文章编号:1000-0887(2014)12-1299-09


# 辛 Runge-Kutta 方法在卫星交会对接中的非线性动力学应用研究*

李庆军, 叶学华, 王 博, 王 艳

(西北工业大学 力学与土木建筑学院 工程力学系, 西安 710072)

(我刊编委谢公南推荐)

**摘要:** 卫星交会对接问题是实现太空平台等空间系统的关键问题之一.考虑了由于地球引力作用而引起的卫星交会对接中的非线性动力学问题.首先,采用能量方法给出 Lagrange 函数;然后,通过引入广义坐标和广义动量,以及 Legendre 变换,得到 Hamilton 方程;随后,采用辛 Runge-Kutta 方法求解该 Hamilton 方程,并与传统的四阶 Runge-Kutta 方法对比.数值结果表明:辛 Runge-Kutta 方法能够在积分过程中长时间保持系统的固有特性,为天体动力学问题的研究提供了良好的数值方法.

**关 键 词:** 卫星空间交会对接; 非线性动力学; Hamilton 系统; 辛 Runge-Kutta 方法

**中图分类号:** O313.7 **文献标志码:** A

doi: 10.3879/j.issn.1000-0887.2014.12.002

## 引 言

卫星的空间交会技术是大型空间飞行器在轨组装和建造空间站的必要条件,对在轨卫星进行燃料补给、更换重要组件、升级设备的卫星、卫星俘获等军事和民用方面有着重要的作用,具有广阔的应用前景[1].

卫星空间交会研究的是追踪飞行器和目标飞行器的相对运动问题,难点在于其相对运动方程是非线性微分方程,目前还找不到解析解,因此该模型在空间交会动力学与控制中的应用受到一定的限制.1960 年,Clohessy 和 Wiltshire[2] 在研究空间临近航天器交会问题时,推导了线性化的相对运动微分方程组用于刻画飞行器交会问题,即 C-W(Clohessy-Wiltshire)方程.针对 C-W 方程,林来兴给出了相应的解析解[3].由于 C-W 方程是线性微分方程,形式简单,有解析解,因此在卫星空间交会和卫星编队保持方面都得到广泛的应用[4-5].然而,C-W 方程在研究卫星空间交会时存在以下两点不足[3]:1) 只适用于近圆轨道空间交会问题;2) 只适用于短时间、短距离交会.研究者们又推导了卫星空间交会的非线性动力学模型.在目标飞行器上建立轨道坐标系,卫星空间交会的非线性微分方程可通过追踪飞行器在仅受重力作用时的 Lagrange 方程严格推导,通过将非线性部分线性化可得到 C-W 方程.林来兴[6] 通过数值分析说明,非线性动力学方程比 C-W 方程在长时间制导过程中有更高的精确度.然而,非线性方程由

---

* **收稿日期:** 2014-06-03; **修订日期:** 2014-10-09

**基金项目:** 国家自然科学基金(11172239;11372252); 高校博士点基金(20126102110023);中央高校基本科研业务费专项资金(310201401JCQ01001;3102014JCQ01041)

**作者简介:** 李庆军(1992—),男,广东人,博士生(通讯作者. E-mail: lqingjun@163.com).

于没有解析解,这些工作在卫星空间交会过程没有得到广泛的应用.

对于复杂的非线性动力学系统,一般解析解很难得到,因此非线性动力学方程的数值解在动力学中显得尤其重要.1835 年,英国科学家 Hamilton 在 Lagrange 系统下通过引入广义动量的概念,得到了广泛应用于物理学上的一套完整的动力学理论,称为 Hamilton 系统[7].Hamilton 系统有很多优越的内在特性,如 Hamilton 系统的运动状态变换为辛变换、它的相流形保持相空间的面积和体积不变、保持能量和动量不变等[8-10].在数值计算过程中自然希望能保持 Hamilton 系统这些特性,这样的算法称为辛算法.1984 年,冯康院士在北京举行的国际微分方程与微分几何的会议上作报告,首次系统地提出了辛几何上的辛算法[11].目前,构造辛算法的方法有很多,常用的有:生成函数法[8]、Runge-Kutta 法、组合方法等.一般的线性算法中只有 Runge-Kutta 可能是辛的,并且显式的 Runge-Kutta 方法不可能是辛算法,Sanz-Serna,Lasagni 和 Suris[12-14]给出了 Runge-Kutta 方法是辛算法的系数所要满足的条件.用 Runge-Kutta 方法构造的辛算法称为辛 Runge-Kutta 法,其优点是构造简单、适用范围广,因此获得了广泛的应用.辛算法在数值积分中能够保持长时间的稳定性和跟踪能力,在强场物理、非线性物理和天体物理中有着广泛的应用[9].刘琳、赵长印等将辛算法运用于天文动力学中,得到了比传统算法更好的效果[15-16].

以往对卫星空间交会动力学的研究都是在 Lagrange 体系下进行的,因此也没有使用辛算法.本文将精确的卫星空间交会非线性动力学模型引入到 Hamilton 系统中,并采用辛 Runge-Kutta 方法求解.通过与传统的四级四阶 Runge-Kutta 方法对比,研究了辛算法在长时间数值积分问题中的保结构特性和稳定性.

## 1　Hamilton 体系下卫星空间交会的动力学模型

为研究追踪飞行器相对于目标飞行器的运动问题,假定目标飞行器的轨道为圆形轨道,且忽略卫星在轨道上受到的各种摄动力,在轨道坐标系下建立追踪飞行器相对于目标飞行器的动力学微分方程.如图 1 所示,坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 为绝对坐标系,坐标系 $O_2X_2Y_2Z_2$ 为轨道坐标系,$O_2Y_2$ 轴的方向始终与 $\overrightarrow{O_1O_2}$ 的方向重合,$O_1Z_1$ 轴、$O_2Z_2$ 轴与目标飞行器的角速度方向重合.设矢量 $\boldsymbol{r}_2$ 在坐标系 $O_2X_2Y_2Z_2$ 下的坐标列阵为 $(\boldsymbol{r}_2)_2=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$,矢量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 下的坐标列阵为 $(\boldsymbol{r})_1=[r\cos\theta,r\sin\theta,0]^{\mathrm{T}}$.

根据上述假设,追踪飞行器在坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$ 的位置矢量及对时间的导数为

$$(\boldsymbol{r}_1)_1=\begin{Bmatrix} x\sin\theta+(y+r)\cos\theta \\ -x\cos\theta+(y+r)\sin\theta \\ z \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

$$(\dot{\boldsymbol{r}}_1)_1=\begin{Bmatrix} [\dot{x}-\dot{\theta}(y+r)]\sin\theta+[(\dot{y}+\dot{r})+\dot{\theta}x]\cos\theta \\ [\dot{y}+\dot{\theta}x]\cos\theta-[\dot{x}-\dot{\theta}(y+r)]\sin\theta \\ \dot{z} \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

则,追踪飞行器的动能和势能可表示为

$$\begin{cases} T=\dfrac{m}{2}[(\dot{x}-\dot{\theta}y-\dot{\theta}r)^2+(\dot{y}+\dot{\theta}x)^2+\dot{z}^2], \\ V=\dfrac{-\mu m}{\sqrt{x^2+(y+r)^2+z^2}}, \end{cases} \tag{3}$$

其中, $m$ 为追踪飞行器的质量, $\mu$ 为地球的引力常数.根据 Lagrange 函数的定义,可得追踪飞行器相对于目标飞行器的相对运动的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{m}{2}[(\dot{x} - \dot{\theta}y - \dot{\theta}r)^2 + (\dot{y} + \dot{\theta}x)^2 + \dot{z}^2] + \frac{\mu m}{\sqrt{x^2 + (y + r)^2 + z^2}}. \tag{4}$$

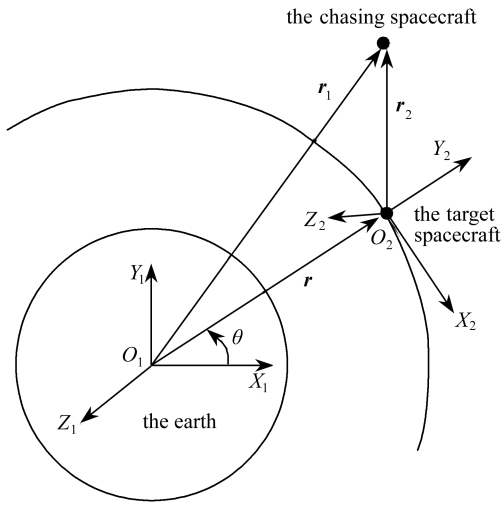


**图 1** 坐标系

Fig.1 The coordinate system

通过此 Lagrange 函数推导的 Lagrange 方程与文献[6]中给出的非线性动力学方程一致.现将其导入 Hamilton 系统,选广义坐标为: $\boldsymbol{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^{\mathrm{T}} = [x \quad y \quad z]^{\mathrm{T}}$,引入广义动量: $\boldsymbol{p} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^{\mathrm{T}}$, 有

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \dot{\theta}y - \dot{\theta}r), \\ p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \dot{\theta}x), \\ p_3 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \end{cases} \tag{5}$$

通过式(5),用广义动量来表示广义坐标对时间的导数,得

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{p_1}{m} + \dot{\theta}y + \dot{\theta}r, \\ \dot{y} = \dfrac{p_2}{m} - \dot{\theta}x, \\ \dot{z} = \dfrac{p_3}{m}. \end{cases} \tag{6}$$

通过 Lagrange 函数的 Legendre 变换,可得 Hamilton 函数为

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i \dot{q}_i - L = $$

$$p_1\left(\frac{p_1}{2m} + \dot{\theta}y + \dot{\theta}r\right) + p_2\left(\frac{p_2}{2m} - \dot{\theta}x\right) + \frac{p_3^2}{2m} - \frac{\mu m}{\sqrt{x^2 + (y + r)^2 + z^2}}. \tag{7}$$

至此,给出了卫星空间交会动力学的 Hamilton 方程:

$$\begin{cases}\dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dfrac{p_1}{m} + \dot{\theta}(q_2 + r), \\ \dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \dfrac{p_2}{m} - \dot{\theta} q_1, \\ \dot{q}_3 = \dfrac{\partial H}{\partial p_3} = \dfrac{p_3}{m}, \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = p_2 \dot{\theta} - \dfrac{\mu m q_1}{[q_1^2 + (q_2 + r)^2 + q_3^2]^{3/2}}, \\ \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = - p_1 \dot{\theta} - \dfrac{\mu m (q_2 + r)}{[q_1^2 + (q_2 + r)^2 + q_3^2]^{3/2}}, \\ \dot{p}_3 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_3} = - \dfrac{\mu m q_3}{[q_1^2 + (q_2 + r)^2 + q_3^2]^{3/2}}. \end{cases} \tag{8}$$

## 2 辛 Runge-Kutta 方法

在 Hamilton 系统下使用辛算法能保持系统的很多定性特性,如它的相流形保持相空间的面积和体积不变、保持能量和动量不变等[8-10].而如果在 Hamilton 系统下使用传统的非辛算法,则无法保持 Hamilton 系统的定性特性,随着积分时间的增加,计算误差积累,其系统的能量、动量等定性性质也会随时间而改变,从而破坏了系统原有的特性.

对于一般的动力学系统,Runge-Kutta 方法是求解非线性动力学方程的重要途径.如果能将 Runge-Kutta 方法应用于 Hamilton 系统,且能达到保结构的效果,对于求解非线性的 Hamilton 系统有着重要的意义[17].Tang[18] 证明了一般的线性算法中只有 Runge-Kutta 方法可能是辛的,而线性多步法不可能是辛的.

将 $2n$ 维的 Hamilton 方程写成如下矩阵形式:

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{J}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = f(t, \boldsymbol{u}), \tag{9}$$

其中, $\boldsymbol{J}$ 为反对称矩阵: $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{I}_n$ 为 $n$ 维单位矩阵.$s$ 级的 Runge-Kutta 方法的一般格式为[8]

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \tau \sum\limits_{j=1}^{s} b_j f(t_n + c_j \tau, \boldsymbol{k}_j), \\ \boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{u}_n + \tau \sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_n + c_j \tau, \boldsymbol{k}_j), \end{cases} \tag{10}$$

其中, $\tau$ 为计算步长, $i, j = 1,2,\cdots,s$, $c_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{s} c_i = 1$, $\sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij} = c_i$, $\sum\limits_{j=1}^{s} b_j = 1$.Sanz-Serna, Lasagni 和 Suris[12-14] 从不同的角度证明,上述 Runge-Kutta 方法的系数满足以下条件时为辛 Runge-Kutta 方法:

$$b_i b_j - a_{ij} b_i - a_{ji} b_j = 0, \qquad i, j = 1,2,\cdots,s. \tag{11}$$

辛 Runge-Kutta 方法是一种构造辛算法的有效途径,其优点是构造简单、适用范围广,因此

得到广泛的应用.系数 $a_{ij}$ 和 $b_i$ 取不同的值时,可得到不同的辛 Runge-Kutta 方法.当 $s=1$ 时,辛 Runge-Kutta 变为隐式中点 Euler 公式:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \tau f(\boldsymbol{k}_1), \\ \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{u}_n + \dfrac{\tau}{2} f(\boldsymbol{k}_1). \end{cases} \tag{12}$$

常用的一种隐式二级四阶辛 Runge-Kutta 格式的系数为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{6} \\ \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{6} & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

# 3 Hamilton 系统下卫星空间交会的数值仿真

为研究辛算法在 Hamilton 系统下的保结构特性, 本节采用二级四阶的辛 Runge-Kutta 格式对卫星空间交会的非线性 Hamilton 方程(8)进行数值仿真.为了使仿真尽量与工程实际接近, 引用神州九号与天宫一号交会对接时的数据作为仿真数据: 目标飞行器的飞行高度为 350 km, 追踪飞行器由地面控制切换到自主控制段时, 飞行高度为 330 km, 在目标飞行器后方 50 km 处;追踪飞行器的质量为 8 000 kg .假设追踪飞行器相对于目标飞行器在 $x$ 方向的速度为−40 m/s,负号代表追踪飞行器的绝对速度比目标飞行器大.则初始条件为

$$\boldsymbol{q}_0 = [x, y, z]^{\mathrm{T}} = [50\,000,\ -20\,000,\ 0]^{\mathrm{T}},\ \dot{\boldsymbol{q}}_0 = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^{\mathrm{T}} = [-40,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}. \tag{14}$$

根据方程(5)和方程(14),可计算得到初始条件 $\boldsymbol{p}_0$.在此问题中,Hamilton 函数(7)的物理意义为追踪飞行器的动能关于广义速度的二次项加上势能,再减去动能关于广义速度的零次项.Hamilton 方程的辛算法在计算过程中能保持 Hamilton 函数不随时间改变.令 $\tau = 100$ s,积分时间为目标飞行器在其轨道运行 100 个轨道周期,用辛 Runge-Kutta 方法求解方程(8),绘制 Hamilton 函数的相对误差图 ($\Delta H_{\mathrm{r}}$) 如图 2 所示.

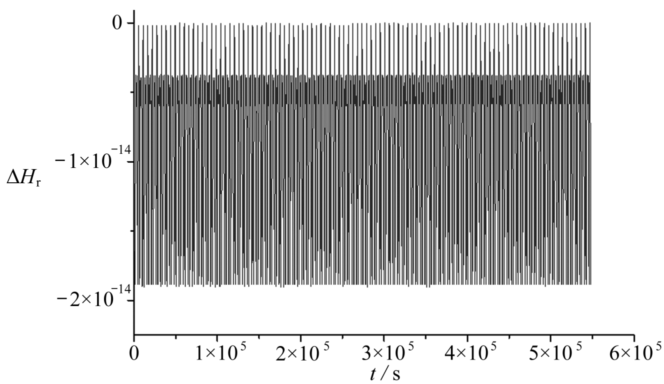


**图 2** 辛 Runge-Kutta 方法的 Hamilton 函数相对误差

Fig.2 Relative error of the Hamiltonian function with the symplectic Runge-Kutta method

由图 2 可知,在 Hamilton 体系下使用辛 Runge-Kutta 方法,在大步长、长时间积分下能够保持 Hamilton 函数的相对误差为 $10^{-14}$,且其振荡幅值不随时间而改变,说明 Hamilton 体系下的辛算法能保持系统的定性性质,是一种很好的保结构算法.

取相同的初始条件、积分步长和积分时间,用 Runge-Kutta 方法求解方程(8),其 Hamilton

函数不能得到保持,绘制 Hamilton 函数的相对误差图如图 3 所示.

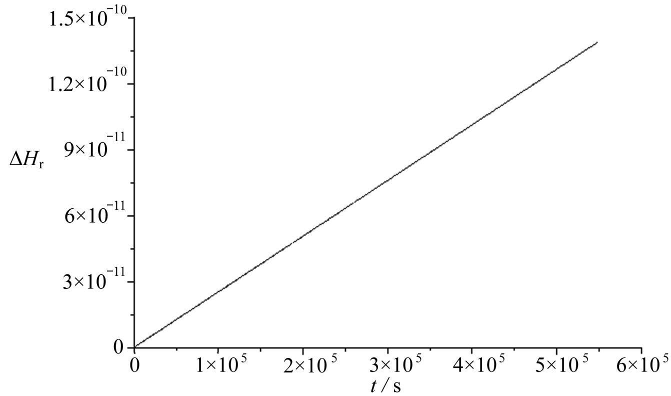


**图 3**　Runge-Kutta 方法的 Hamilton 函数相对误差

Fig.3　Relative error of the Hamiltonian function with the Runge-Kutta method

对比图 2 和图 3 可知,Runge-Kutta 方法不能保持系统的定性性质,其 Hamilton 函数相对误差比辛 Runge-Kutta 方法高 4 个数量级,且误差的振幅随着时间线性增长,在长时间的积分后系统将会失去原有的几何特性、守恒量等定性性质,从而使计算结果失去可靠性.

为进一步比较以上两种方法,考虑追踪飞行器的飞行轨道与目标飞行器的轨道相差较大的情况,选初始条件如下:

$$\boldsymbol{q}_0 = [x, y, z]^{\mathrm{T}} = [800\ 000,\ 700\ 000,\ 0]^{\mathrm{T}},\ \dot{\boldsymbol{q}}_0 = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^{\mathrm{T}} = [0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

取 $\tau$ = 600 s,积分时间为目标飞行器的 200 个轨道周期,绘制追踪飞行器的运行轨迹如图 4、图 5.

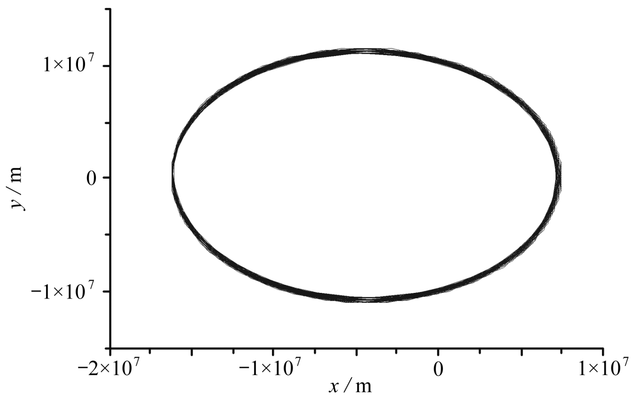


**图 4**　辛 Runge-Kutta 方法的追踪飞行器运行轨迹

Fig.4　The orbit of the chasing spacecraft with the symplectic Runge-Kutta method

对比图 4 和图 5 的追踪飞行器的轨道,辛 Runge-Kutta 方法求解的 200 个周期的运行轨迹基本重合,而 Runge-Kutta 方法求解的 200 个周期的运行轨迹是不重合的.根据天体动力学的知识,卫星在忽略轨道摄动力的二体问题中的运行轨道应为重合的椭圆.再结合图 2 和图 3 的 Hamilton 函数的相对误差可知,辛 Runge-Kutta 方法求解 Hamilton 系统可保持系统的定性性质,能有效地控制误差的增长,而 Runge-Kutta 方法不能保持系统的定性性质,导致计算误差随时间逐渐积累,最后破坏了系统的固有特性,使计算结果的可靠性降低.

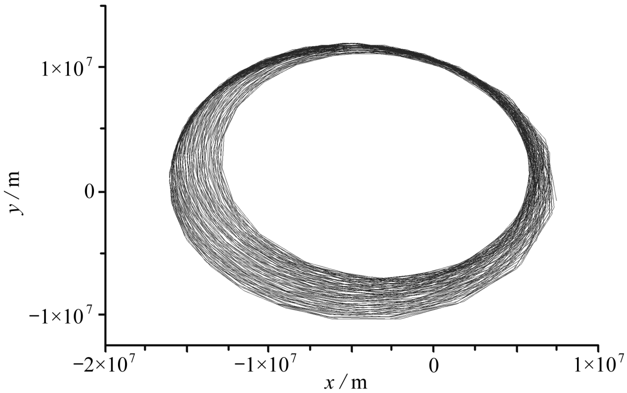


图 5 Runge-Kutta 方法的追踪飞行器运行轨迹

Fig.5 The orbit of the chasing spacecraft with the Runge-Kutta method

# 4 结 论

本文在 Lagrange 体系下引入广义动量,通过 Legendre 变换将卫星空间交会动力学模型引入到一阶的 Hamilton 系统.通过对卫星空间交会的动力学仿真,得到结论如下:

1) 采用辛 Runge-Kutta 方法求解卫星空间交会的 Hamilton 方程,与传统的四阶 Runge-Kutta 方法对比,辛 Runge-Kutta 方法能保持系统的 Hamilton 函数误差的振荡幅值不随时间改变,而 Runge-Kutta 方法求解的 Hamilton 函数误差的振荡幅值随时间线性变化.

2) 分别采用辛 Runge-Kutta 方法和 Runge-Kutta 方法绘制了追踪飞行器飞行时间为 200 个轨道周期时的飞行轨迹,辛 Runge-Kutta 方法所绘制的轨迹能保持重合,而 Runge-Kutta 方法绘制的轨迹则出现严重的偏差.

与传统的数值积分算法对比,Hamilton 系统的辛算法有很多优越的特性,其在量子力学、天体力学、几何光学、电磁学等领域,特别是需要长时间积分或在积分过程中需要保持系统的定性特性的工程应用中具有广阔的前景.

## 参考文献(References):

[1] 周建平. 空间交会对接技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2013: 1-19.(ZHOU Jian-ping. *Space Rendezvous and Docking Technology*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2013: 1-19.(in Chinese))

[2] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous[J]. *Journal of Aerospace Science*, 1960, **27**(9): 653-658.

[3] 林来兴. 空间交会动力学和安全模式[J]. 宇航学报, 1993, **14**(1): 1-6.(LIN Lai-xing. Dynamics and safe mode of space rendezvous[J]. *Journal of Astronautics*, 1993, **14**(1): 1-6.(in Chinese))

[4] 周建平. 天宫一号/神舟八号交会对接任务总体评述[J]. 载人航天, 2012, **18**(1): 1-5.(ZHOU Jian-ping. A review of Tiangong-1/Shenzhou-8 rendezvous and docking mission[J]. *Manned Spaceflight*, 2012, **18**(1): 1-5.(in Chinese))

[5] 杏建军. 编队卫星周期性相对运动轨道设计与构形保持研究[D]. 博士学位论文. 长沙: 国防科学技术大学, 2007.(XING Jian-jun. Study on formation design and stationkeeping of spacecraft formation flying[D]. PhD Thesis. Changsha: National University of Defense Technology,

2007.(in Chinese))

[6] 林来兴. 交会对接动力学模型和动力学特性[J]. 中国空间科学技术, 1994, **14**(3): 47-53.(LIN Lai-xing. Dynamic model and behaviour of space rendezvous[J]. *Chinese Space Science and Technology*, 1994, **14**(3): 47-53.(in Chinese))

[7] 应祖光. 高等动力学——理论及应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2011: 36-65.(YING Zhu-guang. *Advanced Dynamics—Theory and Application*[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2011: 36-65.(in Chinese))

[8] 冯康, 秦孟兆. 哈密尔顿系统的辛几何算法[M]. 杭州: 浙江科技出版社, 2003: 185-205.(FENG Kang, QIN Meng-zhao. *Symplectic Geometric Algorithms for Hamiltonian Systems*[M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2003: 185-205.(in Chinese))

[9] 赵衍辉, 刘宏伟. 经典哈密顿力学的辛算法[J]. 白城师范学院学报, 2009, **23**(6): 14-16.(ZHAO Yan-hui, LIU Hong-wei. The symplectic method of the classical Hamilton mechanics[J]. *Journal of Baicheng Normal College*, 2009, **23**(6): 14-16.(in Chinese))

[10] FENG Kang, QIN Meng-zhao. Hamiltonian algorithms for Hamiltonian dynamical systems[J]. *Progress in Natural Science*, 1991, **1**(2): 105-116.

[11] FENG Kang. On difference schemes and symplectic geometry[C]//*Proceeding of the 5th Intern Symposium on Differential Geometry and Differential Equations*. Beijing: Science Press, 1985: 42-58.

[12] Sanz-Serna J M. Runge-Kutta schemes for Hamiltonian systems[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 1988, **28**(4): 877-883.

[13] Lasagni F M. Canonical Runge-Kutta methods[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* (*ZAMP*), 1988, **39**(6): 952-953.

[14] Suris Y B. On the canonicity of mappings that can be generated by methods of Runge-Kutta type for integrating systems $x = -\partial U/\partial x$[J]. *Zh Vychisl Mat i Mat Fiz*, 1989, **29**(2): 202-211.

[15] 刘林, 廖新浩, 赵长印, 王昌彬. 辛算法在动力天文中的应用(Ⅲ)[J]. 天文学报, 1994, **35**(1): 51-66.(LIU Lin, LIAO Xin-hao, ZHAO Zhang-yin, WANG Chang-bin. Application of symplectic integrators to dynamical astronomy (Ⅲ)[J]. *Acta Astronomica Sinica*, 1994, **35**(1): 51-66.(in Chinese))

[16] 刘林, 廖新浩, 季江徽. 辛算法在近地小行星轨道演化数值研究中的应用[J]. 计算物理, 1997, **14**(4): 649-651.(LIU Lin, LIAO Xin-hao, JI Jiang-hui. The application of symplectic algorithm on numerical research of the orbital evolution of the NEAS[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 1997, **14**(4): 649-651.(in Chinese))

[17] 蒋长锦. 四级四阶对角隐式辛 Runge-Kutta 方法参数计算[J]. 数值计算与计算机应用, 2002, **23**(3): 161-166.(JIANG Chang-jin. On compute of parameters for 4-stage 4-order diagonally implicit symplectic Runge-Kutta methods[J]. *Journal of Numerical Methods and Computer Applications*, 2002, **23**(3): 161-166.(in Chinese))

[18] Tang Y F. The symplecticity of multi-step methods[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 1993, **25**(3): 83-90.

# Nonlinear Dynamic Behavior of the Satellite Rendezvous and Docking Based on the Symplectic Runge-Kutta Method

LI Qing-jun, YE Xue-hua, WANG Bo, WANG Yan
(*Department of Engineering Mechanics, School of Mechanics and Civil.&Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *P.R.China*)
(Recommended by XIE Gong-nan, M. AMM Editorial Board)

**Abstract**: The simulation of the satellite rendezvous and docking is one of most important problems for space platforms and so on. The nonlinear dynamic behavior of the satellite rendezvous and docking was investigated. According to the energy principle, the Lagrange function was given; then, the generalized coordinates, generalized momentum and Legendre transformation were introduced to derive the Hamilton equations; both the symplectic Runge-Kutta method and the 4th-order Runge-Kutta method were comparatively used to solve the Hamilton equations. Through numerical analysis, it is easily found that the natural properties of the nonlinear dynamic system are well preserved with the symplectic Runge-Kutta method, especially in the long-time chasing cases. The proposed symplectic method is applicable to the related astrodynamic problems.

**Key words**: satellite rendezvous and docking; nonlinear dynamics; Hamilton system; symplectic Runge-Kutta method

**Foundation item**: The National Natural Science Foundation of China(11172239;11372252)