

# 基于 RBF 神经网络模型的结构可靠度优化方法\*

李 刚, 孟 增

(大连理工大学 工程力学系;工业装备结构分析国家重点实验室(大连理工大学),辽宁 大连 116024)

**摘要:** 在结构构件尺寸、材料属性以及外部载荷等不确定性因素影响下,基于可靠度的优化给出了兼顾结构的成本和安全性能的安全设计方案.由于传统的可靠度优化方法采用嵌套的双层优化列式求解,因此导致计算量过大.为了克服这个问题,学者们相继提出了解耦方法和单循环方法等方法.该文采用 RBF 神经网络模型用于可靠度优化问题的求解中,通过拉丁超立方方法构造代理模型,并用误差指标来验证代理模型的精确程度,同时自适应更新代理模型直至满足需求.通过与现有可靠度优化 4 种主流算法的比较,说明了该文提出算法的高效性和稳健性.

**关键词:** 可靠度; 优化; RBF 神经网络; 效率; 稳健性

**中图分类号:** TB114.3; O213.2      **文献标志码:** A

**doi:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.11.010

## 引 言

由于实际工程中存在大量的不确定性因素,基于可靠度的优化设计近年来得到了很大的发展<sup>[1-3]</sup>.如何处理可靠度优化中的概率约束,发展兼顾精度、效率和鲁棒性的优化算法是可靠度优化的主要研究方向.一般来说,基于可靠度的优化算法根据求解策略分为 3 类:双层优化算法、单层优化算法和解耦优化算法.双层可靠度优化算法分为可靠指标法<sup>[1]</sup>和功能度量法<sup>[2]</sup>,包括内外两层优化模型,其中外层是对设计变量的确定性优化,当计算外层优化的概率约束时,则转向内层的概率约束进行可靠度分析.

双层可靠度优化算法计算成本较大,单层优化方法和解耦法随后被提出来以提高计算效率.Madsen 和 Hansen<sup>[4]</sup>利用 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 优化条件代替可靠度分析过程来减少函数调用次数.Chen 等<sup>[5]</sup>提出了单循环单向量方法,将概率约束转化为近似的确定性约束.程耿东和许林<sup>[6]</sup>提出了序列近似规划方法,在当前设计变量迭代点把可靠度指标 Taylor (泰勒)展开,把双层可靠度优化模型转变为一系列确定性子优化.随后 Yi 等<sup>[7]</sup>把序列近似优化策略拓展到稳健性更强的功能度量法上.Du 和 Chen<sup>[8]</sup>提出了序列优化和可靠性评估方法,把双层可靠度优化模型的确定性优化过程和可靠度循环变成两个独立的求解过程.

\* 收稿日期: 2014-05-15; 修订日期: 2014-06-09

基金项目: 国家自然科学基金(11372061; 91315301)

作者简介: 李刚(1966—),男,太原人,教授,博士,博士生导师(通讯作者).

E-mail: ligang@dlut.edu.cn;

孟增(1987—),男,甘肃陇南人,博士生(E-mail: mengz@mail.dlut.edu.cn).

随着可靠度优化理论的不完善,越来越多的实际工程通过可靠度优化来减少结构的成本、提高结构的安全性.许林等<sup>[9]</sup>利用序列近似优化方法解决了系统可靠度约束下机械公差优化分配问题.Youn 等<sup>[10]</sup>通过可靠度优化实现了汽车轻量化设计的同时大幅提高了其安全性能.虽然这些已有的算法通过不同的改进策略提高了可靠度优化方法的求解速度和收敛性,但是对于比较复杂的实际模型计算成本仍然过大,因此有必要提出一种高效稳健的优化方法.

RBF 神经网络作为一种代理模型技术,由于其较好的近似能力,已经被用到可靠度计算中<sup>[11]</sup>.因此本文将 RBF 神经网络模型应用于可靠度优化问题,利用 RBF 神经网络把目标函数和功能函数分别近似,然后使用误差分析手段对代理模型进行检验,根据检验误差自动更新 RBF 神经网络模型.最后对基于代理模型的可靠度优化列式求解,并通过与现有 4 种可靠度优化主流算法的比较来说明本文提出算法的高效性和稳健性.

## 1 基于可靠度优化的算法

### 1.1 基于可靠度优化模型

基于可靠度优化的广义数学模型<sup>[8]</sup>可写为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{d}} C(\mathbf{d}) \\ \text{s.t. } P_f(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq 0) \leq P_i^f, & i = 1, 2, \dots, m, \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0, & j = m + 1, m + 2, \dots, M, \\ d_k^l \leq d_k \leq d_k^u, & k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{d}$  是设计变量,可以是确定性变量或者随机变量的参数; $\mathbf{x}$  是随机变量; $C$  是目标函数; $h_j(\mathbf{d})$  是第  $j$  个确定性约束; $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x})$  表示第  $i$  个功能函数; $G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) > 0$  代表结构失效,其失效概率的定义为

$$P_f(G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \geq 0) = \int \cdots \int_{-G_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad (2)$$

式中  $f(\mathbf{x})$  是随机变量  $\mathbf{x}$  的联合概率密度函数,失效概率  $P_f$  可以通过 Monte-Carlo(蒙特-卡洛)模拟或者矩方法进行计算.

### 1.2 可靠指标法

可靠度指标法用可靠度指标来代替优化模型中的概率约束<sup>[11]</sup>,则原优化列式转化为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{d}} C(\mathbf{d}), \\ \text{s.t. } \beta_i^f \leq \beta_i(\mathbf{d}, \mathbf{x}), & i = 1, 2, \dots, m, \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0, & j = m + 1, m + 2, \dots, M, \\ d_k^l \leq d_k \leq d_k^u, & k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\beta_i$  和  $\beta_i^f$  分别是第  $i$  个功能函数的可靠度指标和目标可靠度指标.内层的可靠度指标的求解可以写成一个优化模型:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|, \\ \text{s.t. } G_i(\mathbf{u}) \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\mathbf{u}$  为在标准正态空间中的设计变量,通过对随机变量  $\mathbf{x}$  的变换( $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$ )得到,其中优化问题的最优点  $\mathbf{u}^*$  被称为最可能失效概率点.

### 1.3 功能度量法

由于可靠度指标法在求解初始点较远以及高度非线性问题时容易导致不收敛,所以 Tu, Choi 等<sup>[2]</sup>通过逆可靠度分析,在标准正态空间中把可靠度指标约束转变为功能函数约束进行求解

$$\begin{cases} \min_d C(\mathbf{d}), \\ \text{s.t. } G_i \geq 0, & i = 1, 2, \dots, m, \\ h_j(\mathbf{d}) \leq 0, & j = m + 1, m + 2, \dots, M, \\ d_k^l \leq d_k \leq d_k^u, & k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (5)$$

其中内部的循环优化模型被定义为

$$\begin{cases} \min_u G(\mathbf{u}), \\ \text{s.t. } \|\mathbf{u}\| = \beta_i^l, \end{cases} \quad (6)$$

式中优化问题的最优点被定义为最小功能目标点,一般通过改进均值法<sup>[12]</sup>、共轭法<sup>[13]</sup>等方法进行计算求解,本文采用稳健性较好的修正的混沌控制方法<sup>[14]</sup>求解。

## 2 RBF 神经网络

如图 1 所示,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是 RBF 神经网络的  $n$  个输入值,  $y_1, y_2, \dots, y_m$  是  $m$  个预测值,  $R_1, R_2, \dots, R_p$  是  $p$  个的隐含层神经元.从图中可以看出,RBF 神经网络可以看成是一个非线性函数,网络的输入值和输出值则分别对应该函数的自变量和因变量.其中隐含层采用径向基函数作为激励函数,它的定义为

$$R_j(\mathbf{x}) = \exp\left[-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\|^2}{2\sigma_j^2}\right], \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (7)$$

式中  $\mathbf{c}_j$  是隐含层第  $j$  个单元 Gauss(高斯)函数的中心点; $\sigma_j$  是隐节点的宽度.RBF 神经网络的训练过程主要分为两步:第 1 步是隐含层输出计算,根据输入样本来确定隐含层各神经元的参数  $\mathbf{c}_j$  和  $\sigma_j$ ,以及输入层参数和隐含层之间的连接权值;第 2 步是输出层输出计算,利用样本数据和最小二乘法原理,确定隐含层和输出层之间的权值。

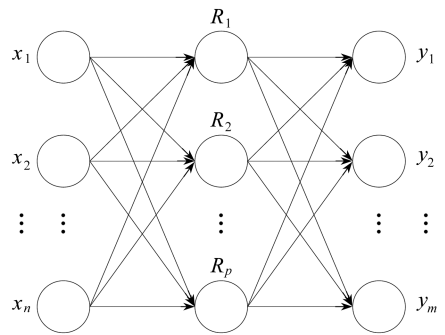


图 1 RBF 神经网络结构

Fig.1 Structure of RBF neural network

## 3 基于 RBF 神经网络的可靠度优化

一般在代理模型构建完成以后需要对代理模型的准确程度进行检验,因此本文采用工程中常用的 3 种误差指标<sup>[15]</sup>对 RBF 神经网络模型检验:

$$\alpha_{\%RMSE} = 100 \frac{\sqrt{(1/n) \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}}{(1/n) \sum_{i=1}^n y_i}, \quad (8a)$$

$$\alpha_{\%AvgErr} = 100 \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n |y_i - \tilde{y}_i|}{(1/n) \sum_{i=1}^n y_i}, \quad (8b)$$

$$\alpha_{\%MaxErr} = \max \left[ \frac{100 |y_i - \tilde{y}_i|}{(1/n) \sum_{i=1}^n y_i} \right], \quad (8c)$$

式中  $\alpha_{\%RMSE}$  是均方根百分误差,  $\alpha_{\%AvgErr}$  是平均百分误差,  $\alpha_{\%MaxErr}$  是最大百分误差. 均方根误差和平均百分误差表示代理模型的全局误差, 最大百分误差表示代理模型的局部最大误差. 这 3 个指标的值越小, 则意味着代理模型对真实模型拟合得越精确. 如图 2 所示, 本文提出的基于 RBF 神经网络代理模型的可靠度优化方法的计算步骤为

- 1) 利用拉丁超立方方法在设计域内均匀抽样, 并计算这些样本点对应目标函数和约束的输出值.
- 2) 根据样本点的输入和输出对目标函数和约束分别构造 RBF 神经网络模型.
- 3) 利用拉丁超立方方法随机产生另外一组数据, 并用上述 3 个误差指标对所有的函数进行误差检验. 如果代理模型的 3 个误差指标都能够满足精度要求, 则进入下一步, 否则将验证的数据加入原数据点后返回第 2) 步.
- 4) 当 RBF 神经网络模型建立成功以后, 则使用基于修正混沌控制功能度量法求解可靠度问题, 其中内部可靠度信息通过稳健性较好的修正的混沌控制方法来计算.

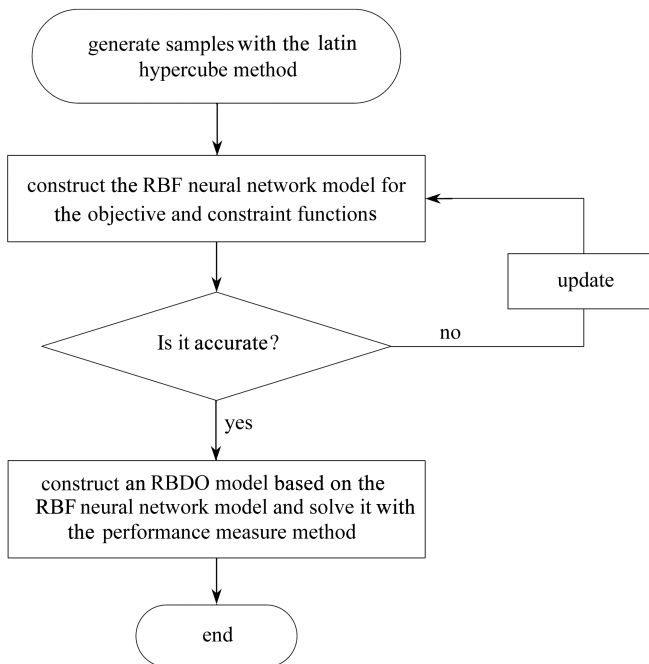


图 2 基于 RBF 神经网络可靠度优化法流程图

Fig.2 Flowchart of the RBDO approach based on the RBF neural network model

## 4 算例分析

### 算例 1<sup>[3]</sup> 3 约束可靠度优化模型

其中设计变量  $\mathbf{d} = \{\mu_{x_1}, \mu_{x_2}\}$  是随机变量  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$  的均值, 初始点为  $\{5.0, 5.0\}$ . 两个随机变量都服从变异系数为 0.3 的 Gauss 分布或对数正态分布.

$$\begin{cases} \min \mu_{x_1} + \mu_{x_2}, \\ \text{s.t. } \Pr[G_i(\mathbf{x})] \leq \Phi(-\beta^{\text{accept}}), \quad i = 1, 2, 3, \\ 0 \leq \mu_{x_1} \leq 10, 0 \leq \mu_{x_2} \leq 10, \\ G_1(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2 / 20 - 1, \\ G_2(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 - 5)^2 / 30 + (x_1 - x_2 - 12)^2 / 120 - 1, \\ G_3(\mathbf{x}) = 80 / (x_1^2 + 8x_2 + 5) - 1, \\ \beta^{\text{accept}} = 3. \end{cases} \quad (9)$$

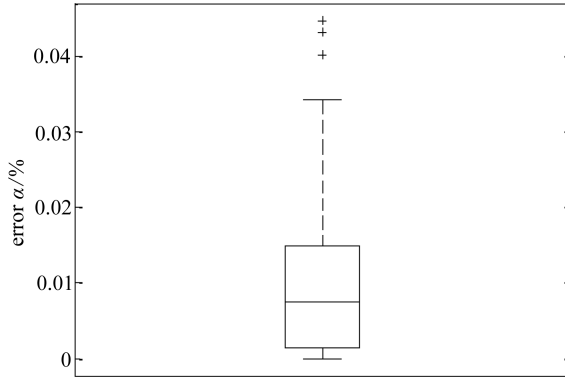


图3 目标函数在最优点的相对误差

Fig.3 Relative error of the objective function at the optimum point

考虑到 RBF 神经网络模型构造过程中抽样点的选取和更新具有随机性,本文把基于 RBF 神经网络模型的可靠度优化方法重复计算 30 次并用平均的函数计算次数代表计算效率.表 1 和图 3 中分别给出了不同方法的计算结果以及基于 RBF 神经网络模型的误差箱线图,其中 method 表示计算方法,  $C$  和  $d$  是最优点的目标函数以及设计变量值,  $N$  是函数调用次数.从表中可以看出所有的方法都能找到最优解,但是由于可靠指标法和功能度量法需要解决嵌套的内外双层优化列式,因此计算效率最低.序列优化和可靠性方法把原有的优化问题从外层的优化列式中解耦出来,提高了计算效率.序列近似规划法则通过 Taylor 展开把原优化列式转化成了一系列子优化问题,进一步提高了效率.本文提出的方法比其它方法速度更快,且所有 30 次计算误差都在 0.05% 以内,能够得到满意的结果.

表 1 不同可靠度算法的比较结果

Table 1 Optimal results of different RBDO approaches

method	$C$	$d$	$N$
RIA	6.725 7	(3.439 1, 3.286 6)	429
PMA	6.725 7	(3.439 1, 3.286 6)	411
SORA	6.725 7	(3.439 1, 3.286 6)	288
SAP	6.725 7	(3.439 1, 3.286 6)	96
proposed	6.725 7	(3.439 1, 3.286 6)	34

### 算例 2<sup>[8]</sup> 减速器

如图 4 所示考虑一个用于旋转发动机的减速器,随机变量包括齿轮宽度 ( $x_1$ )、齿轮模数 ( $x_2$ )、小齿轮的齿数 ( $x_3$ )、轴承之间的距离 ( $x_4, x_5$ ) 和每个轴直径 ( $x_6, x_7$ ),所有的随机变量都

服从标准差是 0.005 的标准正态分布,设计变量  $\mathbf{d} = \{\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_7}\}$  取随机变量的均值,初始点设计点为 (3.5, 0.7, 17.0, 7.3, 7.72, 3.35, 5.29), 则基于可靠度优化模型可表示为

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \min f(\mathbf{d}) = 0.7854 \mu_{x_1} \mu_{x_2}^2 (3.3333 \mu_{x_3}^2 + 14.9334 \mu_{x_3} - 43.0934) + \\
 & 1.508 \mu_{x_1} (\mu_{x_6}^2 + \mu_{x_7}^2) + 7.477 (\mu_{x_6}^3 + \mu_{x_7}^3) + \\
 & 0.7854 (\mu_{x_4} \mu_{x_6}^2 + \mu_{x_5} \mu_{x_7}^2), \\
 & \text{s.t. } \Pr[G_i(\mathbf{x}) > 0] \leq \Phi(-\beta^{\text{accept}}), \quad i = 1, 2, 3, \\
 & G_1(\mathbf{x}) = \frac{27}{x_1 x_2^2 x_3} - 1, \quad G_2(\mathbf{x}) = \frac{397.5}{x_1 x_2^2 x_3^2} - 1, \\
 & G_3(\mathbf{x}) = \frac{1.93 x_4^3}{x_2 x_3 x_6^4} - 1, \quad G_4(\mathbf{x}) = \frac{1.93 x_5^3}{x_2 x_3 x_7^4} - 1, \\
 & G_5(\mathbf{x}) = \sqrt{\left(\frac{745 x_4}{x_2 x_3}\right)^2 + 16.9 \times 10^6} / 0.1 x_6^3 - 1100, \\
 & G_6(\mathbf{x}) = \sqrt{\left(\frac{745 x_5}{x_2 x_3}\right)^2 + 157.5 \times 10^6} / 0.1 x_7^3 - 850, \\
 & G_7(\mathbf{x}) = x_1 x_3 - 40, \quad G_8(\mathbf{x}) = 5 - \frac{x_1}{x_2}, \\
 & G_9(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{x_2} - 12, \quad G_{10}(\mathbf{x}) = \frac{15 x_6 + 1.9}{x_4} - 1, \\
 & G_{11}(\mathbf{x}) = \frac{1.1 x_7 + 1.9}{x_5} - 1, \\
 & 2.6 \leq \mu_{x_1} \leq 3.6, \quad 0.7 \leq \mu_{x_2} \leq 0.8, \quad 17 \leq \mu_{x_3} \leq 28, \\
 & 7.3 \leq \mu_{x_4} \leq 8.3, \quad 7.3 \leq \mu_{x_5} \leq 8.3, \quad 2.9 \leq \mu_{x_6} \leq 3.9, \\
 & 5.0 \leq \mu_{x_7} \leq 5.5, \\
 & \beta^{\text{accept}} = 3.
 \end{aligned} \right. \tag{10}$$

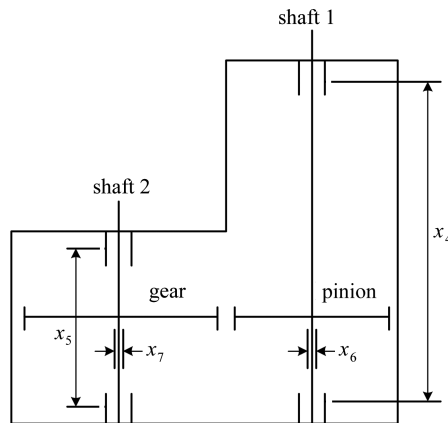


图 4 减速器模型

Fig.4 A speed reducer model

从表 2 中可以看出,所有的可靠度优化方法都能找到最优解.其中可靠度指标法的效率最低,功能度量法与序列优化和可靠性方法次之,序列近似规划方法的计算效率远高于前 3 种方法.本文提出的基于 RBF 神经网络模型的优化算法函数效率最高,函数调用次数仅用了序列近似规划方法的 1/3.且由图 5 可以看出所有的计算误差都在 1.4%,满足实际工程的需要.

表 2 采用不同基于可靠度优化策略的优化方法的结果

Table 2 Optimal results of different deterministic optimization methods with different RBDO strategies

method	$C$	$d$	$N$
RIA	3 038.6	(3.576, 0.7, 17, 7.3, 7.754, 3.365, 5.301)	4 328
PMA	3 038.6	(3.577, 0.7, 17, 7.3, 7.754, 3.365, 5.302)	1 344
SORA	3 038.6	(3.576, 0.7, 17, 7.3, 7.754, 3.365, 5.302)	918
SAP	3 038.6	(3.576, 0.7, 17, 7.3, 7.754, 3.365, 5.302)	384
proposed	3 028.0	(3.578, 0.7, 17, 7.3, 7.754, 3.369, 5.301)	96

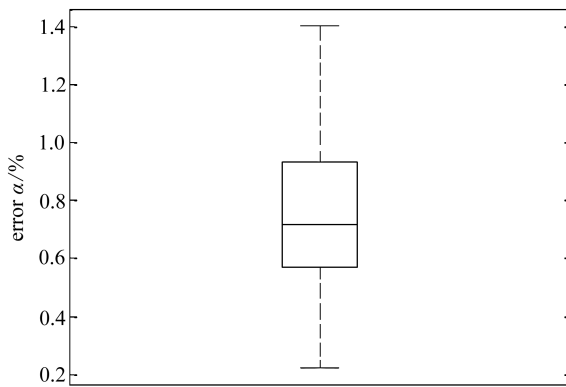


图 5 减速器目标函数在最优点的相对误差

Fig.5 Relative error of the objective function at the optimum point for the speed reducer model

## 5 结 论

本文将 RBF 神经网络模型用到可靠度优化问题的求解中.通过拉丁超立方的样本构造代理模型,且用误差指标来验证代理模型的精确程度,同时自适应的更新代理模型直至满足实际需求.算例分析表明,利用 RBF 神经网络代理模型进行可靠度优化计算,在达到误差需求的同时能够明显地降低结构的计算量.对于较复杂的实际模型,RBF 神经网络模型也能够取得非常好的计算效果.

## 参考文献(References):

- [1] Nikolaidis E, Burdisso R. Reliability-based optimization: a safety index approach[J]. *Computers & Structures*, 1988, **28**(6): 781-788.
- [2] Tu J, Choi K K, Park Y H. A new study on reliability-based design optimization[J]. *Journal of Mechanical Design*, 1999, **121**(4): 557-564.
- [3] Liang J, Mourelatos Z P, Tu J. A single-loop method for reliability-based design optimisation [J]. *International Journal of Product Development*, 2008, **5**(1): 76-92.
- [4] Madsen H O, Hansen P F. A comparison of some algorithms for reliability based structural op-

- timization and sensitivity analysis[C]//*Proceedings of the 4th IFIPWG 75 Conference*. Munich, Germany, 1991.
- [5] CHEN Xiao-guang, Hasselman T K, Neill D J. Reliability based structural design optimization for practical applications[C]//*Proceedings of the 38th AIAA/ASME/ASCE /AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Kissimmee, FL, 1997.
- [6] 程耿东, 许林. 基于可靠度的结构优化的序列近似规划算法[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(6): 641-646. (CHENG Geng-dong, XU Lin. Sequential approximate programming approach to reliability based structural optimization[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(6): 641-646. (in Chinese))
- [7] Yi P, Cheng G, Jiang L. A sequential approximate programming strategy for performance-measure-based probabilistic structural design optimization[J]. *Structural Safety*, 2008, **30**(2): 91-109.
- [8] Du X, Chen W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2004, **126**(2): 225-233.
- [9] 许林, 程耿东, 易平. 利用系统可靠度约束下的优化设计求解公差分配问题[J]. 机械强度, 2007, **28**(6): 839-844. (XU Lin, CHENG Geng-dong, YI Ping. Tolerance assignment using algorithm for system reliability based optimal design[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2007, **28**(6): 839-844. (in Chinese))
- [10] Youn B D, Choi K K, Yang R J, Gu L. Reliability-based design optimization for crashworthiness of vehicle side impact[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2004, **26**(3/4): 272-283.
- [11] Xu K, Xie M, Tang L C, Ho S T. Application of neural networks in forecasting engine systems reliability[J]. *Applied Soft Computing*, 2003, **2**(4): 255-268.
- [12] Wu Y T, Millwater H R, Cruse T A. Advanced probabilistic structural analysis method for implicit performance functions[J]. *AIAA Journal*, 1990, **28**(9): 1663-1669.
- [13] Youn B D, Choi K K, Park Y H. Hybrid analysis method for reliability-based design optimization[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2003, **125**(2): 221-232.
- [14] Li G, Meng Z. A modified chaos control approach of the performance measure functions for reliability-based design optimization[C]//*10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Orlando, Florida, USA, 2013.
- [15] Venter G, Haftka R T, Chirehdast M. Response surface approximations for fatigue life prediction[C]//*Proceedings of the 38th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Material Conference and AIAA/ASM/AHS Adaptive Structures Forum*. Kissimmee, FL, 1997.



# Reliability-Based Design Optimization With the RBF Neural Network Model

LI Gang, MENG Zeng

*(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment  
(Dalian University of Technology); Department of Engineering Mechanics,  
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)*

**Abstract:** The reliability-based design optimization (RBDO) provides a trade-off between cost and safety given a lot of uncertain factors, such as structure sizes, material properties and external loads. The traditional RBDO approaches were computationally expensive owing to the nesting bilevel optimization. Thereafter, the decoupling approach and single loop approach were proposed to overcome this obstruction. However, the computational demand of these 2 types of approaches was still too huge for complex engineering problems. Here a new adaptive RBDO approach was presented based on the RBF neural network theory. The latin hypercube sampling method was used to construct the surrogate model. The error metrics were used to validate the RBF neural network model and the surrogate model was updated adaptively. Compared with the previous 4 popular RBDO algorithms, the presented method is efficient and robust.

**Key words:** reliability; optimization; RBF neural network; efficiency; robustness

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China(11372061; 91315301)