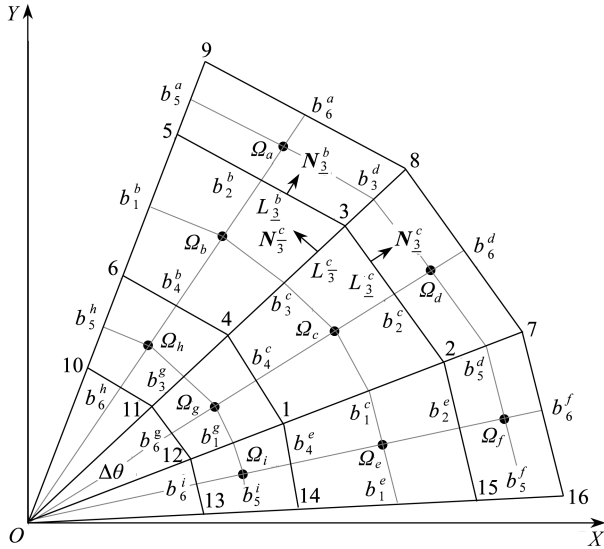


图3 四边形等角极坐标网格

Fig.3 The equal angle polar grid

图3显示等角极坐标网格,等角角度为 $\Delta\theta$.四边形等角极坐标网格 $\Omega_j(j=a,b,c,d,e,f,g,h,i)$, $j=a,b,c,d,e,f,g,h,i$ 是网格中心坐标,网格 $\Omega_j(j=a,b,c,d,e,f,g,h,i)$ 的格点 $p=1,2,\dots,16$.网格 $\Omega_j(j=a,b,c,d,e,f,g,h,i)$ 的中心点和边界中心 $b_p^j, p \in p(j)$ 把网格 Ω_j 划分为4个

四边形等角极坐标子网格 $\Omega_j^p (j = a, b, c, d, e, f, g, h, i), p \in p(j)$. 四边形等角极坐标子网格 $\Omega_j^7, \Omega_j^8, \Omega_j^9, \Omega_j^{10} (j = a, d, f)$ 是全等四边形等角极坐标子网格. 四边形等角极坐标子网格 $\Omega_j^2, \Omega_j^3, \Omega_j^5, \Omega_j^{15} (j = a, d, f)$ 是全等四边形等角极坐标子网格. 四边形等角极坐标子网格 $\Omega_j^2, \Omega_j^3, \Omega_j^5, \Omega_j^{15} (j = b, c, e)$ 是全等四边形等角极坐标子网格. 四边形等角极坐标子网格 $\Omega_j^6, \Omega_j^4, \Omega_j^1, \Omega_j^{14} (j = b, c, e)$ 是全等四边形等角极坐标子网格. 四边形等角极坐标子网格 $\Omega_j^6, \Omega_j^4, \Omega_j^1, \Omega_j^{14} (j = h, g, i)$ 是全等四边形等角极坐标子网格. 四边形等角极坐标子网格 $\Omega_j^{10}, \Omega_j^{11}, \Omega_j^{12}, \Omega_j^{13} (j = h, g, i)$ 是全等四边形等角极坐标子网格. 四边形子网格面积 $\tilde{A}_{1,n}^c$ 和 $\tilde{A}_{4,n}^c$ 相等, 四边形子网格面权质量 $\tilde{\mu}_1^c$ 和 $\tilde{\mu}_4^c$ 相等. 四边形子网格面密度 $\tilde{\rho}_{1,n}^c = \tilde{\mu}_1^c / \tilde{A}_{1,n}^c$ 和 $\tilde{\rho}_{4,n}^c = \tilde{\mu}_4^c / \tilde{A}_{4,n}^c$ 相等. 当前时刻四边形子网格压力 $\tilde{\Pi}_{1,n}^c$ 和 $\tilde{\Pi}_{4,n}^c$ 也相等:

$$\begin{cases} \tilde{\Pi}_{1,n}^c = a_{c,n}^2 (\tilde{\rho}_{1,n}^c - \rho_{c,n}) + P_{c,n}, \\ \tilde{\Pi}_{4,n}^c = a_{c,n}^4 (\tilde{\rho}_{4,n}^c - \rho_{c,n}) + P_{c,n}. \end{cases}$$

用对守恒律的单调迎风算法 (MUSCL) 构造 4 个四边形等角极坐标子网格压力 $\tilde{\Pi}_{p,n}^c (p = 1, 2, 3, 4)$ 增量的平均值 $\bar{\Pi}_{c,n}$, 这个平均值对 4 个四边形等角极坐标子网格压力都是相等的, 方向指向网格中心径向方向:

$$\bar{\Pi}_{c,n} = \frac{a_{c,n} \Delta t}{p(c)} \sum_{p \in p(c)} \sum_{c \in c(p)} \frac{1}{\tilde{V}_{p,n}^c} L_{pc,n} N_{pc,n} \tilde{\Pi}_{p,n}^c.$$

由于 $X_{1,n}^c - X_{c,n}$ 和 $X_{4,n}^c - X_{c,n}$ 关于网格中心径向方向是对称的, 因此 $\tilde{\Pi}_{1,n}^c$ 和 $\tilde{\Pi}_{4,n}^c$ 相等:

$$\tilde{\Pi}_{1,n}^c = (X_{1,n}^c - X_{c,n}) \bar{\Pi}_{c,n},$$

$$\tilde{\Pi}_{4,n}^c = (X_{4,n}^c - X_{c,n}) \bar{\Pi}_{c,n}.$$

因此 $h_{1,n}^c$ 和 $h_{4,n}^c$ 相等, 同理 $h_{2,n}^c$ 和 $h_{3,n}^c$ 相等:

$$\tilde{f}_{1,n}^c = \frac{1}{2} [L_{1,n}^c N_{1,n}^c (h_{4,n}^c + h_{1,n}^c) + L_{1,n}^c N_{1,n}^c (h_{1,n}^c + h_{2,n}^c) + d_{b_{1,n}}^c \mathbf{D}_{b_{1,n}}^c (h_{2,n}^c - h_{1,n}^c)],$$

$$\tilde{f}_{2,n}^c = \frac{1}{2} [L_{2,n}^c N_{2,n}^c (h_{1,n}^c + h_{2,n}^c) + L_{2,n}^c N_{2,n}^c (h_{3,n}^c + h_{2,n}^c) + d_{b_{1,n}}^c \mathbf{D}_{b_{1,n}}^c (h_{2,n}^c - h_{1,n}^c)],$$

$$\tilde{f}_{3,n}^c = \frac{1}{2} [L_{3,n}^c N_{3,n}^c (h_{2,n}^c + h_{3,n}^c) + L_{3,n}^c N_{3,n}^c (h_{3,n}^c + h_{4,n}^c) + d_{b_{3,n}}^c \mathbf{D}_{b_{3,n}}^c (h_{4,n}^c - h_{3,n}^c)],$$

$$\tilde{f}_{4,n}^c = \frac{1}{2} [L_{4,n}^c N_{4,n}^c (h_{4,n}^c + h_{3,n}^c) + L_{4,n}^c N_{4,n}^c (h_{1,n}^c + h_{4,n}^c) + d_{b_{3,n}}^c \mathbf{D}_{b_{3,n}}^c (h_{4,n}^c - h_{3,n}^c)].$$

长 $d_{b_{1,n}}^c$ 和单位外法向 $\mathbf{D}_{b_{1,n}}^c$ 是相关四边形子网格 $cb_1^c 2b_2^c$ 的边 cb_1^c 的大小和单位外法向, 长 $d_{b_{3,n}}^c$ 和单位外法向 $\mathbf{D}_{b_{3,n}}^c$ 是相关四边形子网格 $cb_3^c 4b_4^c$ 的边 cb_3^c 的大小和单位外法向.

因为 $L_{1,n}^c N_{1,n}^c$ 和 $L_{2,n}^c N_{2,n}^c$ 相等, $L_{4,n}^c N_{4,n}^c$ 和 $L_{3,n}^c N_{3,n}^c$ 相等, 则

$$\begin{aligned} \sum_{p \in p(c)} \tilde{f}_{p,n}^c &= (L_{1,n}^c N_{1,n}^c + L_{4,n}^c N_{4,n}^c) h_{1,n}^c + (L_{2,n}^c N_{2,n}^c + L_{3,n}^c N_{3,n}^c) h_{2,n}^c + \\ &\quad (L_{1,n}^c N_{1,n}^c + L_{4,n}^c N_{4,n}^c) (h_{1,n}^c + h_{2,n}^c) + (d_{b_{1,n}}^c \mathbf{D}_{b_{1,n}}^c - d_{b_{3,n}}^c \mathbf{D}_{b_{3,n}}^c) (h_{2,n}^c - h_{1,n}^c). \end{aligned}$$

因为向量 $L_{1,n}^c N_{1,n}^c + L_{4,n}^c N_{4,n}^c$ 和 $L_{2,n}^c N_{2,n}^c + L_{3,n}^c N_{3,n}^c$, $L_{1,n}^c N_{1,n}^c + L_{4,n}^c N_{4,n}^c$ 和 $d_{b_{1,n}}^c \mathbf{D}_{b_{1,n}}^c - d_{b_{3,n}}^c \mathbf{D}_{b_{3,n}}^c$ 方向都指向网格中心径向方向, 因此离散方程 (34) 的离散梯度算子 $\sum_{p \in p(c)} \tilde{f}_{p,n}^c$ 的方向指向网格中心径向方向. 经过一些初等代数运算后, 离散梯度算子的导数 $(d/dt) \sum_{p \in p(c)} \tilde{f}_{p,n}^c$ 的方向也指向

网格中心径向方向. 我们已经证明高阶离散方程(44)的动量方程的离散梯度算子 $\sum_{p \in p(c)} \tilde{f}_{p,n+1/2}^c$ 的方向指向网格中心径向方向.

同样证明, 格点速度是指向网格格点径向方向.

2.4.6 计算时间步长

计算时间步长 Δt , 在时间 t_n , $\lambda_{c,n}$ 表示网格 Ω_c 的两个格点之间距离的最小值.

$$\Delta t = \min_{c=1,2,\dots,l} \frac{\lambda_{c,n}}{\tilde{a}_{c,n}}, \quad (47)$$

其中, $\tilde{a}_{c,n}$ 为四边形子网格声速的最大值.

3 数值结果

例 1 Saltzman 活塞问题计算区域 $(x, y) \in [0, 0.1] \times [0, 1]$, 生成初始网格为映射

$$\begin{cases} X_t = x, \\ Y_t = y - (0.1 - x) \sin(y\pi) \end{cases}$$

变换均匀网格 100×10 而成. 初始状态 $(\rho_c^0, P_c^0, U_c^0) = (1, 0, 0)$ 采用理想气体状态方程, 气体绝热指数 $\gamma = 5/3$, 边界 $y = 1$ 的法向速度 $U_c^* = 1$ (入流条件), 对称轴 $y = 0$ 和区域左侧 $x = 0$ 与右侧 $x = 0.1$ 为反射边界, 运行时间 $t = 0.75$. 在柱坐标里, 我们不知道精确解. 文献[17]用柱坐标一维 Godunov 程序在均匀网格 500×50 上给出的结果: $t = 0.5$ 激波位置 $y = 0.265$, $t = 0.63$ 激波位置 $y = 0$, $t = 0.75$ 激波在底边反射后双激波区与单激波区交界位置 $y = 0.18$.

图 4 显示 Maire 柱坐标高阶面权中心型格式在初始网格上给出的在时间 $t = 0.75$ 时的网格; 图 5 显示 Maire 柱坐标高阶面权中心型格式在初始网格上给出的在时间 $t = 0.75$ 时的密度云图; 图 6 显示 Lagrange 柱坐标高阶面权中心型格式在初始网格上给出的在时间 $t = 0.75$ 时的网格; 图 7 显示 Lagrange 柱坐标高阶面权中心型格式在初始网格上给出的在时间 $t = 0.75$ 时的密度云图. 这是一维问题, 所有的网格变形都是虚假的. 结果比较的主要点在于 Lagrange 高阶面权中心型格式保持一维解非常好、抑制砂漏变形、消除虚假涡旋, Lagrange 柱坐标高阶面权中心型格式的结果非常接近于用柱坐标一维 Godunov 程序在均匀网格 500×50 上给出的结果. 计算的结果清楚显示 Lagrange 柱坐标高阶面权中心型格式的精确性. 而 Maire 柱坐标高阶面权中心型格式计算的结果是激波波阵面越来越倾斜. Maire 柱坐标高阶中心型格式消除不规则网格变形带来的虚假涡旋的同时也抑制了真实的物理涡旋, 损伤了数值模拟的精确性.

例 2 Noh 激波球反射问题^[21]

计算区域 $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$, 生成四边形极坐标网格. 第 1 种网格 M_1 划分为 50×5 , 第 2 种网格 M_2 划分为 100×10 . 初始条件: $\rho_c^0 = 1 \text{ g/cm}^3$, 径向速度 $U_c^0 = -1 \text{ cm/s}$. 边界条件: 对称轴 $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$ 和球心 $r = 0$ 为反射边界, 边界 $r = 1$ 的法向速度 $U_p^* = -1 \text{ cm/s}$ (入流条件). 采用理想气体状态方程, 气体绝热指数 $\gamma = 5/3$, 精确解 $t = 0.6 \text{ s}$ 时, 激波位置 $r = 0.2 \text{ cm}$, 激波区密度 64 g/cm^3 . 初始状态 $(\rho_c^0, P_c^0, U_c^0) = (1, 0, 0)$ 采用理想气体状态方程, 运行时间 $t = 0.6 \text{ s}$. 图 8、图 9 显示柱坐标高阶面权中心型格式第 1 种网格 50×5 和密度云图. 图 10、图 11 显示柱坐标高阶面权中心型格式第 2 种网格 100×10 和密度云图. 最后在表 1 里记录了 $t = 0.6 \text{ s}$ 时激波位置的平均值. 用 2 种网格 M_1, M_2 , 第 1 种网格 $t = 0.6 \text{ s}$ 时激波位置的平均值坐标 0.2103 cm , 第 2 种网格 $t = 0.6 \text{ s}$ 时激波位置的平均值 0.2034 cm . 我们看到数值解收敛于精确解, 由 M_1 网格和 M_2 网格计算的收敛阶是 1.599.

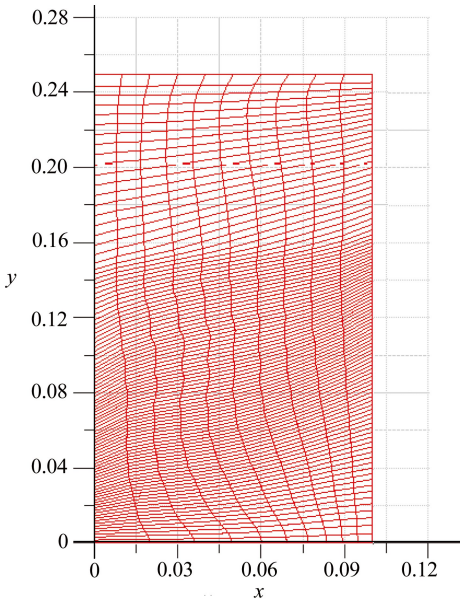


图 4 Maire 柱坐标高阶中心型面权格式, 时间 $t = 0.75$ 时的网格

Fig.4 Maire et al. high order area weighting cell-centered scheme in cylindrical geometry, the mesh at time $t = 0.75$

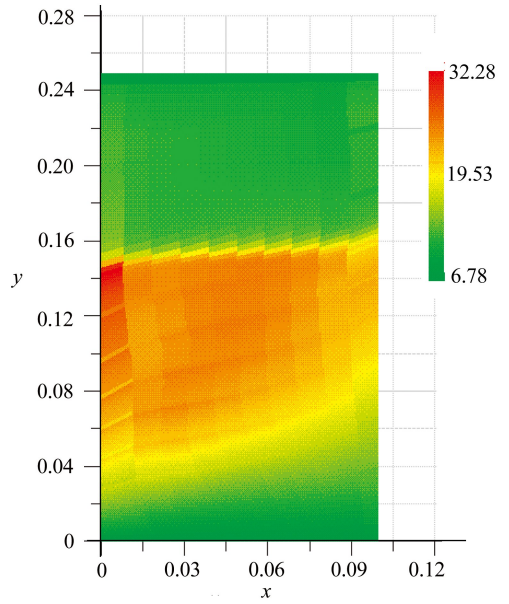


图 5 Maire 柱坐标高阶中心型面权格式, 时间 $t = 0.75$ 时的密度云图

Fig.5 Maire et al. high order area weighting cell-centered scheme in cylindrical geometry, a nephogram of the density at time $t = 0.75$

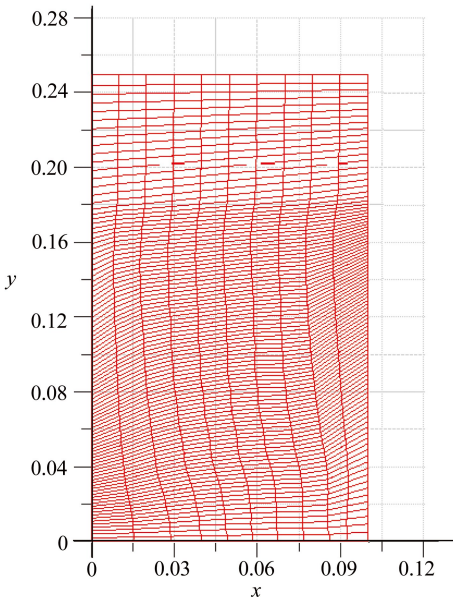


图 6 Lagrange 柱坐标高阶面权中心型格式, 时间 $t = 0.75$ 时的网格

Fig.6 Lagrange high order area weighting cell-centered scheme in cylindrical geometry, the mesh at time $t = 0.75$

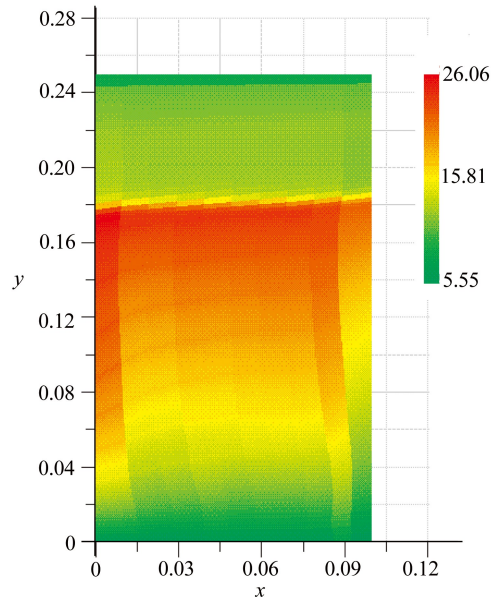


图 7 Lagrange 柱坐标高阶面权中心型格式, 时间 $t = 0.75$ 时的密度云图

Fig.7 Lagrange high order area weighting cell-centered scheme in cylindrical geometry, a nephogram of the density at time $t = 0.75$

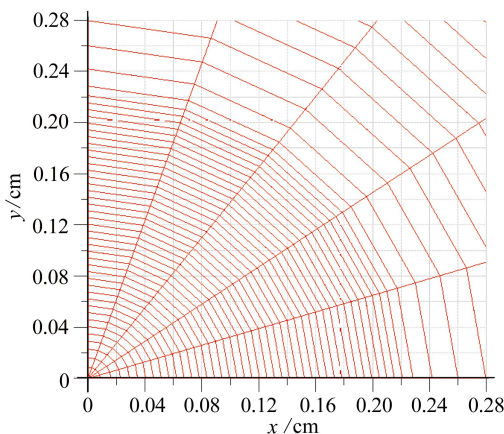


图 8 Lagrange 柱坐标高阶面积中心型格式, 时间 $t = 0.6$ s 时的第 1 种网格

Fig.8 Lagrange high order area weighting cell-centered scheme in cylindrical geometry, the 1st mesh at time $t = 0.6$ s

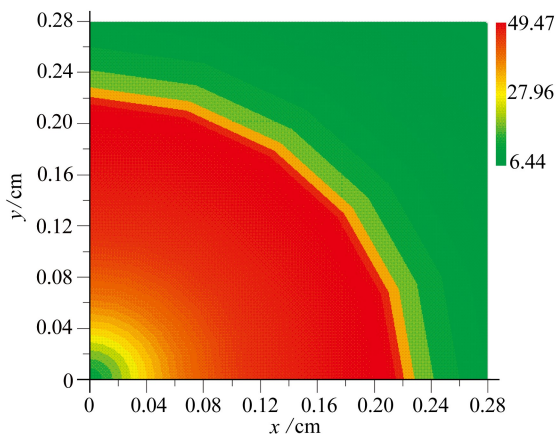


图 9 Lagrange 柱坐标高阶面积中心型格式, 时间 $t = 0.6$ s 时的第 1 种密度云图

Fig.9 Lagrange high order area weighting cell-centered scheme in cylindrical geometry, the 1st nephogram of the density at time $t = 0.6$ s

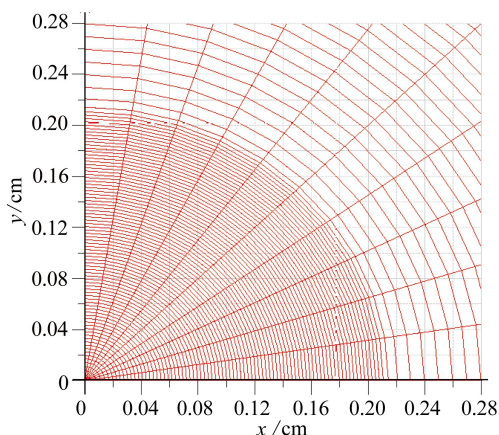


图 10 Lagrange 柱坐标高阶面积中心型格式, 时间 $t = 0.6$ s 时的第 2 种网格

Fig.10 Lagrange high order area weighting cell-centered scheme in cylindrical geometry, the 2nd mesh at time $t = 0.6$ s

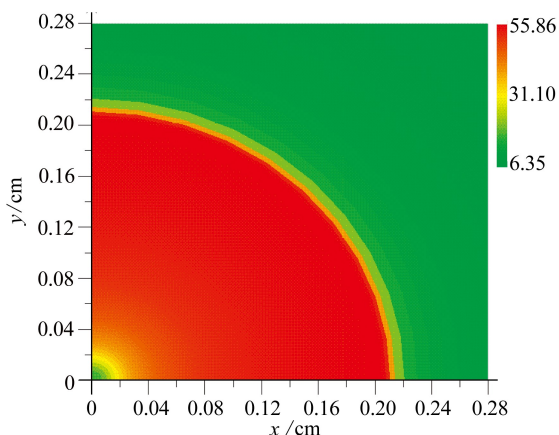


图 11 Lagrange 柱坐标高阶面积中心型格式, 时间 $t = 0.6$ s 时的第 2 种密度云图

Fig.11 Lagrange high order area weighting cell-centered scheme in cylindrical geometry, the 2nd nephogram of the density at time $t = 0.6$ s

表 1 数值解收敛精确解的收敛精度, 二阶精度格式 (α_2) 收敛阶是由 M_1 , M_2 网格计算的

Table 1 Convergence of the numerical solution towards the exact solution, in function of the 2nd order of the scheme (α_2) and of the mesh (the order of convergence is systematically computed with 2 meshes M_1 , M_2 in the list)

| mesh | grid | location | convergence order |
|-------|-----------------|----------|-------------------|
| M_1 | the first grid | 0.210 3 | |
| M_2 | the second grid | 0.203 4 | 1.599 |

4 结 论

本文实现了文献[21]给出的 Maire 柱坐标高阶中心型流体格式. 借用 Maire 在网格格点引

入两个压力的思想,假定在计算网格上压力是分片常数的基础上,提出、构造、实现柱坐标高阶体权中心型守恒格式和柱坐标高阶面权中心型守恒格式.利用能量守恒格式条件使得格点速度以与网格面的数值通量相容的方式计算.对 Saltzman 活塞问题进行了数值模拟,数值结果显示 Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒格式是高阶格式,同时显示 Maire 柱坐标高阶中心型流体格式的数值结果不正确.将来的工作拟建立 Lagrange 柱坐标高阶中心型守恒弹性流体格式.

参考文献 (References):

- [1] von Neumann J, Richtmyer R D. A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks[J]. *J Appl Phys*, 1950, **21**(3):232-238.
- [2] Wilkins M L. *Calculation of Elastic Plastic Flow, Methods in Computational Physics*[M]. Vol 3. New York and London: Berni Alder Academic Press, 1964: 211-263.
- [3] Campbell J C, Shashov J C. A tensor artificial viscosity using a mimetic finite difference algorithm[J]. *Journal of Computational Physics*, 2001, **172**(2): 739-765.
- [4] Caramana E J, Burton D E, Shashov M J, Whalen P P. The construction of compatible hydrodynamics algorithms utilizing conservation of total energy [J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **146**(1): 227-262.
- [5] Campbell J C, Shashov M J. A compatible Lagrangian hydrodynamics algorithm for unstructured grids[J]. *Selçuk J Appl Math*, 2003, **4**: 53-70.
- [6] Caramana E J, Shashkov M J. Elimination of artificial grid distortion and hourglass-type motions by means of Lagrangian subzonal masses and pressures[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **142**(2): 521-561.
- [7] Noh W F. Errors for calculations of strong shocks using artificial viscosity and an artificial heat flux[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **72**(1): 78-120.
- [8] Caramana E J, Shashkov M J, Whalen P P. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **144**(1): 70-97.
- [9] Maire P H, Loubère R, Vachal P. Staggered Lagrangian discretization based on cell-centered Riemann solver and associated hydrodynamics scheme[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **10**(4): 940-978.
- [10] Loubère R, Maire P H, Vachal P. A second order compatible staggered Lagrangian hydrodynamics scheme using cell-centered multi directional Riemann solver[J]. *Proc Comput Sci*, 2010, **1**(1): 1931-1939.
- [11] Morgan N R, Lipnikov K N, Burton D E, Kenamond M A. A Lagrangian staggered grid Godunov-like approach for hydrodynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2014, **259**: 568-597.
- [12] 葛全文. Lagrange 非结构网格高阶交错型守恒气体动力学格式[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(1): 92-101. (GE Quan-wen. A Lagrangian high order staggered conservative gasdynamics scheme on unstructured meshes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 92-101.(in Chinese))
- [13] Dukowicz J K, Meltz B. Vorticity errors in multidimensional Lagrangian codes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, **99**(1): 115-134.
- [14] Després B, Mazeran C. Lagrangian gas dynamics in two dimensions and Lagrangian systems [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2005, **178**(3): 327-372.
- [15] Carré G, Delpino S, Després B, Labourasse E. A cell-centered Lagrangian hydrodynamics scheme on general unstructured meshes in arbitrary dimension[J]. *Journal of Computational*

- Physics*, 2009, **228**(14) : 5160-5183.
- [16] Maire P H, Abgrall R, Breil J, Ovadia J. A cell-centered Lagrangian scheme for two-dimensional compressible low problems[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2007, **29**(4) : 1781-1824.
- [17] Shen Z J, Yuan G W, Yue J Y, Liu X Z. A cell-centered Lagrangian scheme in two-dimensional cylindrical geometry[J]. *Science in China, Series A: Mathematics*, 2008, **51**(8) : 1479-1494.
- [18] 葛全文. Lagrange 中心型守恒格式[J]. *应用数学和力学*, 2012, **33**(10) : 1239-1256.(GE Quan-wen. A Lagrangian cell-centered conservative scheme[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(10) : 1239-1256.
- [19] Maire P H, Breil J. A second-order cell-centered Lagrangian scheme for two-dimensional compressible flow problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008, **56**(8) : 1417-1423.
- [20] GE Quan-wen. High-order Lagrangian cell-centered conservative scheme on unstructured meshes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2014, **35**(9) : 1203-1222.
- [21] Maire P H. A high-order cell-centered Lagrangian scheme for compressible fluid flows in two-dimensional cylindrical geometry[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, **228**(18) : 6882-6915.

Lagrange High Order Cell-Centered Conservative Scheme in Cylindrical Geometry

GE Quan-wen

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, P.R.China*)

Abstract: A Lagrange high order cell-centered conservative scheme in cylindrical geometry was presented for gas dynamics. The high order volume weighting subcell force in cylindrical geometry and the high order area weighting subcell force in cylindrical geometry were introduced by means of the MUSCL type method to construct 2 Lagrange high order cell-centered conservative schemes in cylindrical geometry. The vertex velocities and the numerical fluxes through the cell interfaces were evaluated in a consistent manner due to an original solver located at the nodes. The volume weighting scheme satisfies the momentum conservation and energy conservation, but does not surely keep the 1D spherical symmetry. The area weighting scheme satisfies the energy conservation and preserves the 1D spherical symmetry. 2 numerical tests were conducted. The results demonstrate that the new scheme is a high order one with satisfactory validity and accuracy.

Key words: high order volume weighting subcell force; high order area weighting subcell force; Lagrange high order cell-centered conservative scheme; cylindrical geometry

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11172050; 11372051; 11001027)